数理解析研究所講究録
第579巻 1985年 1-16

発展方程式の解の漸近挙動

横浜国大　平野　載倫（Norimichi Hirano）

§1. 序論

Eを実バナッハ空間，AをE上のm-accretive 作用素としたとき、初期値問題

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au(t) \ni 0, & t \geq 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}
$$

（u_0はAの定義域$D(A)$の閉包の元）の解の漸近挙動については，ここ10年ほどの間に数多くの結果が報告されてきた。また、非斉次項をもつ次の初期値問題

$$
(2)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au(t) \ni f(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}
$$

についても、いくつかの研究成果が報告されている（[12]）。

問題（1）の解の漸近挙動を考えるためには、Aによって生成される非線形半群$\{S(t)\,;\,t \geq 0\}$の漸近挙動を考えれ

ばよい。さらにはEの縮小写像の漸近挙動を考えることに帰着される。すなわち、Cをバナッハ空間Eの閉かつ凸な部分集合とし、TをCからCの中への縮小写像としたとき，Cの各点xに対して点列$\{T^n x : n \geq 1\}$の漸近挙動を考えればよい。このようにして、問題（1）の解の漸近挙動を考えることは、もっぱらバナッハ空間のノルムの性質だけを必要としていることがわかる。縮小写像Tが不動点をもてば、各点$x \in C$に対して平均$S_n x = \frac{1}{n}(x + Tx + \cdots + T^{n-1}x)$が、Tの不動点に弱収束することは、ヒルベルト空間においては、Baillon [1] によって示され、その後S. Reich等によって一様凸でフレッシェ微分可能なノルムをもつバナッハ空間においても成立することが示された。これらの平均収束定理からは、CからTの不動点集合F(T)上への写像で$PT = TP = P^2 = P$,

$$\|Px - Py\| \leq \|x - y\| \qquad x, y \in C$$

および

$$Px \in \overline{co}\{T^k x : k = 0, 1, 2 \cdots\}, \qquad x \in C$$

を満たすものが存在することが示される（このような写像をergodic retractionと呼ぶことにする）。この報告では平均収束とergodic retractionの存在および一意性のか

かかわりについて述べる。一方、Baillon の平均収束定理は別の一般化もなされた。すなわち、

$$T_n x = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} T^i x$$

としたとき、$T_n x$ が T の不動点に弱収束することが示されている。ここで $\{a_{n,i}\}$ は次の条件をみたすものである

$$a_{n,i} \geq 0 , \qquad \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} = 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} | a_{n,i+1} - a_{n,i} | \to \infty , \quad \text{as } n \to \infty$$

$$a_{n,i} \longrightarrow 0 \qquad \text{as } n \to \infty .$$

このような拡張は縮小半群の場合にもなされている。すなわち、C をヒルベルト空間 E の閉かつ凸な部分集合とし，$\{S(t) : t \geq 0\}$ を C 上の縮小半群で不動点集合 $\{x \in C : S(t)x = x \ \forall t \geq 0\}$ が空でないようなものとする。このとき

$$R(s,x) = \int_0^\infty K(s,t) S(t) x \, dt$$

が $\{S(t) : t \geq 0\}$ の不動点集合に弱収束することが知られている。ここで $K : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ は次の

条件をみたすものである.

$$\int_0^\infty k(s,t)\,dt = 1 \qquad \forall s \geq 0$$

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^T k(s,t)\,dt = 0 \qquad \forall T > 0 \quad (T \neq \infty)$$

$$\lim_{s\to\infty} V(s) = 0$$

ただし, $V(s)$ は 写像 $t \mapsto k(s,t)$ の total variationを表わす.

ここでは, こうした一連の収束定理を統一的にあつかうことを考え、そのために *mean* という概念を用いる。以下に述べる結果は高橋－平野－木户 の共同研究によるものである.

§2 準備

問題 (1) に適用することだけを考えるならば、one-parameter semigroup を考えれば十分であるが、ここでは可換な半群 G の上で議論を進める。 $m(G)$ は G 上の有界な実数値関数の全体とし, D を $m(G)$ の部分空間で定数値関数を含み, 各 r_s で不変なものとする。ここで r_s $(s \in G)$ は, 各 $f \in m(G)$ に対して, $(r_s f)(t) = f(t+s)$ で定義されるものとする。

D 上の線形汎関数で, $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ を満たすものを D 上

の mean と呼ぶ。D上の mean μ は

$$\mu(r_s f) = \mu(f) \qquad \forall s \in G, \quad \forall f \in D$$

をみたすとき invariant であるといわれる。次の補題は以下の議論の基礎になっている。

<u>補題 1</u>. $f : G \longrightarrow E$ は $\overline{\{f(t) : t \in G\}}$ が弱コンパクトであるような関数とし、D はすべての h_{x^*} $(x^* \in E^*)$ を含むとする（$h_{x^*}(t) = \langle f(t), x^* \rangle$, $t \in G$, ただし $\langle y, x^* \rangle$ は x^* の y における値をあらわすものとする）。このとき、各 $\mu \in D^*$（D の dual space）に対して E の点 f_μ で、

$$\langle f_\mu, x^* \rangle = \int \langle f(t), x^* \rangle \, d\mu(t) \qquad \forall x^* \in E^*$$

を満たすものがある。ここで $\int \langle f(t), x^* \rangle d\mu(t)$ は μ の h_{x^*} における値をあらわすものとする。

あとひとつ、定義をしておく。$\{\mu_\alpha\}$ を D 上の線形汎関数のネットとする。このとき、$\{\mu_\alpha\}$ が strongly regular であるとは、次の条件をみたすことである。

(i) $\quad \sup \|\mu_\alpha\| < \infty$;

(ii) $\quad \lim \mu_\alpha(1) = 1$;

(iii) $\quad \lim \|\mu_\alpha - r_s^* \mu_\alpha\| = 0 \qquad \forall s \in G$.

§3 エルゴード定理

この節では特に断わらない限り G, D は§2で定義されたものとする.

<u>補助定理 2.</u>　f を G からバナッハ空間 E への関数で次の条件を満たすものとする。すなわち, E^* の各点 x^* に対して, 関数 $f_{x^*}: t \to \langle f(t), x^* \rangle$ は D に含まれる。S を E の弱コンパクトな凸部分集合とする。このとき, 次の条件は同値である。

(a)　G 上の finite mean のネット $\{\mu_\alpha\}$ で次の条件を満たすものがある。すなわち, S の任意の弱近傍 W に対して, α_0 が存在して, 任意の $\alpha \geq \alpha_0$ および $s \in G$ に対して,

$$\int f(s+t)\, d\mu_\alpha(t) \quad \in W$$

を満たす;

(b)　D 上の任意の invariant mean μ に対して, $f_\mu \in S$ が成り立つ.

証明. (a) ⇒ (b): μ を D 上の invariant mean とし, W を S の弱近傍とする. このとき S の閉かつ凸な弱近傍で

$W \subset W'$をみたすものをとることができる。このようなW'に対して，(a)より finite mean $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{t_i}$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(t_i+s) \in W' \qquad \forall s \in G$$

をみたすようにできる.($a_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, $t_1, t_2, \cdots t_n \in G$)。
μは invariant mean だから，各$x^* \in E^*$に対して

$$\begin{aligned}
\langle f_\mu, x^* \rangle &= \int \langle f(t), x^* \rangle d\mu(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \int \langle f(t_i+t), x^* \rangle d\mu(t) \\
&= \int \langle \sum_{i=1}^{n} a_i f(t_i+t), x^* \rangle d\mu(t) \\
&= \langle \int \sum_{i=1}^{n} a_i f(t_i+t) d\mu(t), x^* \rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ。これより

$$f_\mu = \int \sum_{i=1}^{n} a_i f(t_i+t) d\mu(t) \in W'$$

をうる. Sは弱閉だから，$f_\mu \in S$をうる。

(b)⇒(a)：Gは可換な~~半群~~だから finite mean のネット$\{\mu_\alpha\}$で各$s \in G$に対して$\|\mu_\alpha - r_s^* \mu_\alpha\| \to 0$をみたすようなものがある($r_s^*$は$r_s$の conjugate)。$\{\mu_\alpha\}$は$m(G)^*$の有界集合だから，$\mu_\alpha$は$\mu \in m(G)^*$に weak*-位相で収束しているとしてよい。このとき，f_{μ_α}はf_μに弱収束する。

また，μ は invariant mean だから，(b) から $f_\mu \in \mathcal{S}$ を得る。ここで (a) が成立しないものとしよう。すると $\mathcal{S}$ の弱近傍 W および，$\{\mu_\alpha\}$ のサブネット $\{\mu_\beta\}$，G のネット $\{s_\beta\}$ が存在して

$$f_{r_{s_\beta}\mu_\beta} = \int f(t+s_\beta)\,d\mu_\beta(t) \notin W$$

をみたす。このとき，もし必要ならばサブネットをとることによって，$r_{s_\beta}\mu_\beta$ が $m(G)^*$ の点 ν に weak*-位相で収束しているとしてよい。このとき ν は invariant mean である．実際，各 $s \in G$ に対して

$$\|r_{s_\beta}\mu_\beta - r_s^* r_{s_\beta}\mu_\beta\| = \|r_{s_\beta}(\mu_\beta - r_s^*\mu_\beta)\|$$
$$\leq \|\mu_\beta - r_s^*\mu_\beta\| \to 0$$

が示される．よって $f_{r_{s_\beta}\mu_\beta}$ は $f_\nu \in \mathcal{S}$ に弱収束するが、これは矛盾である。

<u>定理 3.</u>　C を一様凸なバナッハ空間 E の閉かつ凸な部分集合とする。$\mathcal{F} = \{T_t : t \in G\}$ は C からそれ自身への縮小写像の可換な半群で次のような条件をみたすものとする。すなわち，各 $x \in C$ および $x^* \in E^*$ に対して，

関数 $s \longmapsto \langle T_s x, x^* \rangle$ はDに含まれる。また不動点集合 $F(\mathfrak{T}) = \bigcap_{s\in G} F(T_s)$ は空でない。このとき，各 invariant mean μ に対して，$\mathfrak{T}_\mu$ はCから $F(\mathfrak{T})$ の上への ergodic retraction である。すなわち，$\mathfrak{T}_\mu$ はCから $F(\mathfrak{T})$ の上への縮小写像で，$\mathfrak{T}_\mu T_s = T_s \mathfrak{T}_\mu = \mathfrak{T}_\mu^2 = \mathfrak{T}_\mu \ (s \in G)$ および，$\mathfrak{T}_\mu x \in \overline{co}\{T_s x : s \in G\}$ をみたす。（ここでは，$\mathfrak{T}$ を写像 $s \to T_s \ s\in G$ とみなして $\mathfrak{T}_\mu$ を考えている）。

証明．$x \in C$ とする。各G上の finite mean λ に対して

$$\lim_t \| T_s \mathfrak{T}_\lambda T_t x - \mathfrak{T}_\mu T_s T_t x \| = 0$$

が各 $s \in G$ に対して一様に成り立つことは，すでに知られている。ここで $\{\mu_\alpha\}$ を G上の finite mean のネットで，各 $s\in G$ に対して $\|\mu_\alpha - r_s^* \mu_\alpha\| \to 0$ をみたすものとする。各 $\varepsilon > 0$ および $s \in G$ に対して，$\|\mu_\alpha - r_s^* \mu_\alpha\| < \varepsilon / M$ をみたすような α をとる（$M = \sup_{t\in G} \|T_t x\|$）。このとき，すべての $t \in G$ に対して，

$$\| T_s \mathfrak{T}_{\mu_\alpha} T_{t_0+t} x - \mathfrak{T}_{r_s^* \mu_\alpha} T_{t_0+t} x \| < \varepsilon$$

をみたすような t_0 をとることができる。これより

$$\| T_s \mathfrak{T}_{r_{t_0} \mu_\alpha} T_t x - \mathfrak{T}_{r_{t_0} \mu_\alpha} T_t x \|$$

$$\le \| T_s \mathfrak{F}_{r_0 \mu_\alpha} T_t x - \mathfrak{F}_{r_0 \mu_\alpha} T_{t_0+t} x \|$$
$$+ \| \mathfrak{F}_{r_s \mu_\alpha} T_{t_0+t} x - \mathfrak{F}_{r_{t_0} \mu_\alpha} T_t x \|$$
$$\le \varepsilon + M \cdot \varepsilon/M = 2\varepsilon$$

をうる。今 Wを $\overline{co}\{T_t x : t \in G\} \cap F(\mathfrak{F})$ の弱近傍にとると、ある$\varepsilon > 0$が存在して $\|x - T_s x\| < \varepsilon$ $(s \in G)$ かつ $x \in \overline{co}\{T_s x : s \in G\}$であれば、$x \in W$となる。よって上の議論から $\mathfrak{F}_{r_{t_0} \mu_\alpha} T_t x \in W$ $(\forall t \in G)$ をうる。ここで補助定理２を用いれば、

$$\mathfrak{F}_\mu x \in \overline{co}\{T_t x : t \in G\} \cap F(\mathfrak{F})$$

をうる。また、各$s \in G$に対して

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}_\mu T_s x, x^* \rangle &= \int \langle T_t T_s x, x^* \rangle \, d\mu(t) \\ &= \int \langle T_t x, x^* \rangle \, d\mu(t) \\ &= \langle \mathfrak{F}_\mu x, x^* \rangle \qquad (x^* \in E^*) \end{aligned}$$

より、$T_s \mathfrak{F}_\mu = \mathfrak{F}_\mu T_s = \mathfrak{F}_\mu$ をうる．他の性質も容易に導かれる。

定理3によって一様凸なバナッハ空間では不動点集合への ergodic retraction が存在することがわかるが、ergodic retraction の存在だけでは収束定理に結びつかない。しかし、収束の問題は ergodic retraction の存在の一意性から導びかれることがわかる。

<u>定理 4.</u> C, E および $\mathfrak{S}=\{T_t : t\in G\}$ は定理3と同じとし、$\{\mu_\alpha\}$ を D 上の線形汎関数の strongly regular なネットとする。このとき、C から $F(\mathfrak{S})$ の上への ergodic retraction がただひとつだけならば、各 $x\in C$ に対して、$\mathfrak{S}_{\mu_\alpha} T_t x$ は $F(\mathfrak{S})$ の点に $t\in G$ に一様に弱収束する。

定理4によって平均収束を示すためには、ergodic retraction の一意性を示せばよいことがわかる。一意性については、E がフレッシェ微分可能なノルムをもてば成り立つが、それ以外のバナッハ空間についてはよく知られておらず、今後に残された問題となっている。

講演の最後でふれたように、上記のエルゴード定理は、問題 (2) の解の漸近挙動に直接適用することはできない。問題 (2) の解の漸近挙動を調べるには、ここまで述べてきたような抽象的方法よりも、方程式 (2) を直接用いる方が、

より有効であるように思われるが、いずれにしても講演の中でふれた結果も含め十分に解析されているとはいいがたい。

§4 不動点の近似

縮小写像の平均収束定理は、不動点（問題(1)で考えれば定常解）の近似法になっているが、やはり mean を用いることによって平均収束とはすこし違った近似法を構成できる。発展方程式の漸近挙動という主題からはすこしはずれるが、同じように mean を用いた方法で関連も深いので簡単にふれてみる。

E は一様凸かつ一様になめらかなノルムをもつバナッハ空間，C を E の閉かつ凸な部分集合，そして $T: C \to C$ を縮小写像で不動点集合 $F(T)$ が空でないようなものとする。μ を $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 上の mean とし、x を C の点とする。このとき，$z \in E$ に対して $f_\mu(z) = \frac{1}{2}\mu(\|T^m x - z\|^2)$ で f_μ を定める．ただし，右辺は関数 $\varphi(m) = \frac{1}{2}\|T^m x - z\|^2$ の μ に関する値を表わすものとする。このとき，

$$f_\mu(y_\mu) = \min\{f_\mu(y) : y \in E\}$$

をみたす y_μ を近似する方法として，次のようなものを考え

る。

$$(*)\quad \begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = x_n - \lambda_n J^* \partial f_\mu (x_n), \quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

ここで $\lambda_n > 0$, J (J^*) は E から E^* への (E^* から E への) duality mapping, ∂f_μ は f_μ の劣微分とする。

仮定より J は有界集合上で一様連続であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して

$$(**)\quad \| Ju - Jv \| \le \varepsilon \qquad \forall u, v \in S_r(0) : \| u - v \| \le \delta$$

ここで $S_r(0)$ は原点を中心とした半径 r の開球である。$S_r(0)$ は任意の有界集合 D におきかえてもよい。そこで、有界集合 D および $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_D(\varepsilon) = \sup\{\delta > 0 : \delta$ は $(**)$ をみたす$\}$ と定義する。

<u>定理 5.</u> D を有界集合, $\{x_n\}$ は $(*)$ で定まる点列で $T^m x - x_n \in D$ ($m, n = 0, 1, 2, \cdots$) および, ある $\alpha > 0$ に対して,

$$\alpha\, \delta_D (\| y_n \| / 2) \le \| x_{n+1} - x_n \| \le \delta_D (\| y_n \| / 2), \quad n = 0, 1, \cdots$$

をみたすものとする。ここで $y_n = (x_n - x_{n+1}) / \lambda_n$ で

ある。このとき x_n は y_μ に弱収束する。

定理5において与えられた $x_0 \in E$ に対して点列 $\{x_n\}$ が定理の条件をみたすように D および $\{\lambda_n\}$ を選ぶことは、常に可能である。特に μ として N 上の invariant mean をとれば、y_μ は T の不動点であるばかりでなく、$\{T^n x\}$ の asymptotic center であることがわかる。

REFERENCES

〔1〕 J. B. Baillon, Un theoreme de type ergodique pour les contractions nonlineaires dans un espace de Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris, 280(1975), 1511-1514.

〔2〕 J. B. Baillon and H. Brezis, Une remarque sur le comportement asymptotique des semigroupes nonlineaires, Houston J. Math., 2(1976), 5-7.

〔3〕 J. B. Baillon, R. E. Bruck and S, Reich, On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings, Houston J, Math., 4(1978), 1-9.

〔4〕 H. Brezis and F. E. Browder, Nonlinear ergodic theorems, Bull. Amer. Math. Soc., 82(1976), 959-961.

〔5〕 H. Brezis and F. E. Browder, Remarks on nonlinear ergodic theory, Advance Math., 25(1977), 165-177.

〔6〕 R. Bruck, Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, J. Func. Anal., 18(1975), 15-26.

〔7〕 ----, A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, Israel J. Math., 32(1979), 107-116.

〔8〕 N. Hirano and W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach space, Pacific J. Math., 112(1984), 333-346.

〔9〕 N. Hirano, K. Kito and W. Takahashi, Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces, Nonlinear Analysis, in press.

〔10〕 G. G. Lorentz, A contribution to the theory of divergent series, Acta Math. 80(1948), 167-190.

〔11〕 I. Miyadera, Asymptotic behavior of iterates of nonexpansive mappings in Banach spaces, Proc. Japan Acad., 54(1978), Ser.A, 212-214.

〔12〕 I. Miyadera and K. Kobayashi, On the asymptotic behavior of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces, Nonlinear Analysis, 6(1982), 349-365.

〔13〕 A. Pazy, Asymptotic behavior of contractions in Hilbert space, Israel J. Math., 9(1971), 235-240.

〔14〕 S. Reich, Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 44(1973), 57-70.

〔15〕 ----, Asymptotic behavior of semigroups of nonlinear contractions in Banach space, J. Math. Anal. Appl., 53(1976), 277-290.

〔16〕 ----, Nonlinear evolution equations and nonlinear ergodic theorems, Nonlinear Analysis, 1(1977), 319-330.

〔17〕 ----, Almost convergence and nonlinear ergodic theorems, J. Approximation theory, 24(1978), 269-272.

〔18〕 ----, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 67(1979), 274-276.

〔19〕 W. Takahashi, Invariant functions for amenable semigroups of positive contractions on L , Kodai Math. Sem. Rep., 23(1971), 131-143.

〔20〕 ----, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigoup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81(1981), 253-256.