数理解析研究所講究録
第598巻 1986年 105-116

Invariant eigendistribution on the tangent space of semisimple symmetric spaces

広大　木幡 篤孝

§0. Introduction

Gを connected semi-simple Lie group とし, σをGの involutive automorphism. Hをσの fix points 全体の群の閉部分群とする. G/Hを semi-simple symmetric space と呼ぶ。よく知られているように この class は Riemannian symmetric space および connected semi-simple Lie group を含んでいる。Harish-Chandra は [1] でまず Lie algebra 上で invariant eigendistribution を研究し, 特に nilpotent variety に support をもつものを調べ, そのようなものは存在しないことを証明した。

しかしその後 semi-simple symmetric space の解析が研究され, $SO_0(n+1,1)/SO_0(n,1)$ の場合等には reguler nilpoten orbit 上に support をもつ invariant eigen distribution の発見がなされた。G. van Dijk は [2] で pseudo-Laplacian 単独の方程式を考えて nilpotent variety に support をもつ解を調べている。そこでは pseudo-Laplacian のある方向での radial part を計算することによって解をもたないための十分条件を調べた。ここでは

G. van Dijk の計算結果を応用して $\mathfrak{g}$-regular nilpotent element の近傍ではそのような解は1次元以下であることを証明した。(定理2) 又そのような解の固有値は0でなくてはならないことも示した。(定理1)

§1 記号と G. van Dijk [2] の結果 (☆で表わす)

$\mathfrak{g}$: real semi-simple Lie algebra

σ : involution of $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{q}$ (σによる固有値分解)

x_0 : $\mathfrak{q}$ の nilpotent element i.e. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x_0$: nilpotent かつ $x_0 \in \mathfrak{q}$

(以後 x_0 を fix してギロンする。)

$\{h_0, x_0, y_0\}$: normal S-triple i.e. $\exists h_0 \in \mathfrak{f}$, $y_0 \in \mathfrak{q}$ s.t

$[x_0, y_0] = h_0$, $[h_0, x_0] = 2x_0$, $[h_0, y_0] = -2y_0$

☆ $\exists \theta$; $\mathfrak{g}$ の Cartan involution s.t (i) $\theta\sigma = \sigma\theta$ かつ

(ii) $\theta h_0 = -h_0$, $\theta x_0 = -y_0$, $\theta y_0 = -x_0$

([2] の Lemma 1)

$\mathfrak{g}$ に 内積 (positive definite) を $(x, y) = -B(x, \theta y)$

で入れる。(B は Killing form)

☆ $\mathfrak{q} = [x_0, \mathfrak{f}] + Z_{\mathfrak{q}}(y_0)$ ([2] の Lemma 3)

但し $Z_{\mathfrak{q}}(y_0) = \{z \in \mathfrak{q} : [z, y_0] = 0\}$

又 上の分解は 内積 (,) に関する 直交分解

($\because$) $-B([x_0, \mathfrak{f}], \theta z) = 0 \Leftrightarrow B([x_0, \theta z], \mathfrak{f}) = 0$

$\Leftrightarrow [x_0, \theta z] = 0 \Leftrightarrow z \in Z_{\mathfrak{q}}(y_0)$

以後 $U = Z_{\mathfrak{q}}(y_0) = \theta Z_{\mathfrak{q}}(x_0)$ とおく。

$\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}h_0 + \mathbb{R}x_0 + \mathbb{R}y_0$ とし, $\mathfrak{g}_0$ の $\mathfrak{q}$ 上の 表現 ρ

を $\rho(z) = \mathrm{ad}\, z$ ($z \in \mathfrak{g}_0$) で定義する。

表現 ρ のキヤク表現分解を $\mathfrak{g}=\sum_{1\le i}\mathfrak{g}_i$ で表わす。
但し $\mathfrak{g}_i$ は non-zero な ρ のキヤク表現空間.（$\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}_0$）
このとき次のような $Z_{\mathfrak{g}}(x_0)$ の orthonormal basis $w_1',\cdots,w_r'$
をとることができる; (i) $w_i'\in\mathfrak{g}_i\cap Z_{\mathfrak{g}}(x_0)$ (ii) $[h_0,w_i']=+\lambda_i w_i'$
但し $r=\dim Z_{\mathfrak{g}}(x_0)$, $\lambda_i=\dim\mathfrak{g}_i-1$ $(1\le i\le r)$
$w_i=\theta w_i'$ とおくと $w_1,\cdots,w_r$ は $Z_{\mathfrak{g}}(y_0)$ の orthonormal
basis で $[h_0,w_i]=-\lambda_i w_i$ となる。
以後 $H\cdot x_0=\{hx_0 : h\in H\}$ $(hx_0=Ad(h)x_0)$ の transversal
方向の座標として $x_0+\sum_{1\le i\le r}u_i w_i$ $(u_i\in\mathbb{R})$ をとる。
但し G を $\mathfrak{g}$ の conected adjoint group とし H を $\mathfrak{h}$ に対応する
Lie subgroup とする。

☆ $\pi : H\times U\longrightarrow\mathfrak{g}$ とする。
$(h,u)\longrightarrow h\cdot(x_0+u)$

$\exists\ 0\in U'\underset{\text{open}}{\subset}U$ s.t $\pi|_{H\times U'}$: submersive

特に $\pi(H\times U')$: $\mathfrak{g}$ の H-invariant open subset
（[2] の Lemma 5）

以後 上の Lemma に従って x_0 の近傍を H 方向と U 方向に分解
し, differential operator, distribution 等も分解して考える。
G. van Dijk は Harish-chandra [7] と同様の方法で, 後々
radial part の定義等を与え いくつかの同様の結果を得て

いるがここでは詳しくは述べず結果（必要と思われるもの）だけを書くことにする。Dをx_0の$\mathfrak{g}$における近傍上のC^∞-differential operatorとするとき，$\mathfrak{r}(D)$でDのradial componentを表わす。（see [2]．[2]では$\Delta(D)$で表わしている。）

▶ $\mathfrak{r}(E)=\sum_{1\leq i\leq r}(1+\frac{1}{2}\lambda_i)u_i\frac{\partial}{\partial u_i}$ （[2]のLemma 7）

但し Eは$\mathfrak{g}$上のEuler vector field i.e $(Ef)(x)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(x+tx)$ でEは$\mathfrak{g}$上のH-invariant vector fieldである。

（∵） $u=\sum_{1\leq i\leq r}u_iw_i$ $s=-\frac{1}{2}\log(1+t)$ とおくと．

$$e^{sh_0}(1+t)(x_0+u)=x_0+\sum_{1\leq i\leq r}(1+t)^{1+\frac{\lambda_i}{2}}u_iw_i$$

fを locally-H-inv C^∞-function とすると，

$$f((1+t)(x_0+u))=f(x_0+\sum_{1\leq i\leq r}(1+t)^{1+\frac{\lambda_i}{2}}u_iw_i)$$

$$\therefore\quad \mathfrak{r}(E)\tilde{f}(u)=(Ef)(x_0+u)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f((1+t)(x_0+u))$$

$$=\sum_{1\leq i\leq r}(1+\frac{1}{2}\lambda_i)u_i\frac{\partial}{\partial u_i}\tilde{f}(u)$$

(see [2] Lemma 6)

☆ $\underset{\text{open subset}}{H_0\subset H}$ $\underset{\text{open}}{o\in V_0\subset V'}$ H_0 : conected，$e\in H_0$

T : $\Omega_0=\pi(H_0\times V_0)$の locally H-invariant distribution とする。

$\exists\ \sigma_T$: V_0上の distribution s.t. $T(f_\alpha)=\sigma_T(\beta_\alpha)$ $(\alpha\in C_c^\infty(H_0\times V_0$

但し $\beta_\alpha \in C_c^\infty(\mathfrak{V}_0)$: $\beta_\alpha(u)=\int_H \alpha(h,u)dh$ $(u\in \mathfrak{V}_0)$

更に $\sigma_T=0 \Rightarrow T=0$ ([2] の Theorem 10)

§2 不変同次固有関数の局所解について

$S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^H$: $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ ($\mathfrak{q}$ の複素化) の Symetric algebra $S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})$ の
内で H-invariant なものの全体

とするとき、$S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})$ の元は $\mathfrak{q}$ 上の定数係数の微分作用素と思われる。それを ∂p で表わす。($p\in S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})$)
今 $\mathfrak{q}$ 上の distribution T で次の条件を満たすものを考える。

$$
\begin{cases}
\text{(i)} & \partial p\, T = \chi(p) T \qquad \forall p\in S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^H \\
\text{(ii)} & T : H\text{-invariant} \\
\text{(iii)} & \operatorname{supp} T \subset \overline{H\cdot x_0} \qquad (\text{— は closure})
\end{cases}
$$

但し χ は $S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^H$ の charactor

$\mathfrak{V}$ の 0 の近傍 $\mathfrak{V}_0$ を十分小さくとると次のことが成り立つ。
σ_T を $\mathfrak{V}_0$ 上の T に対応する distribution とすると (ii) と (iii) から

$\operatorname{supp} \sigma_T \subset \{0\}$ (see [2] Lemma 17.18)

又 (i) より $\mathcal{Q}(\partial p)\sigma_T = \chi(p)\sigma_T$ $\forall p\in S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^H$

従って次の解集合を今後考えることにする。

$$\mathfrak{S}_{\chi_0} = \{\sigma \in \mathcal{D}'_0(U_0) \ ; \ \rho(\partial p)\sigma = \chi(p)\sigma \quad \forall p \in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H \}$$

但し $\mathcal{D}'_0(U_0)$ は U_0 の 0 に support をもつ distribution

$S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H_+$ を degree 1 次以上の元全体とする。

定理1 $\chi(S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H_+) \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{S}_{\chi_0} = \{0\}$

<Proof> $\mathfrak{S}_{\chi_0} \ni \exists \sigma \neq 0 \Rightarrow \chi(S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^H_+) = 0$ を示す。

ξ : half integer ($\geqq 2$) に対し

$\mathcal{D}'_\xi = \{\sigma \in \mathcal{D}'_0(U_0) \ ; \ \rho(E)\sigma = -\xi\sigma\}$ とおく。

$$\rho(E)\delta^{(\alpha)} = -\sum_{1\leq j\leq r}\left(1+\frac{\lambda_j}{2}\right)(\alpha_j+1)\delta^{(\alpha)}$$

但し $\delta^{(\alpha)} = \delta_1^{(\alpha_1)}\cdots\delta_r^{(\alpha_r)}$ (δ_i は x_i に関する Dirac function)

$\therefore \quad \delta^{(\alpha)} \in \mathcal{D}'_\nu \qquad \nu = \sum_{1\leq j\leq r}\left(1+\frac{\lambda_j}{2}\right)(\alpha_j+1)$

従って $\mathcal{D}'_0(U_0) = \sum_{\xi_0\leq\xi}\mathcal{D}'_\xi$ (vector space の直和)

が成り立つ。但し $\xi_0 = \sum_{1\leq j\leq r}\left(1+\frac{\lambda_j}{2}\right)$

$\mathfrak{S}_{\chi_0} \ni \exists\sigma \neq 0$ と仮定する。$\exists \xi_1$: half integer s.t.

$\sigma_{\xi_1} \neq 0 \qquad \sigma = \sum_{\xi_1\leq\xi}\sigma_\xi$

$\mathfrak{I}(\partial p)\sigma = \chi(p)\sigma$ より $\sum_{\xi_1 \le \xi} \mathfrak{I}(\partial p)\sigma_\xi = \chi(p)\sum_{\xi_1\le\xi}\sigma_\xi$

ここで $\deg p = d$ とすると $\mathfrak{I}(\partial p)\mathcal{D}'_\xi \subset \mathcal{D}'_{\xi+d}$ より

(p を homogeneous とする。)

$d \geqq 1$ とすると $\chi(p)\sigma_{\xi_1} = 0$

$\sigma_{\xi_1} \neq 0$ より $\chi(p) = 0$ $\therefore \chi(S(\mathfrak{g}_c)^H_+) = 0$

この定理より (i)(ii)(iii) を満たすときには (i) で $\chi = 0$ の場合を考えればよいということがわかる。

次の結果を述べる前に $\mathfrak{g}$-distinguished の定義と知られている結果を述べる。

nilpotent element $x_0 \in \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}$-distinguished とは、

$\lambda_i > 0$ $(1 \leq {}^{\forall} i \leq r)$ のとき。

このとき次の結果が成り立つ。

☆ x_0 : $\mathfrak{g}$-distinguished $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{I}_0(\partial(\omega))$ の degree 2 の homogeneous part が 0 ([2] の Lemma 13)

但し ω : Casimir element i.e $\partial\omega$: pseudo-Laplacian

$\mathfrak{I}_0(\partial\omega)$ は $\mathfrak{I}(\partial\omega)$ の local expression at $0 \in U$

従って x_0 が $\mathfrak{g}$-distinguished でないと $\mathfrak{I}(\partial\omega)\sigma = \lambda\sigma$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ の解 $\sigma \in \mathcal{D}'_0(U_0)$ は 0 しかないことがわかる。

従って以後は x_0 が $\mathfrak{g}$-distinguished のときのみを扱う。

このとき van Dijk は $\mathfrak{l}(\partial\omega)$ を計算している。([2] の Theorem 14)

★ $$c\,\mathfrak{l}(\partial\omega)\sigma_T = \Big[\, 2u_1\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + n\frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{1<i\leq r}(d_i+2)u_i\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_1} + c\Big\{\sum_{1<i,j\leq r} a_{ij}(u)\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j} + \sum_{1<i\leq r} a_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}\Big\}\Big]\sigma_T$$

但し a_{ij}. a_i : U_0 上の analytic functions　$a_{ij}(0)=0$

$c=\|x_0\|$　　$n=\dim\mathfrak{g}$

この結果を用いると次の Lemma が得られる。

Lemma　x_0 : $\mathfrak{g}$-distinguished とする。

$\exists\,\sigma\neq 0$　s.t　$(\mathfrak{l}(\partial\omega)-\lambda)\sigma=0$　　$(\lambda\in\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ $\exists\,\tau\neq 0$ $\exists\,\alpha_1\geq 0$　s.t　$\sigma\equiv\delta_1^{(\alpha_1)}\tau \mod \mathcal{D}'(\alpha_1-1)$

かつ　$\mathfrak{l}(E)\tau=(\alpha_1-\frac{n}{2}+2)\tau$

但し、$\mathcal{D}'(a)=\{\sigma\in\mathcal{D}_0'(U_0)\ ;\ u_1^{a+1}\sigma=0\}$

τ は $u_2,\cdots u_r$ に関する distribution

<Proof>　$\sigma\neq 0 \Rightarrow \exists\,\tau\neq 0$ $\exists\,\alpha_1\geq 0$ s.t $\sigma\equiv\delta_1^{(\alpha_1)}\tau \mod \mathcal{D}'(\alpha_1-1)$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{l}(\partial\omega)-\lambda)\sigma &\equiv \mathfrak{l}(\partial\omega)\delta_1^{(\alpha_1)}\tau && \mod \mathcal{D}'(\alpha_1)\\ &\equiv (2u_1D_1^2 - D_1\mathfrak{l}(E)-(\tfrac{n}{2}-2))\delta_1^{(\alpha_1)}\tau && \mod \mathcal{D}'(\alpha_1)\\ &= -(\alpha_1+2)\delta_1^{(\alpha_1+1)}\tau + 2(\alpha_1+1)\delta_1^{(\alpha_1+1)}\tau - \delta_1^{(\alpha_1+1)}\mathfrak{l}(E)\tau\\ &\equiv \delta_1^{(\alpha_1+1)}\{(\alpha_1-\tfrac{n}{2}+2)-\mathfrak{l}(E)\}\tau && \mod \mathcal{D}'(\alpha_1)\end{aligned}$$

$(\mathfrak{I}(\partial\omega)-\lambda)\sigma=0$ より

$$\mathfrak{I}(E)\tau=(\alpha_1-\tfrac{n}{2}+2)\tau$$

このLemmaを使うと次の結果が得られる。($\lambda=0$ とする。)

定理2. x_0 : $\mathfrak{g}$-reguler $\Rightarrow$ $\dim \mathfrak{S}_{x_0}\le 1$

<Proof> U_0上の differential operator D_1, D_2 に対し

$\mu(D_1)(D_2)=[D_1, D_2]$ と定義する。

$\forall p\in S(\mathfrak{g}_c)^H$ に対し $\mathfrak{I}(\partial p)=(\mu(\mathfrak{I}(\partial\omega)))^d(p)$

$d=\mathrm{degree}\ p$ が成り立つことが帰納法で示される。($d\ge 1$)

$0\neq{}^\exists\sigma\in\mathfrak{S}_{x_0}$ とする。 $\mathfrak{I}(\partial\omega)\sigma=0$ より

$$0=\mathfrak{I}(\partial p)\sigma=(\mu\mathfrak{I}(\partial\omega))^d(p)\sigma=(\mathfrak{I}(\partial\omega))^d(p\sigma)$$

kに関する帰納法とLemmaより

$$(\mathfrak{I}(\partial\omega))^k p\sigma\equiv(-1)^k\prod_{1\le\nu\le k}(d-\nu+1)\,\delta_1^{(\alpha_1+k)}\,p|_{x_1=0}\tau \mod \mathcal{D}'(\alpha_1+k-1)$$

が成り立つ。従って

$$\mathfrak{I}(\partial\omega)^d p\sigma\equiv(-1)^d d!\,\delta_1^{(\alpha_1+d)}\,p|_{x_1=0}\tau \mod \mathcal{D}'(\alpha_1+d-1)$$

$\therefore\quad p|_{x_1=0}\tau=0 \quad (\forall p\in S(\mathfrak{g}_c)^H_+)\qquad \mathfrak{I}(E)\tau=(\alpha_1-\frac{n}{2}+2)\tau$ (Lemmaより)

x_0 : $\mathfrak{g}$-reguler とすると ($\mathfrak{g}$-reguler ならば $\mathfrak{g}$-distinguished である)

$r = l = \mathrm{rank}(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ で $1+\frac{\lambda_i}{2} = d_i$ (d_i は $S(\mathfrak{g}_c)^H$ の多項式環の generator $P_1, \cdots, P_l$ の degree)

が成り立つ. 更に. generator $P_1 \cdots P_l$ が. $P_j(x_0 + \sum_{1\le i\le l} u_i w_i) = u_j$ となるようにとれることから.

$$u_j \tau = 0 \quad (2 \le j \le l)$$

となる。従って $\tau = c\,\delta_2 \cdots \delta_l$ ($\underset{\neq 0}{c}$ は定数)

又 $\ell(E)\tau = -(\sum_{1\le i\le l} d_i - 2)\tau$ となるから.

$$\alpha_1 = \frac{n}{2} - \sum d_i \text{ となる。}$$

従って $\sigma = \underset{\neq 0}{c}\,\delta_1^{(\frac{n}{2}-\sum d_i)}\delta_2 \cdots \delta_l$ + (u_1 に関し微分が低次の項)

という形に書けることがわかる。

$\sigma_{x_0} \ni \exists \sigma_1 \neq 0,\ \exists \sigma_2 \neq 0$ とする。

上のことから $\sigma_1 \equiv c_1\,\delta_1^{(\frac{n}{2}-\sum d_i)}\delta_2 \cdots \delta_l \mod \mathcal{D}'(\frac{n}{2}-\sum d_i - 1)$

$\sigma_2 \equiv c_2\,\delta_1^{(\frac{n}{2}-\sum d_i)}\delta_2 \cdots \delta_l$ 〃

$$\tilde{\sigma} = c_2\sigma_1 - c_1\sigma_2 \in \mathcal{D}'(\tfrac{n}{2} - \textstyle\sum d_i - 1)$$

$\tilde{\sigma} \neq 0$ とすると 上のことから矛盾 ∴ $\tilde{\sigma} = 0$

故に $\dim \sigma_{x_0} \le 1$

(注) 上の展開からわかるように $\frac{n}{2} - \sum d_i$ は non-negative integer にならないといけないわけで. x_0 が $\mathfrak{g}$-regular

のとき $\frac{n}{2}-\sum d_i$ が non-negative integer でないときは
$\mathfrak{S}_{x_0}=\{0\}$ となることがわかる。

References

[1] Harish-Chandra, Invariant distributions on Lie algebras. Amer. J. Math., 86 (1964), 271-309.

[2] G. van Dijk, Invariant eigendistributions on the tangent space of a rank one semisimple symmetric space. Math. Ann. 268, 405-416 (1984)