

Plancherel theorem for solvable Lie groups acting
simply transitively on Siegel domains

京大理 野村隆昭 (Takaaki NOMURA)

序. 可分ユニモジュラー局所コンパクト群の一般論としての Plancherel 公式は, 1950 年前後に Segal や Mautner によって確立され, その後各論 (type I の群) において具体的な Plancherel 測度の記述がなされていった. 一方, 可解 Lie 群の多くや半単純 Lie 群の放物型部分群などはユニモジュラーではない. 必ずしもユニモジュラーではない局所コンパクト群 G の Plancherel 公式については, Kohari [12] の $ax+b$ 群への先駆的な仕事の後, Tatsuuma [26], Kleppner and Lipsman [11, §6], Duflo and Moore [5] によって 1970 年代前半に, その一般論としての基礎が確立された. 簡単のため $G \in \text{type I}$ とし, 一般論への (非ユニモジュラー) Plancherel 定理を述べよう. まず用語の説明. $(\pi, \mathcal{H}) \in G$ のユニタリ表現, $\chi \in G$ の character (必ずしもユニタリとは限らない) とする. $\mathcal{H}$ を稠密に定義された閉作用素 T が π に

対して, semi-invariant with weight χ であるとは

$$\pi(q)T \subset \chi(q)T\pi(q) \quad \forall q \in G$$

が成り立つことである. 以下 $L^p(G)$ ($1 \leq p < \infty$) は G の ^{Haar}左測度 dq を考え, また Δ を G のモジュラー函数 ($d(qx) = \Delta(x)dq$) とする.

Plancherel 定理. $\hat{G}$ 上の standard Borel 測度 μ , G のユニタリ表現の μ -可測族 $(\pi_\zeta, \mathcal{H}_\zeta)_{\zeta \in \hat{G}}$ を $\pi_\zeta \in \mathcal{S}$, μ -a.e. $\zeta \in \hat{G}$ となるものとして非負かつゼロでない (必ずしも有界でない) 自己共役作用素の μ -可測族 $(K_\zeta)_{\zeta \in \hat{G}}$ を μ -a.e. $\zeta \in \hat{G}$ について K_ζ は π_ζ に対して semi-invariant with weight Δ^{-1} なるものが存在して, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ のとき, $\pi_\zeta(f) K_\zeta^{1/2}$ は μ -a.e. $\zeta \in \hat{G}$ について $\mathcal{H}_\zeta$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素に拡張される. その拡張された Hilbert-Schmidt 作用素を $\mathcal{P}_\zeta(f)$ とかく.

(ii) 写像 $L^1(G) \cap L^2(G) \ni f \mapsto (\mathcal{P}_\zeta(f))_{\zeta \in \hat{G}}$ は $L^2(G)$ から $\bigoplus_{\hat{G}} B_2(\mathcal{H}_\zeta) d\mu(\zeta)$ の上へのユニタリな写像に拡張される.

ここに $B_2(\mathcal{H}_\zeta)$ は $\mathcal{H}_\zeta$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素全体のなす Hilbert 空間である.

$(K_\zeta)_{\zeta \in \hat{G}}$ はスカラー場 $(c_\zeta)_{\zeta \in \hat{G}}$ を除いて一意に決まる.

$K_{\zeta}^{1/2} d\mu(\zeta)$ と G の Plancherel 測度という. $U =$ モジュラー群
 では $\Delta(x) = 1$ ($\forall x \in G$) であり, 従って μ -a.e. $\zeta \in \hat{G}$ につい
 て K_{ζ} と $\mathcal{H}_{\zeta}$ 上の恒等作用素ととれる. このとき, 上の Plancherel
 定理は, $U =$ モジュラー群のそれと一致する. 各論において
 は K_{ζ} の具体的な表示が問題であり, さらに K_{ζ} と, $L^2(G)$ 上
 のある非負の "大域的" 作用素 K と, $\text{Ad}(g)f(x) = \Delta(g)^{1/2} f(g^{-1}xg)$
 なる $U =$ タリ表現 $(\text{Ad}, L^2(G))$ に対して semi-invariant
 with weight Δ^{-1} なるものの "infinitesimal component" とし
 てとらえ (一般論では quasi-Hilbert 環での議論にもち込
 む, cf. [11]), K と実際に求めることも重要な問題である
 ($\rightarrow$ 半単純 Lie 群の放物型部分群に対する Lipsman と Wolf
 の project [15], [16], [9], [28] あるいは可解 Lie 群での
 [3], [6], [17], [23, Chapter IV] 参照)

本稿では [20] ([19] も参照) を扱った (完全) 可解 Lie 群に
 対して Plancherel 定理を述べる. 開余随伴軌道の parametriza-
 tion と [20] ([19]) を与えておいたから, Plancherel 定理
 は, 原理的には, たとえば Duflo et Rais [6, p.132] から書
 き下すことができる. しかしながら, 応用上の観点 (たとえ
 ば L^p -Fourier 解析) からは, explicit に実現された既約表
 現を通して, $L^2(G)$ の分解を実際に書き下すことも意味があ
 る.

§1. 準備. 本稿を扱う群の構造を簡単にまとめおく. $\mathfrak{g}$ は有限次元の実 Lie 代数, j は $\mathfrak{g}$ 上の実線型作用素を $j^2 = -1_{\mathfrak{g}}$ をみたすもの, そして $\omega \in \mathfrak{g}^*$ とする. 次の (i) ~ (iii) がみたされるとき, 3-組 $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ は 正規 j -代数 (normal j -algebra) という.

(i) $\mathfrak{g}$ は完全可解.

(ii) j は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の複素線型作用素に自然に拡張し, $\mathfrak{g}^-$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ における j の固有値 $-i$ に対応する固有空間とすると, $\mathfrak{g}^-$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分代数である.

$$(iii) \quad \begin{cases} \omega([jx, jy]) = \omega([x, y]) & \forall x, y \in \mathfrak{g} \\ \omega([x, jx]) > 0 & \forall x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\} \end{cases}$$

さて, $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ を正規 j -代数とする. $\mathfrak{g}$ はベクトル空間として, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(\frac{1}{2}) \oplus \mathfrak{g}(1)$ と直和に分解され, 各 $\mathfrak{g}(k)$ の間には次の関係が成り立つ.

$$(1) \quad [\mathfrak{g}(k), \mathfrak{g}(m)] \subset \mathfrak{g}(k+m).$$

ただし, $k > 1$ のとき, $\mathfrak{g}(k) = \{0\}$ とみなす. 特に $\mathfrak{g}(0)$ は $\mathfrak{g}$ の部分代数であり, $\mathfrak{g}(1)$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分代数である. さらに

$$(2) \quad j\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{g}(1), \quad j\mathfrak{g}(\frac{1}{2}) = \mathfrak{g}(\frac{1}{2})$$

が成り立つ. 従って, $\dim \mathfrak{g}(0) = \dim \mathfrak{g}(1)$ (よって $\dim \mathfrak{g}(\frac{1}{2})$ は偶数 (0 になることもある)) である. $G = \exp \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ は Lie 代数にもつ連結かつ単連結な Lie 群) とすると, G は正規 j -代数

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}, \omega)$ から構成されるある Siegel 領域 D に単純かつ推移的に働く. この群 G の Plancherel 定理と具体的に書き下すのが本稿の目的である. 正規う代数の階数が 1 のとき, G は $SU(n+1, 1)$ ($n=0, 1, 2, \dots$; $2n = \dim \mathfrak{g}(\frac{1}{2})$) の岩沢部分群 AN (通常の記号法で) となり, 特に $ax+b$ 群は本稿の G の最も primitive な例である.

$$\mathfrak{n}(D) = \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(\frac{1}{2})$$

とおくと, 関係式 (i) より, $\mathfrak{n}(D)$ は $\mathfrak{g}$ の高々 2-step のベキ零部分代数であることがわかる. そして, $G(0) = \exp \mathfrak{g}(0)$, $N(D) = \exp \mathfrak{n}(D)$ とおくと, $G = N(D) \rtimes G(0)$ と半直積に表される. $N(D)$ が可換のとき (これは Siegel 領域 D が tube 領域になることと同値), G の Plancherel 定理は Mackey machine により容易に導ける (cf. [11]) から, 以下 $N(D)$ は非可換, 従って 2-step ベキ零であるとする. また簡単のため, $V = \mathfrak{g}(\frac{1}{2})$ とおく. $N(D)$ の各要素を $n(a, b)$ ($a \in \mathfrak{g}(1)$, $b \in V$) と表すと, 群演算は

$$n(a, b)n(a', b') = n(a+a'+2A(b, b'), b+b')$$

$$(3) \quad \text{ただし, } A(b, b') = \frac{1}{4}[b, b'] \quad (b, b' \in V)$$

G の Plancherel 定理と具体的に導くためには (特に逆変換の定義), $N(D)$ の Plancherel 公式が必要となる. §1 では, $N(D)$ の Plancherel 公式と, 各表現の具体的実現には触れない形を

書くにとどめる. まず, $A \in (3)$ の如くとし,

$$\Xi = \{ \lambda \in \mathfrak{g}(1)^* ; \lambda \circ A \text{ は非退化} \}$$

とおくと, $\Xi \neq \emptyset$ ($\because \omega|_{\mathfrak{g}(1)} \in \Xi$) ゆえ Ξ は $\mathfrak{g}(1)^*$ の稠密開集合である. $\pi(D)^* = \mathfrak{g}(1)^* \oplus V^*$ なる分解を一つに $\Xi \hookrightarrow \pi(D)^*$ と考えらる.

補題 1.1. $\lambda \in \Xi$ のとき, $N(D) \cdot \lambda = \lambda + V^*$

$\sigma_{N(D)} : \pi(D)^*/N(D) \rightarrow N(D)^\wedge$ を Kirillov 対応とする.

$\sigma_{N(D)}$ は全単射 (実は位相同型) である. さて, $\mathfrak{g}$ には実の内積 $\omega([x, y])$ が入るから, ω を $\pi(D)$ に制限して, $\pi(D)$ の実内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を得る. $A \in (3)$ の如くとし, 各 $\lambda \in \mathfrak{g}(1)^*$ に対して, V 上の歪対称線型作用素 A_λ を

$$\langle A_\lambda x, y \rangle = \lambda(A(x, y)) \quad (x, y \in V)$$

で定義し

$$(4) \quad P(\lambda) = (\det A_\lambda)^{1/2}$$

とおく. 明らかに, $\lambda \in \Xi$ のとき, $P(\lambda) \neq 0$ である. $\rho_\lambda \in \sigma_{N(D)}(N(D) \cdot \lambda)$

($\lambda \in \Xi$) を一つの実現とし, 各 $f \in C_c^\infty(N(D))$ に対して

$$\rho_\lambda(f) = \int_{N(D)} f(n) \rho_\lambda(n)^{-1} dn \quad (dn \text{ は } N(D) \text{ の Haar 測度})$$

とおく.

命題 1.2. $N(D)$ の Haar 測度 dn と $\mathcal{G}(1)^*$ の Lebesgue 測度 $d\lambda$ の適当な正規化のもとに

$$f(e) = \int_{\mathbb{R}} [T_n \rho_\lambda(f)] P(\lambda) d\lambda \quad (f \in C_c^\infty(N(D)))$$

§2. $N(D)$ の Fock 表現. G の Plancherel 定理を具体的に導き出すためには、命題 1.2 の ρ_λ を具体的に実現しておく必要がある (命題 1.2 では trace をとっているの、 ρ_λ の実現に依存しない形になっている)。§2 では、§4 を必要とする $N(D)$ の既約ユニタリ表現の実現を少し一般化して述べることにする。

V 上の実線型作用素 J で $J^2 = -I_V$ となるものと V 上の複素構造という。この J と $V_{\mathbb{C}}$ 上の複素線型作用素に自然に拡張し、 $V_{\mathbb{C}}(J; -i)$ を $V_{\mathbb{C}}$ における J の $-i$ 固有空間を表す。

$$(5) \quad \mathcal{O}_J = \mathcal{G}(1)_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}}(J; -i)$$

とおくと、 $\mathcal{O}_J$ は $\pi(D)_{\mathbb{C}}$ の部分代数であり、 $\mathcal{O}_J + \overline{\mathcal{O}_J} = \pi(D)_{\mathbb{C}}$ であることが容易にわかる。

さて、 $\lambda \in \mathbb{R}$ と固定しよう。 V 上の複素構造 J が λ -認容 であるとは

$$(6) \quad \lambda([Jx, Jy]) = \lambda([x, y]) \quad \forall x, y \in V$$

が成り立つときをいう。 A を (3) のものとする、 $\lambda \circ A$ は V 上の非退化歪対称双一次形式であるから、(6) は J が symplectic

群 $Sp(V, \lambda \circ A)$ に属すると行うことである。

補題 2.1. $\lambda \in \mathbb{C}$ とし, J を V 上の複素構造とする. 部分代数 $\mathcal{Q}_J$ が λ に従属するための必要十分条件は, J が λ -認容なることである. このとき, $\mathcal{Q}_J$ は λ における totally complex polarization である.

さて, J を λ -認容な V 上の複素構造とする. J によって V を複素ベクトル空間とみなしたものを (V, J) と表す. 今

$$(7) \quad \mathcal{Q}_{\lambda, J}(z, w) = \lambda(A(Jz, w)) + i\lambda(A(z, w)) \quad (z, w \in V)$$

とおくと, $\mathcal{Q}_{\lambda, J}$ は (V, J) 上のエルミート sesqui-linear form になる.

補題 2.2. $\lambda \in \mathbb{C}$ とし, J を V 上の λ -認容な複素構造とする. このとき, λ における polarization $\mathcal{Q}_J$ が正であるための必要十分条件は $\mathcal{Q}_{\lambda, J}$ が負定値となることである.

注意 2.3. 各 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, V 上の λ -認容な複素構造 J に対して $\mathcal{Q}_{\lambda, J}$ が負定値となるものの全体を $\mathcal{S}_\lambda$ と書く. $\mathcal{S}_\lambda$ は symplectic vector space $(V, \lambda \circ A)$ に付随する Siegel 空間で, 自然に複素多様体の構造が入る. 実際 $\mathcal{S}_\lambda \approx Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$ である.

あり, $\mathcal{H}_\lambda$ はエルミート対称空間である (cf. Satake [25, II章, §7]).

以下 $Q_{\lambda, J}$ は負定値とする. このとき, 補題 2.2 より $\mathcal{O}_J$ は正の polarization 故複素解析的誘導表現 $T(\lambda; \mathcal{O}_J)$ が構成できる: 表現空間 $\mathcal{H}(\lambda; \mathcal{O}_J)$ は, 次の (i), (ii) とみたす $N(D)$ 上の C^∞ 函数 f のなす空間の完備化 (条件 (iii) の積分を定めるノルムについて) である.

$$(i) \quad Yf = -i\lambda(Y)f \quad \forall Y \in \mathcal{O}_J$$

(ここで Y は $N(D)$ 上の左不変微分作用素とみている)

$$(ii) \quad \int_{N(D)/G(1)} |f(n)|^2 d\bar{n} < +\infty \quad \left(\begin{array}{l} d\bar{n} \text{ は } N(D)/G(1) \text{ 上の} \\ N(D)\text{-不変測度} \end{array} \right)$$

そして表現は左移動を与えられる.

一方, $\mathcal{H}_{\lambda, J}$ を複素ベクトル空間 (V, J) 上の正則函数 F を

$$\|F\|_{\lambda, J}^2 := \int_V |F(v)|^2 \exp 2Q_{\lambda, J}(v, v) dv < +\infty$$

(dv は V 上の Lebesgue 測度) とみたすもののなる Hilbert 空間とする. $Q_{\lambda, J}$ を負定値と仮定してゐるので $\mathcal{H}_{\lambda, J}$ は非空である.

命題 2.4. $\lambda \in \mathfrak{h}$, $J \in V$ 上の λ -認容な複素構造を $Q_{\lambda, J}$ は負定値とする. このとき, 次の (i), (iii) が成り立つ.

(i) $\{0\} \neq \mathcal{G}(\lambda; \mathcal{Q}_J) \subset C^\infty(N(D))$ (i.e. $\mathcal{G}(\lambda; \mathcal{Q}_J)$ の定義において, 完備化は必要なかった).

(ii) $I_{\lambda, J} f(v) = f(n(0, v)) \exp -Q_{\lambda, J}(v, v)$ ($f \in \mathcal{G}(\lambda; \mathcal{Q}_J)$, $v \in V$) とおくと, $d\bar{n}$ と dv の適当な正規化をすることにより, $I_{\lambda, J}$ は $\mathcal{G}(\lambda; \mathcal{Q}_J)$ から $\mathcal{F}_{\lambda, J}$ の上へのユニタリな写像になる.

この命題によって, $\mathcal{F}_{\lambda, J}$ 上には $N(D)$ のユニタリ表現 $U_{\lambda, J}$ が得られる. 表現作用素は

$$U_{\lambda, J}(n(a, b))F(v) = e^{i\lambda(a)} \exp[-2Q_{\lambda, J}(v, b) + Q_{\lambda, J}(b, b)] \cdot F(v-b)$$

こうして得られたユニタリ表現 $(U_{\lambda, J}, \mathcal{F}_{\lambda, J})$ と V 上の複素構造 J に対応する $N(D)$ の Fock 表現 という. ベキ零 Lie 群の複素解析的誘導表現の一般論により, $U_{\lambda, J}$ は既約であり, その同値類 $[U_{\lambda, J}]$ は $\sigma_{N(D)}(N(D) \cdot \lambda)$ である. 特に, $[U_{\lambda, J}]$ は J に依らない.

さて, J_1, J_2 を V 上の λ -認容 ($\lambda \in \mathbb{C}$) 複素構造で, Q_{λ, J_1} も Q_{λ, J_2} も負定値であるとす. このとき, U_{λ, J_1} と U_{λ, J_2} はユニタリ同値である. この二つの表現の間の *intertwining* 作用素は次で与えられる: $f_{21}(\lambda): \mathcal{F}_{\lambda, J_1} \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda, J_2}$

$$f_{21}(\lambda)F(v_0) = \int_V F(v) \exp[Q_{\lambda, J_1}(v, v) + Q_{\lambda, J_2}(v, v) - 2Q_{\lambda, J_2}(v_0, v)] dv$$

適当な正の数 $\alpha_1(\lambda)$ により, $\alpha_1(\lambda)f_{21}(\lambda)$ はユニタリ作用素になる.

§3. $L^2(N(D))$ の分解. $J: \Xi \ni \lambda \mapsto J(\lambda)$ は V 上の実線型作用素に値をとる Borel 函数で, 次の (i), (ii) をみたすものとする.

- (i) 各 $\lambda \in \Xi$ に対して, $J(\lambda)$ は λ -認容な V 上の複素構造
- (ii) 各 $\lambda \in \Xi$ に対して, $\mathcal{H}_{J(\lambda)} := \mathcal{H}(1)_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}}(J(\lambda))$; (i) は λ における正の polarization.

このとき, $N(D)$ の既約ユニタリ表現の族 $(U_{\lambda, J(\lambda)}, \mathcal{F}_{\lambda, J(\lambda)})_{\lambda \in \Xi}$ を得るが, これが $\mathcal{H}(1)^*$ 上の Lebesgue 測度 $d\lambda$ に関して可測であることが示される. 従って, $\mathcal{F}_{\lambda, J(\lambda)}$ を $d\lambda$ に関して直積分することが出来る. $P(\lambda)$ を (4) で定義されたものとし, Hilbert 空間 $\mathcal{L}^2(\Xi; J)$ を

$$\mathcal{L}^2(\Xi; J) = \int_{\Xi}^{\oplus} \mathcal{B}_2(\mathcal{F}_{\lambda, J(\lambda)}) P(\lambda) d\lambda$$

を定義する.

命題 2.4. $L^2(N(D))$ から $\mathcal{L}^2(\Xi; J)$ の上へのユニタリな写像 Φ で, $f \in L^1(N(D)) \cap L^2(N(D))$ に対して

$$\Phi f(\lambda) = U_{\lambda, J(\lambda)}(f) := \int_{N(D)} f(n) U_{\lambda, J(\lambda)}(n)^{-1} dn$$

となるものが存在する.

§4. G の Plancherel 定理. まず (1) により $G(0)$ は $\mathfrak{g}(1)^*$ に作用し、従ってその反作用 $G(0)$ は $\mathfrak{g}(1)^*$ に作用する. この作用での $\mathfrak{g}(1)^*$ における開 $G(0)$ 軌道は $\mathcal{X} := \{-1, 1\}^l$ (l は正規化代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}, \omega)$ の階数) で parametrize される. $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l) \in \mathcal{X}$ に対応する開 $G(0)$ 軌道を O_η で表す. そして, $\mathfrak{g}(1)^*$ における $G(0)$ 軌道で開集合でないものは次元が $\dim \mathfrak{g}(1)^*$ より真に低い. また, $\mathfrak{g}^*$ の G の開余随伴軌道も $\mathcal{X}$ で parametrize される. $\eta \in \mathcal{X}$ に対応する開余随伴軌道を Θ_η で表す. 実は, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}(0)^* \oplus \mathfrak{g}(1/2)^* \oplus \mathfrak{g}(1)^*$ なる自然な分解のもとで

$$O_\eta \longleftrightarrow \Theta_\eta = \mathfrak{g}(0)^* + \mathfrak{g}(1/2)^* + O_\eta$$

なる一対一対応になっている. これらの開軌道達の完全代表系をうまく形できとり出すためには, $\mathfrak{g}$ の構造にもう少し立ち入る必要がある.

$\pi = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とし (一般に $\pi \subset \pi(0)$), 内積 $\omega([x, y], z)$ に関する $\mathfrak{g}$ の π の直交補空間を $\pi^\perp$ とすると, $\pi^\perp$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分代数となり, 随伴表現の制限によって得られる $\pi^\perp$ の π 上への表現は対角化可能である. 各同時固有空間を π_α ($\alpha \in \pi^*$) とする. このとき, $\bigcup \pi_\alpha \subset \pi^\perp$ となる $\alpha \in \pi^*$ は l 個 (l は $\mathfrak{g}$ の階数) あり, これを $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ とする (本稿においては番号付けは任意でよい). $\dim \pi_{\alpha_k} = 1$ ($1 \leq k \leq l$) であり, $[\mathfrak{j}u_k, u_k] = u_k$ となる 0 でない元 $u_k \in \pi_{\alpha_k}$ が一意的に存在する. $u_k \in$

$\mathcal{U}(1)^*$ を $u_k^*(u_m) = \delta_{km}$, $u_k^*|_{\pi_\alpha} = 0$ ($\alpha \neq \alpha_k$ ($1 \leq k \leq l$), $\pi_\alpha \subset \mathcal{U}(1)$) で定義する. 各 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l) \in \mathcal{X}$ に対して, $\lambda_\eta = \sum_{k=1}^l \eta_k u_k^* \in \mathcal{U}(1)^*$ とおくと, この λ_η 達が, $\{0_\eta\}_{\eta \in \mathcal{X}}$ 及び $\{\theta_\eta\}_{\eta \in \mathcal{X}}$ の完全代表系となる.

さて (2) により, V は 0 を安定点であるから, $V \subseteq \mathfrak{u}|_V$ を複素ベクトル空間とみなせる. この $(V, \mathfrak{u})$ で表す. 複素ベクトル空間 $(V, \mathfrak{u})$ にはエルミート内積

$$(x, y) = \omega([x, \mathfrak{u}y]) - i\omega([x, y]) \quad (x, y \in V)$$

が入る. 各 η に対して, $(V, \mathfrak{u})$ 上の自己共役作用素 H_η を

$$(H_\eta z, w) = \lambda_\eta(A(\mathfrak{u}z, w)) + i\lambda_\eta(A(z, w))$$

で定める. 容易に H_η は可逆であることがわかる. $|H_\eta| = (H_\eta^2)^{1/2}$ とおいて, $(V, \mathfrak{u})$ 上の複素線型作用素 $\mathfrak{u}_\eta$ を

$$\mathfrak{u}_\eta = -i |H_\eta|^{-1} H_\eta$$

によって定義する. $\mathfrak{u}_\eta$ は V 上の実線型作用素とみると, $\mathfrak{u}_\eta$ は $\mathfrak{u}|_V$ と可換な V 上の複素構造である. そして, $\mathfrak{u}_\eta$ は λ_η -認容であり, (7) で $\lambda = \lambda_\eta$, $J = \mathfrak{u}_\eta$ として得られる $Q_{\lambda_\eta, \mathfrak{u}_\eta}$ は負定値になることが確かめられる. 実際 $Q_{\lambda_\eta, \mathfrak{u}_\eta}(z, z) = -(|H_\eta| z, z)$ である. さて, 各 $g \in G(0)$ と $\eta \in \mathcal{X}$ に対して,

$$J(g, \eta) = (\text{Ad}_V g) \circ \mathfrak{u}_\eta \circ (\text{Ad}_V g)^{-1}$$

とおく.

補題 4.1. $J(g, \eta)$ は $g \cdot \lambda_\eta$ -認容な V 上の複素構造であり,
 $Q_{g, \eta} := Q_{g \cdot \lambda_\eta, J(g, \eta)}$ は負定値である.

$\Xi \setminus \bigcup_{\eta \in \Xi} O_\eta \subset \mathfrak{g}(1)^*$ の Lebesgue 測度は 0 であり, 各 $\eta \in \Xi$ に対して, $G(0) \ni g \mapsto J(g, \eta)$ は明らかに連続だから, $G(0)$ の左 Haar 測度 $d\mu_L$ と有限集合 Ξ 上の counting 測度に関して可測な $N(D)$ の Fock 表現の族 $\{(U_{g, \eta}, \mathcal{F}_{g, \eta}) : g \in G(0), \eta \in \Xi\}$ (ただし, $U_{g, \eta} := U_{g \cdot \lambda_\eta, J(g, \eta)}$, $\mathcal{F}_{g, \eta} := \mathcal{F}_{g \cdot \lambda_\eta, J(g, \eta)}$) を得る.

$\dim \mathfrak{g}(0) = \dim \mathfrak{g}(1)^*$ と $G(0)$ が完全可解なることより, 各 $\eta \in \Xi$ に対して, $G(0)$ と O_η が微分同型であることに注意して, 命題 2.4 と今構成した族 $(U_{g, \eta}, \mathcal{F}_{g, \eta})$ に適用すると次の様になる.

命題 4.2. $\delta(g) = (\det \text{Ad}_{\text{row}} g)^{-1}$ ($g \in G(0)$) とおく. $G(0)$ の左 Haar 測度 $d\mu_L$ を適当に正規化すると,

$$L^2(N(D)) \cong \sum_{\eta \in \Xi} \int_{G(0)}^{\oplus} B_2(\mathcal{F}_{g, \eta}) \delta(g) d\mu_L(g) \quad \text{such that}$$

$$\pi f(g, \eta) = U_{g, \eta}(f) \quad \text{for all } f \in L^1(N(D)) \cap L^2(N(D)).$$

各 $g_0 \in G(0)$ と V 上の函数 F に対して

$$\mathcal{R}(g_0)F(v) = (\det \text{Ad}_v g_0)^{-1/2} F(g_0^{-1} \cdot v)$$

とおく. $J(g, \eta)$ の定義から直ちに

$$(Ad_V g_1) \circ J(g_2, \eta) = J(g_1 g_2, \eta) \circ (Ad_V g_1) \quad (g_1, g_2 \in G(0), \eta \in \mathcal{X})$$

がわかるから次の補題が示される.

- 補題 4.3. (i) 各 $g, g_0 \in G(0)$, $\eta \in \mathcal{X}$ に対して, $\mathcal{R}(g_0)$ は $\mathcal{F}_{g, \eta}$ から $\mathcal{F}_{g_0 g, \eta}$ の上へのユニタリ変換を引き起こす.
 (ii) $\mathcal{R}(g_0) U_{g, \eta}(n(g_0^{-1} \cdot a, g_0^{-1} \cdot b)) = U_{g_0 g, \eta}(n(a, b)) \mathcal{R}(g_0)$

V 上恒等的に 1 なる函数を $\mathbb{1}$ で表すと, 任意の $g \in G(0)$ と $\eta \in \mathcal{X}$ に対して, $\mathbb{1} \in \mathcal{F}_{g, \eta}$ である. そして,

$$\mathcal{R}(g_0) \left(\frac{\mathbb{1}}{\|\mathbb{1}\|_{g, \eta}} \right) = \frac{\mathbb{1}}{\|\mathbb{1}\|_{g_0 g, \eta}} \quad (g_0, g \in G(0), \eta \in \mathcal{X})$$

が成り立つ. 今,

$$A(\mathcal{F}_{g, \eta}) = \{T \in \mathcal{B}_2(\mathcal{F}_{g, \eta}) : \text{Range } T \subset \mathbb{C}\mathbb{1}\}$$

とおくと, $(g, \eta) \mapsto A(\mathcal{F}_{g, \eta})$ も, $G(0)$ の左 Haar 測度 $d\mu_L$ と有限集合 $\mathcal{X}$ 上の counting 測度に関して可測な Hilbert 空間の場合となる. そこで

$$\mathcal{L}_\eta^2(G(0); A) = \int_{G(0)}^{\oplus} A(\mathcal{F}_{g, \eta}) \delta(g) d\mu_L(g)$$

とおく. $\mathcal{L}_\eta^2(G(0); A)$ 上に $G = N(0) \rtimes G(0)$ のユニタリ表現 π_η を

$$\pi_\eta(n)F(x) = F(x)U_{x,\eta}(n)^{-1} \quad (n \in N(D))$$

$$\pi_\eta(g)F(x) = \delta(g)^{-1/2} \mathcal{R}(g)F(g^{-1}x)\mathcal{R}(g)^{-1} \quad (g \in G(0))$$

で定義できる. $\sigma_G: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$ を Kirillov - Bernat 対応とする.

命題 4.4. π_η は既約であり, その同値類は $\sigma_G(\theta_{-\eta})$ である.

この命題は $\pi_\eta \cong \text{Ind}_{N(D)}^G U_{e,-\eta}$ なることを示し, 誘導表現の階段定理を適用して証明する.

G の左 Haar 測度 dq は次式で与えられる.

$$\int_G f(q) dq = \int_{N(D)} dn \int_{G(0)} f(nq_0) \delta(q_0) d\mu_L(q_0)$$

また, G のモジュラー関数 Δ は $\Delta(q) = (\det \text{Ad}_q)^{-1}$ で与えられ, $d(qx) = \Delta(x) dq$ ($x \in G$), $d(q^{-1}) = \Delta(q^{-1}) dq$ が成り立つ. よて

$$\mathcal{E}_\eta = \int_{G(0)}^\oplus A(F_{g,\eta}) d\mu_L(g)$$

とおくと, $F(x) \mapsto \delta(x)^{1/2} F(x)$ により, $\mathcal{L}_\eta^2(G(0); A) \cong \mathcal{E}_\eta$. 上で定義した G のユニタリ表現 π_η とこのユニタリ写像で $\mathcal{E}_\eta$ に移したものを Π_η とする. Π_η は次式で与えられる.

$$\pi_\eta(n)F(x) = F(x)U_{x,\eta}(n)^{-1} \quad (n \in N(D))$$

$$\pi_\eta(g)F(x) = \mathcal{R}(g)F(g^{-1}x)\mathcal{R}(g)^{-1} \quad (g \in G(O))$$

各 $f \in L^1(G)$ に対し

$$\pi_\eta(f) = \int_G f(g) \pi_\eta(g) dg$$

とおく, $(\pi_\eta(f))_{\eta \in \mathcal{X}}$ を f の Fourier 変換という. $\mathcal{X}$ = モジュラ一群の場合と違って, $f \in C_c^\infty(G)$ としても, $\pi_\eta(f)$ は必ずしもコンパクト作用素とは限らない. $\mathcal{H}_\eta$ 上の作用素 M_η を

$$M_\eta F(x) = \Delta(x)^{1/2} F(x)$$

で定義する. M_η の定義域は, $\int_{G(O)} \Delta(x) \|F(x)\|_{x,\eta}^2 d\mu_2(x) < \infty$ なる $F \in \mathcal{H}_\eta$ 全体のなる部分空間である. このとき, M_η は (非有界な) 正の自己共役作用素で, 任意の複素数 λ に対して, M_η^λ は, π_η に対して semi-invariant with weight $\Delta^{-\lambda/2}$ となることを検証できる. この M_η を用いて

$$\mathcal{P}_\eta(f) = \pi_\eta(f) M_\eta \quad (f \in L^1(G) \cap L^2(G))$$

とおき, $(\mathcal{P}_\eta(f))_{\eta \in \mathcal{X}}$ を f の Plancherel 変換 と呼ぶ

定理 (i) $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ のとき, $\mathcal{P}_\eta(f)$ は $\mathcal{H}_\eta$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素に拡張される. 拡張された作用素も同じ $\mathcal{P}_\eta(f)$ を表す.

(ii) $\ell^2(\mathcal{X}) \cong \{S = (S_\eta)_{\eta \in \mathcal{X}}; S_\eta \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\eta)\} \cong \bigoplus_{\eta \in \mathcal{X}} \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_\eta)$ と

おくと, $L^1(G) \cap L^2(G) \ni f \mapsto (\mathcal{P}_\eta(f))_{\eta \in \mathcal{X}}$ は $L^2(G)$ から $\ell^2(\mathcal{X})$ の上へのユニタリな写像に拡張できる.

注意. (i) Duflo et Raïs [6, Théorème 5.3.4] により, ユニタリ表現 $(\Pi_\eta, \mathcal{E}_\eta)$ ($\eta \in \mathcal{X}$) はすべて (G) 上二乗可積分である.

(ii) 序で述べた "大域的" 作用素 K (Lipsman and Wolf [15] ではこれを Dixmier-Pukanszky 作用素と呼んでいる) は一般の Lie 群では必ずしも群上の擬微分作用素としての実現は期待できない ($\mathbb{R}^n \rtimes GL(n, \mathbb{R})$ に対しては Wolf [27, §6] 参照). 一方, 可解 Lie 群では, Pukanszky [23, Theorem 4, p.593] (see also Moore [17, Theorem 34]) により, Lie 代数の最大中零イデアルの包絡環の中心の商体からとれることがわかっていく.

(iii) 注意 (i) と Duflo and Moore [5] に従って, 作用素 M_η^2 と二乗可積分表現 $(\Pi_\eta, \mathcal{E}_\eta)$ の 形式的次数 と呼ぶ. 以下この命名の妥当性を検討しよう. 各 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ に対して, $\mathfrak{g}$ 上の歪対称双一次形式 $\mathcal{C}_\lambda(x, y) := \lambda([x, y])$ を考える. 開余随伴軌道が存在するから, $\mathfrak{g}^*$ のある稠密開集合に属する λ に対して, $\mathcal{C}_\lambda$ は非退化である. G と $\mathfrak{g}$ は微分同型であるから, G の Haar 測度は $p(X)dX$ (dX は $\mathfrak{g}$ 上の Lebesgue 測度 $p \in C^\infty(\mathfrak{g})$) による.

る形で表される. $e_1, \dots, e_{2d}$ を $\mathfrak{g}$ の基底と $e_1, \dots, e_{2d}$ を張る
 凸体の体積は 1 とする. $e_1^*, \dots, e_{2d}^*$ とその $\mathfrak{g}^*$ における
 双対基底とする. $\mathfrak{g}^*$ 上の函数 $D(\lambda)$ と $D(\lambda) e_1^* \wedge \dots \wedge e_{2d}^* =$
 $\wedge^d \phi_\lambda$ で定める. $D(\lambda)$ は, 歪対称双一次形式 ϕ_λ の (基底 $e_1, \dots,$
 e_{2d} に関する) Pfaffian とある. 特に, D は $\mathfrak{g}^*$ 上の多項式
 函数, 従って $\mathfrak{g}$ の symmetric algebra $S(\mathfrak{g})$ に属する. $\varphi:$
 $S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ と canonical bijection とし, φ による D の
 $U(\mathfrak{g})$ における像を u とする. 容易にわかる様に

$$(Adg)D = (\det Adg)D = \Delta(g)^{-1}D \quad (g \in G)$$

であり, φ は G -equivariant 故, $(Adg)u = \Delta(g)^{-1}u$ とな
 る. 従って, $d\pi_\eta$ と π_η の微分 (C^∞ ベクトル上) とすると

$$\pi_\eta(g) d\pi_\eta(u) \pi_\eta(g)^{-1} = d\pi_\eta((Adg)u) = \Delta(g)^{-1} d\pi_\eta(u)$$

ゆえに, $d\pi_\eta(u)$ の閉包の絶対値 T_η も π_η に対して, semi-
 invariant with weight Δ^{-1} とある. 正の character に対す
 る非負自己共役 semi-invariant 作用素の一意性 ([5, Lemma
 1]) から, M_η^2 と T_η は定数倍しか違わない (Duflot et Raïs [6,
 Prop. 5.3.10]).

コンパクト Lie 群の Weyl の次元公式は次の様に解釈でき
 る. Cartan 部分代数を固定し, π と Λ を最高ウェイトとする
 既約表現とする. ρ を正のルートの和の半分として, $\Lambda + \rho$
 と, 各ルート空間を 0 とし, $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上の一次形式に拡張する.

このとき, $-i(1+\rho)([X, Y])$ ($X, Y \in \mathfrak{g}$) の Pfaffian を Weyl 基底を利用して計算し, その絶対値をとると, よく知られた形 $\prod_{\alpha > 0} (\lambda + \rho, \alpha) / (\rho, \alpha)$ になる.

本稿の命題 1.2 に現れた $P(\lambda)$ も pfaffian の絶対値という形であることに注意. べき零リ一群の場合 Moore and Wolf [18, Theorem 5], ユニモジュラー可解リ一群, Rosenberg [24, 4.10] や Charbonnel [3, II, V.2] 参照.

訂正. この機会に [19] の誤りを訂正しておく.

原稿 22 ページ ↓ 6 行目: unitary intertwining operator $\rightarrow$ bounded intertwining operator. (そして, この作用素がゼロでないこともわかる. 詳しくは [20, §2.3] 参照)

原稿 23 ページ, 補題 5: $\psi_{g,\eta}$ の正しい表示は (g と η に無関係な正の定数を除いて)

$$\psi_{g,\eta}(v) = [\det \text{Ad}_v g]^{-1} \cdot |\det A_{g,\eta}|^{-1/2} \times$$

$$\times \exp [2Q_\lambda(v', v') + 2Q_{g,\eta}(v', v') - Q_{g,\eta}(v, v) - 2i \operatorname{Re} Q_{g,\eta}(v', j_\lambda v')]$$

ただし, $v' = (j_\lambda + j_{g,\eta})^{-1}v$ を, 作用素 $A_{g,\eta}$ は次の式で定義されるものとする.

$$\langle A_{g,\eta} x, y \rangle = \lambda \circ A([j_\lambda + j_{g,\eta}]x, y) \quad (\lambda = g \cdot \lambda_\eta)$$

References

- [1] J.F.Aarnes, Factorization in $L^p(G)$ and the Plancherel theorem for non-unimodular Lie groups, In "Operator algebras and group representations", Vol.I, edited by Gr.Arsene et al., Pitman, Boston, 1984, 1-16.
- [2] A.Bakali, Analyse harmonique sur les groupes $ax + b$ matriciels, Thèse, Univ. Nancy I, 1984.
- [3] J.Y.Charbonnel, La formule de Plancherel pour un groupe de Lie résoluble connexe, Lecture Notes in Math., 587 (1977), 32-76; II, Math. Ann., 250 (1980), 1-34.
- [4] M.Duflo, On the Plancherel formula for almost algebraic real Lie groups, Lecture Notes in Math., 1077 (1984), 101-165.
- [5] M.Duflo and C.C.Moore, On the regular representation of a non-unimodular locally compact group, J. Funct. Anal., 21 (1976), 209-243.
- [6] M.Duflo et M.Raïs, Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 9 (1976), 107-144.
- [7] P.Eymard et M.Terp, La transformation de Fourier et son inverse sur le groupe des $ax + b$ d'un corps local, Lecture Notes in Math., 739 (1979), 207-248.
- [8] F.W.Keene, Square integrable representations and a Plancherel theorem for parabolic subgroups, Trans. Amer. Math. Soc., 243 (1978), 61-73.
- [9] F.W.Keene, R.L.Lipsman and J.A.Wolf, The Plancherel formula for parabolic subgroups, Israel J. Math., 28 (1977), 68-90.
- [10] I.Khalil, Sur l'analyse harmonique du groupe affine de la droite, Studia Math., 51 (1974), 139-167.
- [11] A.Kleppner and R.L.Lipsman, The Plancherel formula for group extensions, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 5 (1972), 459-516.
- [12] A.Kohari, Harmonic analysis on the group of linear transformations of the straight line, Proc. Japan Acad., 37 (1962), 250-254.
- [13] R.L.Lipsman, Fourier inversion on Borel subgroups of Chevalley groups: the symplectic group case, Trans. Amer. Math. Soc., 260 (1980), 607-622.

- [14] R.L.Lipsman, Type I criteria and the Plancherel formula for Lie groups with co-compact radical, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 9 (1982), 263-285.
- [15] R.L.Lipsman and J.A.Wolf, The Plancherel formula for parabolic subgroups of the classical groups, *J. d'Anal. Math.*, 34 (1978), 120-161.
- [16] _____, Canonical semi-invariants and the Plancherel formula for parabolic groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 269 (1982), 111-131.
- [17] C.C.Moore, Representations of solvable and nilpotent groups and harmonic analysis on nil and solvmanifolds, *Proc. Symp. Pure Math.*, 26 (1973), 3-44.
- [18] C.C.Moore and J.A.Wolf, Square integrable representations of nilpotent groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 185 (1973), 445-462.
- [19] T.Nomura, Representations of a solvable Lie groups on $\bar{\partial}_b$ cohomology spaces, *RIMS 講究録*, "群の表現の幾何学的実現", 近刊.
- [20] _____, Harmonic analysis on a nilpotent Lie group and representations of a solvable Lie group on $\bar{\partial}_b$ cohomology spaces, Preprint (accepted for publication).
- [21] N.V.Pedersen, On the left regular representation of a separable locally compact group, *J. Funct. Anal.*, 43 (1981), 368-393.
- [22] R.Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, *J. Funct. Anal.*, 18 (1975), 177-190.
- [23] L.Pukanszky, Unitary representations of solvable Lie groups, *Ann. Sci. Ec. Norm Sup.*, 4 (1971), 457-608.
- [24] J.Rosenberg, Square-integrable factor representations of locally compact groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 237 (1978), 1-33.
- [25] I.Satake, Algebraic structures of symmetric domains, Iwanami and Princeton Univ. Press, Tokyo/Princeton, 1980.
- [26] N.Tatsuuma, Plancherel formula for non-unimodular locally compact groups, *J. Math. Kyoto Univ.*, 12 (1972), 179-261.

- [27] J.A.Wolf, Representations of reductive and parabolic groups, Ann. of Israel Phys. Soc., 3 (1980), "Group theoretical methods in physics", edited by L.P.Horowitz and Y.Ne'eman, 4-18.
- [28] _____, Classification and Fourier inversion for parabolic subgroups with square integrable nilradical, Mem. Amer. Math. Soc., 225 (1979).
- [29] P.Green, Square-integrable representations and the dual topology, J. Funct. Anal., 35 (1980), 279-294.