

$SU(p, q)$ の指標等式について

福井大学教育学部 三上俊介 (Shunsuke Mikami)

§1. 序

1. G を連結実半単純 Lie 群 (中心有限) とし, $\mathcal{O}$ をその Lie 環とする。 $\Theta \in G$ 上の tempered な不変固有超関数 (以下 IED と記す) とし, λ をその infinitesimal character とする。 すなわち $\mathfrak{z}$ を $\mathcal{O}$ の複素化 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の展開環の中心とすると, $\lambda \in \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathfrak{z}, \mathbb{C})$ であって $Z \cdot \Theta = \lambda(Z) \Theta \quad \forall Z \in \mathfrak{z}$ が成り立つ。
IED に関する次の基本的な結果は Harish-Chandra により得られている。

命題 Θ は局所可積分関数であって, $G' (= G$ の正則元全体) 上実解析関数になる。 (この関数のことを Θ' と書くことにする。)

そこで $\text{Can}(G) = \{ G$ の Cartan 部分群の共役類の全体 $\}$ とし, $T_0, T_1, \dots, T_r$ をその完全代表系とすると,

$$G' = \bigcup_{j=0}^l \bigcup_{g \in G} g T_j' g^{-1} \quad (T_j' = T_j \cap G')$$

となるから、不変性により、 Θ' は各 T_j' の上での形が求まれば完全に定まる。

本稿においては、 $G = SU(p, q)$ (または $U(p, q)$) の場合に Θ' のいくつかの Cartan 部分群 T_j 上への制限 $\{\Theta'|_{T_j'}\}$ の間の関係式 (これを指標等式と本稿ではよぶ)、それらと Weyl 群の元の作用に関する条件や stable character χ_φ の持ち上げとの関連について述べる。 ($G = Sp(n, \mathbb{R})$ の場合にも同様の考察がされている。cf [9])

2. 本論に入る前に問題の由来について少し述べる。その為には Langlands による 既約 admissible 表現の分類における tempered parameter φ をもつ L-packet Π_φ について説明する。(cf [6], [8]) $\underline{G}$ として $\mathbb{R}$ 上定義された連結 reductive 線型代数群とし、 $G = \underline{G}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ -rational points 全体) とする実 Lie 群 G を対象とする。 T を G の Cartan 部分群 (すなわち $T = \underline{T}(\mathbb{R})$, ここに $\underline{T}$ は $\mathbb{R}$ 上定義された $\underline{G}$ の maximal torus), Λ を T 上の unitary character とする。 $\underline{T}$ の maximal split $\mathbb{R}$ -torus の $\underline{G}$ における centralizer を $\underline{M}$ とし、 $M = \underline{M}(\mathbb{R})$ とおき、 M を Levi 部分群にもつ G の (cuspidal) parabolic 部分群を $P = MN$ とおく。このとき T は M の fundamental Cartan 部分群になる。そこで M の derived group の単位元

を含む連結成分を M^+ , $Z_M \in M$ の中心, $T^+ = T \cap M^+$, $\hat{\lambda} = d(\Lambda|_{T^+})$ ($\Lambda|_{T^+}$ の微分) とおく。 M, T の Lie 環を各々 $\mathfrak{m}, \mathfrak{t}$ で表わし, $(\mathfrak{m}, \mathfrak{t})$ のルート系 $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{t})$ に $\hat{\lambda}$ が dominant になる様に順序を導入しておく。そして

$$\iota = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha \quad (\alpha \text{ は } (\mathfrak{m}, \mathfrak{t}) \text{ の ルート})$$

とし, $\hat{\lambda} + \iota$ に対応する M^+ の離散系列表現を $\pi(\hat{\lambda}, \iota)$ と書き

$$\pi(\Lambda, \iota) = \text{Ind}_{M^+ Z_M}^M (\pi(\hat{\lambda}, \iota) \otimes \Lambda|_{Z_M}) \quad \text{とおく。} \quad \text{さらに}$$

$$W(\underline{M}, \underline{I}) = \text{Norm}_{\underline{M}}(\underline{I}) / \underline{I} \quad (\cong W(\mathfrak{m}, \mathfrak{t}_c) : \text{ルート系の Weyl 群})$$

$$W(M, T) = \text{Norm}_M(T) / T$$

とおく。($\text{Norm}_{\underline{M}}(\underline{I})$ は $\underline{M}$ における $\underline{I}$ の normalizer, 他も同じ。)

そして $\pi_\varphi^\circ = \bigoplus_{\omega} \pi(\omega\Lambda, \omega\iota)$ とする。但し, ω は

$W(M, T) \backslash W(\underline{M}, \underline{I})$ の完全代表系をわたる。

註. φ は $\{T, \Lambda\}$ の対のある同値類に付与されたラベルで

ある。正確には $\varphi = \langle \Lambda \rangle = \{ \Lambda \circ \text{Ad} g^{-1} ; g \in A(T) \}$ (cf

[6], $A(T)$ の定義は §5)

この φ に対応する L-packet Π_φ とは

$$\Pi_\varphi = \{ \text{Ind}_{MN}^G (\pi_\varphi^\circ \otimes /_N) \text{ の既約成分} \}$$

として定められる。これは有限集合であり, 特に $P=G$, T が compact のとき, Π_φ は同じ infinitesimal character をもつ G の離散系列表現の全体に等しい。表現 $\pi_i \in \Pi_\varphi$ の指標を $\oplus \pi_i$ と書くことにする。

D. Shelstad は "stable tempered IED の持ち上げ" という手法により一連の指標等式を得た。(18), 本§5に持ち上げの概略を説明してある。) それは、適当に $\varepsilon_i = \pm 1$ をとって

$\sum_{\pi_i \in \Pi_\varphi} \varepsilon_i \odot \pi_i$ という G 上の tempered IED を考える。このとき, quasi-split reductive 群 H と $\chi_{\varphi'} = \sum_{\pi_i' \in \Pi_{\varphi'}} \odot \pi_i'$ という H 上の tempered IED が存在して,

$\text{Car}(G) = \text{Car}_H'(G) \cup \text{Car}_H^2(G)$ (但し, $\text{Car}_H'(G)$ は H のある Cartan 部分群と同型対応がつかう G の Cartan 部分群 T の共役類 $[T]$ の全体とし, $\text{Car}_H^2(G) = \text{Car}(G) \setminus \text{Car}_H'(G)$) とおくと,

i) $[T] \in \text{Car}_H'(G) \Rightarrow \sum \varepsilon_i \odot \pi_i|_T$ は $\chi_{\varphi'}$ を用いて表わすことができる。

ii) $[T] \in \text{Car}_H^2(G) \Rightarrow \sum \varepsilon_i \odot \pi_i|_T \equiv 0$

ii) に関しては反転公式なども詳しく調べられている(18)。そこで ii) の型の指標等式がどのくらいあるか, また Weyl 群による特徴付け等について調べてみよう。というのが我々の問題の出発点である。

註 φ' は φ から定まる H の tempered parameter $\pi_{\varphi'}$ は H の L -packet を意味する。また $\sum \varepsilon_i \odot \pi_i$ が $\chi_{\varphi'}$ の G へ

の持ち上げ (Lift χ_{φ} と書く) に τ_0 を用いる. ([8], *§5).

§2. 準備と記号

以下の議論に必要ないくつかの記号他を導入する.

1. τ : $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra

$S(\tau_c)$: τ_c の symmetric algebra

$I(\tau_c) = S(\tau_c)^W = \{ S(\tau_c) \text{ の元で Weyl 群 } W = W(\mathfrak{g}, \tau_c) \text{ 不変なもの全体} \}$

とおく. このとき Harish-Chandra isomorphism $\gamma^\tau: \mathfrak{z} \rightarrow I(\tau_c)$ が存在する. そこで $\lambda \in \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathfrak{z}, \mathbb{C})$ に対して, $\lambda \circ (\gamma^\tau)^{-1} = \lambda_\tau$ と書く. ($\tau = \tau_j$ のときは $\lambda_\tau = \lambda_j$ と書く.) $\lambda_\tau \in \text{Hom}_{\text{alg}}(I(\tau_c), \mathbb{C})$ であるが, 対応する τ_c^* の元が W に関し regular (resp. singular) のとき λ が regular (resp. singular) と呼ぶことにする.

2. $(\mathfrak{g}, \tau_c)$ の imaginary root に関する reflections で生成される $W(\mathfrak{g}, \tau_c)$ の部分群を $W_I(\mathfrak{g}, \tau)$ と書き, imaginary Weyl 群 とよぶ.

3. $\text{Can}(G) = \{ [T_j] : j=0, \dots, l \}$ とする.

λ が T_j に関し T -admissible

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\mathcal{B}_T(T_j, \lambda_j) = \left\{ \begin{array}{l} \zeta \in C^\infty(T_j) \quad \text{s.t.} \\ 1) \quad \zeta \text{ is } \varepsilon\text{-symmetry ぞみ} T_j \text{ 上} \\ 2) \quad D\zeta = \lambda_j(D)\zeta \quad \forall D \in I(T_j) \\ 3) \quad \text{tempered} \end{array} \right\}$$

≠ 10 } (cf [4])

註 $(g, t_{j,c})$ のルート α に対して $X_\alpha \in$ そのルートベクトル とする。

このとき $\text{Ad}(t)X_\alpha = \xi_\alpha(t)X_\alpha$ により、 T_j 上の

character を ξ_α , また G が *admissible* の仮定の下で

$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$ とおき, その微分が ρ になる様な T_j 上

character を ξ_ρ と書く。そこで

$$\Delta(t) = \Delta'(t) = \xi_\rho(t) \prod_{\alpha > 0} (1 - \xi_\alpha(t))^{-1}$$

$$\varepsilon_R(t) = \varepsilon_R'(t) = \text{sgn} \prod_{\alpha > 0, \text{real}} (1 - \xi_\alpha(t))^{-1}$$

$$(t \in T_j \cap G')$$

とおき, $W(G, T_j)$ に関し ζ が $\varepsilon_R' \Delta'$ と同じ symmetry をみたすとき, ζ は ε -symmetry をみたすという。

また 2) では $I(T_j)$ の元 D は自然に T_j 上の微分作用素とみられることができ, ζ はそれらの同時固有関数になることを要請している。

§ 3. $SU(p, q)$ の指標等式

④ $\in G$ 上の tempered IED, λ をその infinitesimal character

T^* は G の vector part 最大の Cartan 部分群, λ が T -admissible になる Cartan 部分群 (の共役類の代表系) を $\{T_j; j \in J\}$ $J \subset \{0, 1, \dots, \ell\}$ とおく。そして次の3つの条件を考える。

$$a) \quad \Theta'_{|T^* \cap G'} \equiv 0$$

$$b) \quad \Theta'_{|T_j \cap G'}(t^{w_j}) = -\Theta'_{|T_j \cap G'}(t) \quad \forall t \in T_j \cap G', \forall j \in J$$

(w_j は $W_I(q, \tau_j)$ の最長元)

c) $[T^*] \in \text{Car}_H^2(G)$ となる様な有限個の H ((T, κ) -group とか endoscopic group とおられる) 上の stable character χ_H が存在し

$$\Theta = \sum_H c_H \text{Lift } \chi_H \quad \text{と} \quad \text{なる。}$$

(c_H は定数で χ_H は §1.2 で $\chi_{G'}$ と書かれていたもの。)

定理 $G = \text{SU}(p, p)$ ($\text{U}(p, p)$ でも全く同様) とする。

1) λ が regular のとき. $a), b), c)$ は同値である。

2) λ が singular のとき. 条件 (*)

(*) " Θ' が compact Cartan 部分群上 $\neq 0$ "

をみたすならば $a), b), c)$ は同値である。

系 $G = \text{SU}(p, q)$ ($p < q$) とする。

λ が regular, $\exists T$ は integral かつ条件(**)

(**) $\Delta_\lambda = \{ \alpha \in \Delta(\sigma, \tau_0) ; \langle \alpha, \lambda_0 \rangle = 0 \}$ が

$A_1 \times \cdots \times A_1$ 型のル-ト系に属する。 (τ_0 が G の compact Cartan 部分群であるとする)

をみたすならば

" $\textcircled{H} \neq 0 \implies \textcircled{H}'|_{T^* \cap G'} \neq 0$ " が成り立つ。

註1. 定理において $\textcircled{H}$ に関する条件 (*) は本質的ではないと思われるが、未だ (*) を外した形で証明できていない。定理において (*) を外すことができれば、系において条件 (**) は不要になる。

註2. (c) と (a) が同値ということは、Shelstad の方法により T^* 上での iii) の型の指標等式はつくされていることを意味する。

註3 $G = \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ の場合にも λ が regular, integral の場合には a) ~ c) の同値性が (cf [9]), 一部の singular $\tau_0 \lambda$ に対しては a) と b) の同値性が証明できる。

§ 4. 証明の方針

1. 後の議論の為に $G = \text{SU}(1, 1) (\cong \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ の場合を

少しみてみよう。 G の Cartan 部分群 (の代表系) として

$$T_0 = \left\{ u_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

$$T_1 = \left\{ \varepsilon a_t = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{cht} & \text{sht} \\ \text{sht} & \text{cht} \end{pmatrix}, \varepsilon = \pm 1, t \in \mathbb{R} \right\}$$

がとれる。今の場合は G 上の tempered IED Θ は regular integral infinitesimal character をもつ場合だけを調べればよい。従って

$$\exists n \in \mathbb{Z}, n > 0, \quad \Theta'(u_\varphi) = \frac{A e^{in\varphi} + B e^{-in\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} \quad \text{と取り}$$

さらに T_1 上では

$$\Theta'(\varepsilon a_t) = \frac{(B-A)(\varepsilon e^{-it})^n}{\varepsilon |e^t - e^{-t}|}$$

であることが離散系列の指標の形よりわかる。すると

$$a) \quad \Theta|_{T_1 \cap G'} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

$$\Leftrightarrow \quad \Theta'(u_{-\varphi}) = -\Theta(u_\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad b) : \quad \Theta'(u_\varphi^{w_0}) = -\Theta(u_\varphi)$$

$$(\text{但し } w_0 = \text{Ad} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

$$\Leftrightarrow \quad \Theta = A(\Theta_{n+1}^+ - \Theta_{n+1}^-)$$

($\Theta_{n+1}^\pm$ は 離散系列表現の指標)

故に a) と b) の同値性がわかり、また $[T_1] \in \text{Car}_H^2(G)$ とある H は

$SO(2)$ 以外になく, 更に $\text{Lift } \chi_n = \oplus_{m=1}^+ - \oplus_{m=1}^-$ となること
から c) との同値性もわかる。

2. $SU(p, q)$ 上の任意の tempered IED は $U(p, q)$ 上の有限
個の tempered IED の $SU(p, q)$ への制限の一次結合として表
わされ, その差異は有限巡回群の表現により定まるため,
 $U(p, q)$ での結果がそのまま $SU(p, q)$ に移すことができること,
及び 記号の煩雑さを少しでも除く為に, 以後 $G = U(p, q)$
($p \leq q$) の場合を調べる。(今までの定義等はそのまま用いるこ
とができる。)

$$G = U(p, q) = \{ g \in GL(p+q, \mathbb{C}) : {}^t \bar{g} I_{p,q} g = I_{p,q} \}$$

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} \overset{p}{\curvearrowright} & & \\ & -1 & \overset{q}{\curvearrowright} \\ & & \end{pmatrix}$$

$K \cong U(p) \times U(q)$ は G の maximal compact 群, K の
Lie 環を $\mathfrak{k}$, K に対応する Cartan involution を θ とし, $\mathfrak{g} =$
 $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とする。 θ -stable $\mathfrak{t}$ は Cartan 部分群の
代表系として,

$$T_0, T_1, \dots, T_p \quad \text{s.t.} \quad \dim T_j \cap \mathfrak{p} = j \quad (0 \leq j \leq p)$$

となる様に選べる。 実際 $T_j = (T_j \cap K) \cdot (T_j \cap \exp \mathfrak{p})$,

$$T_j \cap K = \{ \text{diag} (e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_{p-j}}, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_j}, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_j}, \\ e^{i\psi_{q-j}}, \dots, e^{i\psi_q}), \varphi_k, \theta_s, \psi_t \in \mathbb{R} \}$$

$$T_j \cap \exp \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 1_{p-j} & & & \\ & \text{cht}_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \text{sht}_j \\ & \text{cht}_1 & \text{sht}_1 & \\ & \text{sht}_1 & \text{cht}_1 & \\ & & & \ddots \\ & & \text{sht}_j & \\ & & & \text{cht}_j \\ & & & & 1_{1-j} \end{pmatrix} \mid t_k \in \mathbb{R} \right\}$$

ととれよう。

また G 上の tempered IED Θ に対して

$$\chi(t) = \chi^j(t) = \varepsilon_R^j(t) \Delta^j(t) \Theta^j(t) \quad t \in T_j \cap G' \dots \textcircled{1}$$

とおく。(U(p, q) の場合, 通常 Δ^j の代りに多価性を除く為に便宜的に $\Delta^j \times (\det t)^{\frac{p+q-1}{2}}$ にとりかえておく。) 明らかに条件 b) は次の条件 b') と同値になる。

$$b') \quad (-1)^{p-j} \chi^j(t^{w_j}) = (-1) \chi^j(t) \quad j \in J$$

3. 先ず Θ の infinitesimal character λ が regular かつ integral の場合を調べる。

補題 $G = U(p, p)$, λ : regular かつ integral とする。

$$(-1)^p \chi^0(t^{w_0}) = (-1) \chi^0(t) \quad t \in T_0 \cap G' \text{ が成り立つとは}$$

各 Cartan 部分群 T_j ($0 \leq j \leq p$) 上で

$$(-1)^{p-j} \chi^j(t^{w_j}) = (-1) \chi^j(t) \quad t \in T_j \cap G'$$

が成り立つ。

この補題は χ^j の満たす semi-regular elements 上での境界条件, 並びに χ^j の有界性より導かれる。

従って λ が T -admissible となる Cartan 部分群は T_0 だけで,

補題において $j=p$ のとき $w_p=1$ であることより $b) \Rightarrow a)$ を示せる。

4. $a) \Rightarrow b)$ を示すのは p に関する帰納法による。

$$T_j = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varphi_j} \end{pmatrix} \right\} \times T_j^{(p-1)} \quad (j=0, \dots, p-1)$$

とおくとき, $T_j^{(p-1)}$ は $U(p-1, p-1)$ の vector part の次元が j である

Cartan 部分群と同型になる。 $W=W(\sigma_0, \tau_{0,c})$, $W_h=W(G, T_0)$

とおき, $W_h \setminus W$ の完全代表系 $\{\omega_1, \dots, \omega_N : \omega_i \in W\}$ を $\forall i$
 $(1 \leq i \leq N)$ に対し $w_0 \omega_i \in \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ をみえる様に選ぶ。

$$\chi_{\omega_i, \lambda}^0 = \operatorname{sgn}(\omega_i) \sum_{w \in W_h} \operatorname{sgn}(w) \xi_{w\omega_i, \lambda_0}$$

とおくとき,

$$\chi^0 = \sum_{i=1}^N m_{\omega_i} \chi_{\omega_i, \lambda}^0$$

と表わされる。そこで $\chi_{\omega_i, \lambda}^0(t^{w_0}) = \operatorname{sgn}(w_0) \chi_{w_0 \omega_i, \lambda}^0(t)$

となる, 示すべきことは $m_{w_0 \omega_i} = -m_{\omega_i} \quad \forall i \dots \dots \textcircled{2}$

ということになる。

$$\tau_0 \Rightarrow X = \operatorname{diag}(i\varphi_1, \dots, i\varphi_p, i\varphi_p, \dots, i\varphi_1) = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_{2p})$$

に対し $\lambda_0(X) = \sum_{i=1}^{2p} c_i x_i \quad c_i \in \mathbb{Z}, \quad c_1 > c_2 > \dots > c_{2p} \geq 0,$

$0 \leq j \leq p-1$ に対し

$$T_j \ni t = t_1 \cdot t_2, \quad t_1 = \operatorname{diag}(e^{i\varphi_1}, 1, \dots, 1, e^{i\varphi_1}) \\ t_2 \in T_j^{(p-1)}$$

と分解しておく。任意の $s, t \quad (1 \leq s, t \leq 2p, \quad s \neq t)$ に対し

χ^j における $e^{ic_s\varphi_1 + ic_t\varphi_2}$ の係数 (t_2 の関数) をとりだして考えると, それは $U(p-1, p-1)$ 上のある tempered IED $\mathcal{H}_{s,t}$ を用いて $\varepsilon_R \cdot \Delta \cdot \mathcal{H}'_{s,t}$ と表わされるものになる。全く同様に $e^{ic_t\varphi_1 + ic_s\varphi_2}$ の係数を取りだすと, $\mathcal{H}_{t,s}$ に対応している。条件 a) より $\chi' \equiv 0$ であるから, T_{p-1} と T_p の間の境界条件につき, $U(1, 1)$ の結果を適用すると, $U(p-1, p-1)$ 上の tempered IED $\mathcal{H}_{s,t} - \mathcal{H}_{t,s}$ は $T_{p-1}^{(p-1)}$ ($U(p-1, p-1)$ の vector part 最大の Cartan 部分群) 上 $\equiv 0$ となる。そこで $\varepsilon_R \cdot \Delta \cdot (\mathcal{H}_{s,t} - \mathcal{H}_{t,s})^\circ$ を m_{ω_i} を用いて表わし, 帰納法の仮定を適用すれば $\{m_{\omega_i}\}$ の 4 つの項の関係を与える連立方程式が求まり, それを整理することにより ② が示せる。

5. λ が regular (必ずしも integral とは限らない) の場合は, λ が T -admissible になる Cartan 部分群は唯一つで, それを T とする。 T に対し §1.2 で構成した cuspidal parabolic 部分群を $P=MN$ とすると, P の誘導指標の形, 及び 4. で述べた結果を M_1 (但し $M=M_1A$, $A=T \cap \exp \mathfrak{p}$, $M_1 \cap A = \{1\}$) に適用したものを合わせればよい。

6. 次に singular なる場合を考える。(但し $\mathcal{H}'_{T_0 \cap G'} \neq 0$)
 $\lambda_0(X) = \sum c_i x_i$, $c_1 \geq \dots \geq c_s > \dots > c_t = c_{t+1} > \dots \geq c_{2p}$ とする。 λ_0 regular の場合とは異なり, $\{\chi_{\omega_i, \lambda}^\circ \mid 1 \leq i \leq N\}$ は一次独立ではなくなる。そこで

$$W_\lambda = \{ w \in W(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C}) : w\lambda_0 = \lambda_0 \} \quad \text{とおく.}$$

$W_\lambda \setminus W$ の完全代表系の一部 $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ を

$$1) \quad \omega_i u \neq \omega_j, \quad 1 \neq u \in W_\lambda, \quad 1 \leq i, j \leq r$$

$$2) \quad 1) \text{ をみたす maximal } r_0 \neq 0$$

$$3) \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{に對し} \quad w_0 \omega_i w_\lambda^{-1} \in \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$$

(w_λ は W_λ の最長元.)

を満たす様にえらぶ。すると regular の場合と同様に

$$\chi^0 = \sum_{i=1}^r m_{\omega_i} \chi_{\omega_i, \lambda}^0$$

と表わすことができる。故に条件 b) を $j=0$ の場合に示すには

$$m_{w_0 \omega_i w_\lambda^{-1}} = -\operatorname{sgn}(w_\lambda) m_{\omega_i}, \quad 1 \leq i \leq r \quad \dots (3)$$

が成り立つことをいえよ。4. と同じ手法を用いる。

$\{\chi^i\} (0 \leq i \leq p-1)$ の $e^{i c_s \varphi_1 + i c_t \varphi_2}$ の係数に對する $U(p-1, p-1)$ の tempered IED $\in \mathcal{H}_{s,t}$, $e^{i c_t \varphi_1 + i c_s \varphi_2}$ の係数に對するそれを $\mathcal{H}_{t,s}$ とする。 $\chi^p \equiv 0$ だから, $U(1,1)$ の結果より $\mathcal{H}_{s,t} - \mathcal{H}_{t,s}$ に帰納法の仮定 (または 4. の結果) を適用して, 4 の場合より簡単に b) を $j=0$ の場合に証明できる。 $j \geq 1$ に對しては step by step に証明を続ける。

$$\lambda'_0 = \lambda_0 + \mu \quad (\text{但し } \mu: \text{dominant integral, } \lambda': \text{regular})$$

とし, $\omega = \omega_j \quad (1 \leq j \leq N)$ に對して

$$\hat{m}_\omega = \begin{cases} \frac{1}{\#W_\lambda} m_{\omega_i} \operatorname{sgn}(u) & \text{if } \omega = \omega_i u \quad 1 \leq i \leq r \\ & u \in W_\lambda \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\chi^{(i)} = \sum_{j=1}^N \hat{m}_{\omega_j} \chi_{\omega_j, \lambda}^{(i)}$$

とおくと, $\hat{m}_{\omega_0 \omega_j} = -\hat{m}_{\omega_j}$ となる. 4.7.の結果より $\chi^{(p)} \equiv 0$ となる. 従って補題より

$$(-1)^{p-j} \chi^{(j)}(t^{\omega_j}) = (-1) \chi^{(j)}(t) \quad t \in T_j \cap G', \quad 0 \leq j \leq p. \quad \text{--- (4)}$$

ここで $\mu \rightarrow 0$ と T_0 上極限操作を行って $\psi^1 = t$ により得られる

関数 (resp. tempered IED) を $\hat{\chi}$ (resp. $\hat{\Theta}$ s.t. $\hat{\chi} = \varepsilon_R \Delta \cdot \hat{\Theta}$)

と書く

$$\hat{\chi}^0 \equiv \chi^0, \quad \text{かつ} \quad (-1)^{p-j} \hat{\chi}^{(j)}(t^{\omega_j}) = (-1) \hat{\chi}^{(j)}(t) \\ (t \in T_j \cap G', \quad 0 \leq j \leq p).$$

すなわち $\hat{\Theta}$ は Θ と同じ infinitesimal character λ をもち, (かつ

$\chi^0 - \hat{\chi}^0 \equiv \Delta^0(\Theta - \hat{\Theta})|_{T_0 \cap G'} \equiv 0$. 従って $\chi^1 - \hat{\chi}^1$ は T_1 上

実解析的になる. そこで

$$(\chi^1 - \hat{\chi}^1)(t) = \sum_{s: \lambda_s = \lambda_{s+1}} e^{2i c_s \theta_1} \chi_{1s}(t_{12}) \\ T_1 \ni t = t_{11} t_{12} \quad t_{11} = \begin{pmatrix} ch t_1 & sh t_1 \\ sh t_1 & ch t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} \end{pmatrix} \\ t_{12} = \text{diag}(e^{i\psi_1}, \dots, e^{i\psi_{p-1}}, e^{i\psi_{p+1}}, \dots, e^{i\psi_l})$$

とおき, $T_1, \dots, T_p$ 上で $e^{2i c_s \theta_1}$ の係数を集めて考えると,

$U(p-1, p-1)$ の tempered IED に対立し, $\chi^p - \hat{\chi}^p \equiv 0$ となる.

帰納法の仮定がそれらに再び適用できて,

$$(-1)^{p-1} \chi_{1s}(t_{12}^{\omega_1}) = (-1) \chi_{1s}(t_{12})$$

$$\therefore (-1)^{p-1} (\chi^1 - \hat{\chi}^1)(t^{\omega_1}) = (-1) (\chi^1 - \hat{\chi}^1)(t).$$

故に $(-1)^{p-1} \chi^1(t^{\omega_1}) = (-1) \chi^1(t) \quad t \in T_1 \cap G'$

すなわち $b)$ が $j=1$ の場合にも成立することになる。この操作を繰り返す。

7. λ_0 が最も singular な場合 ($c_1=c_2 > c_3=c_4 > \dots > c_{2p-1}=c_{2p}$) もほとんど同様にできる。また $b) \Rightarrow a)$ についても step by step に $\hat{\sigma}$ で補正していくことにより証明できる。

Shelstad の結果より $c) \Rightarrow a)$ が示されるので、 $b) \Rightarrow c)$ を見ればよい。 λ が regular integral の場合には $\mathrm{Spin}(R)$ の場合に用いたと全く同じ手法による。(19) $\mathcal{O}_T = \mathcal{O}_T(T_0, \lambda_0)$ 上に $(SS)(t) = (-1)^p S(t^{2p})$ により定義される作用素 S に関し、 $\mathcal{O}_T = \mathcal{O}_T^+ \oplus \mathcal{O}_T^-$ ($\mathcal{O}_T^\pm = \{S \in \mathcal{O}_T; SS = \pm S\}$) と固有空間分解する。次に $[T^p] \in \mathrm{Can}_H^2(G)$ とする様な H の特徴付けを求め、それを用い (H 上の stable character $\chi_{\varphi'}$ の G への持ち上げ $\mathrm{Lift}(\chi_{\varphi'}) \times \varepsilon_R \Delta$ を $\mathcal{O}_T^-$ の基底に T_0 として示す。かくして $b)$ より $c)$ が導ける。

(4) $T_j'(R) = \{t \in T_j; \xi_\alpha(t) \neq 1 \quad \forall \alpha: \text{real root}\}$ の各連結成分 F 上

$$\chi_j'(a \cdot \exp X) = \sum_{w \in W} c_F(w; \lambda') \exp(w \lambda_j'(X)), \quad (a \exp X \in F)$$

と表わせる。(14) さらに定数 $c_F(w; \lambda')$ は上の μ のとり方によらずに一定である。そこで $\mu \rightarrow 0$ とは係数部分は変えずに $\exp(w \lambda_j'(X)) \in \exp(w \lambda_j(X))$ にとりかえることを意味する。

§5. stable tempered IED の持ち上げ

この § において, D. Shelstad による手法の概略について述べる。(正確な記述は [5][7][8] を参照して下さい。) §1.2 におけると同様 $\underline{G}$ を $\mathbb{R}$ 上定義された連結 reductive 線型代数群, $G = \underline{G}(\mathbb{R})$, $T = \underline{T}(\mathbb{R})$, $\underline{T}$ は $\mathbb{R}$ 上定義された, $\underline{G}$ の maximal torus とする。このとき

$$A(T) = \{ g \in \underline{G}; g \underline{T} g^{-1} \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上定義され, かつ}$$

$$\text{Ad } g: \underline{T} \longrightarrow g \underline{T} g^{-1} \text{ は } \mathbb{R}\text{-同型に等しい} \}$$

と定義すると, 容易に $A(T) = \{ g \in \underline{G}; \sigma(g^{-1})g \in \underline{T} \}$ であることがわかる。ここに $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \sigma\}$ である。 $A(T)$ の元 g に Γ から $\underline{T}$ への 1-cocycle $(1 \rightarrow 1, \sigma \rightarrow \sigma(g^{-1})g)$ が対応し, 従って $\mathcal{O}(T) = G \backslash A(T) / \underline{T} \hookrightarrow H^1(\Gamma, \underline{T})$ なる injection が存在する。そこで $\chi \in \text{Hom}(H^1(\Gamma, \underline{T}), \{\pm 1\})$ (今までの関数 χ とは関係ない) とし, この (T, χ) の pair に対し χ -orbital integral $\Phi_f^\chi(t)$ を次の様に定義する。

$$\Phi_f^\chi(t) = \sum_{\omega \in \mathcal{O}(T)} \chi(\omega) \int_{G/T} f(g t \bar{g}^{-1}) d\bar{g} \quad f \in \mathcal{C}(G), t \in T \cap G'$$

(但し, $\mathcal{C}(G)$ は G 上の急減少関数全体, $d\bar{g}$ は G/T 上の G -不変測度を表す。) 特に $\chi \equiv 1$ のとき, stable orbital integral とよぶ。また G 上の tempered IED Θ が stable であるとは, G の任意の Cartan 部分群 T と $\forall g \in A(T)$ に対し,

$$\Theta'(gtg^{-1}) = \Theta'(t) \quad (t \in T \cap G')$$

が成り立つと定義する。§1.2 の $\chi_\varphi = \sum_{\pi \in \Pi_\varphi} \Theta \pi$ は stable tempered IED になる。

さて (T, κ) に対し L-group を経由して、次の様な $\mathbb{R}$ 上定義された quasi-split reductive 代数群 H が構成できる。 $((T, \kappa)$ -group とおかれている。) $H = H(\mathbb{R})$ とおく。

- 1) $\text{rank } H = \text{rank } G \quad \dim H \leq \dim G$
- 2) H の $\mathbb{R}$ 上定義された maximal torus T^H で T と $\mathbb{R}$ 同型なものがある。(この $\mathbb{R}$ 同型を $i: T^H \rightarrow T$ と書く)
- 3) $\mathcal{O}_H(T^H)$ (i により $\mathcal{O}(T)$ に移して考える) 上 $\kappa \equiv 1$ となる。($\mathcal{O}_H$ は H に対して、先程の様に定め $T = \mathcal{O}$ のことを表す。)

以後、 (T, κ, T^H) の代りに (T, κ, T^H) と書き、 G と H の $\mathbb{R}$ 上定義された maximal tori で互いに $\mathbb{R}$ 同型なものをすべて集める。すなわち、

$$\{ [T_m] ; m=1, \dots, n \} \quad ([] \text{ は共役類を意味する。})$$

$$\{ [T_{m'}^H] ; m'=1, \dots, n' \}$$

$$i_{m'}: T_{m'}^H \longrightarrow T_m \quad (\mathbb{R}\text{-同型})$$

$$\mathcal{I} = \{ i_{m'} : m'=1, \dots, n' \} \quad \text{とおく} \quad (\S 4 \text{ での番号付け}$$

とは無関係) 丁度 §1 の記号に従えば、

$$\text{Car}_H'(G) = \{ [T_m] ; m=1, \dots, n \} \quad \text{と取る。}$$

註 各 T_m ($m=1, \dots, n$) に対して $\sigma_m \in \text{Hom}(H'(\Gamma, T_m), \mathbb{Z})$ が存在して, (T_m, σ_m) から同じ H が構成できる。特に区別しなくても混乱が起らない場合, すべて σ と書く。

そこで 3) の性質を反映して, σ -orbital integral Φ_f^σ を H 上の stable orbital integral にうつすことが出来る。すなわち

定理 (Shelstad [7][8]) G が単連結, 半単純のとき,

$\bigcup_{m=1}^n T'_m$ 上の関数 Δ_H^G が存在して次の条件を満たす。

$\forall f \in \mathcal{C}(G)$ に対し

$$t_H \longrightarrow \begin{cases} \Delta_H^G(t) \Phi_f^\sigma(t) & \text{if } t_H \xrightarrow{g} t \in \bigcup_{m=1}^n T'_m \dots \textcircled{5} \\ 0 & \text{if } t_H \in H \cap \tilde{T}, [\tilde{T}] \neq [T'_m] \dots \textcircled{6} \\ & (m'=1, \dots, n) \end{cases}$$

と 1) に対応は H 上の stable orbital integral で表わせる。

すなわち,

$$\exists f_H \in \mathcal{C}(H) \quad \text{s.t.} \quad \Phi_{f_H}'(t_H) = \begin{cases} \Delta_H^G(t) \Phi_f^\sigma & \text{if } \textcircled{5} \\ 0 & \text{if } \textcircled{6} \end{cases}$$

この対応の dual として得られるのが stable tempered IED の持ち上げである。いま $\Theta_H \in H$ 上の stable tempered IED とし, その G への持ち上げ $\text{Lift } \Theta_H$ を次の様に定義する。

$$\text{定義} \quad (\text{Lift } \Theta_H)(f) = \Theta_H(f_H) \quad (f \in \mathcal{C}(G))$$

Θ_H の stable であることより, 右辺は f に対応する f_H のとり方に依らず, しかも $\text{Lift } \Theta_H$ もやはり G 上の tempered IED に属す。

る。 Shelstad は $\Theta_H = \chi_{\varphi'}$ に対し $\text{Lift } \chi_{\varphi'}$ は G 上の L -packet Π_{φ} に属する表現の指標 Θ_{π_i} を用いて

$$\text{Lift } \chi_{\varphi'} = \sum_{\pi_i \in \Pi_{\varphi}} \varepsilon_i \Theta_{\pi_i}$$

と表わされることを示した。(ε_i の値は $\chi_{\varphi'}$ により具体的に決定できる。)

文 献

- [1] Harish-Chandra : Invariant eigendistributions on semisimple Lie groups. Trans.Amer.Math.Soc., 119(1965) 457-508.
- [2] Hirai, T.: The characters of some induced representations of semisimple Lie groups. J.Math.Kyoto Univ., 8(1968) 313-363.
- [3] Hirai, T.: Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups I. Case of $SU(p, q)$. Japan.J. Math., 39(1970) 1-68.
- [4] Hirai, T.: Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups III. Method of construction for semisimple Lie groups. Japan.J.Math., 2(1976) 269-341.
- [5] Langlands, R.P.: Stable conjugacy; definitions and lemmas. Canad. J.Math., 31(1979) 700-725.
- [6] Shelstad, D.: Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$. Composito Math., 39(1979) 11-45.
- [7] Shelstad, D.: Orbital integral and a family of groups attached to a real reductive group. Ann.Sci.École Norm.Sup., 12(1979)

1-31.

- [8] Shelstad, D.: L-indistinguishability for real groups. Math. Ann., 258(1982), 385-430.
- [9] Mikami, S.: On character identities for $Sp(n, R)$ and the lifting of stable tempered invariant eigendistributions. Japan. J. Math., 11(1985), 361-385.