

## Monge-Ampère 方程式の Cauchy 問題

岩崎敷久 京大数理研

3 序. 最近の偏微分方程式の結果を使って Monge-Ampère 方程式の局所解 ( $C^\infty$  解) の存在を考えてみる。最近といってもこの 20 年以内くらいという意味である。楕円型, 狭あるいは対称双曲型といった, よく知られた型に次ぐものがいくつか見受けられる。その中では条件のわかりやすいものを Monge-Ampère 方程式にあてはめてみる。主に双曲型方程式の Cauchy 問題を考えることにする。中村前田氏の註いと合せると 3 程度取り扱うことになる。

古くは Monge-Ampère 方程式とは  $\mathbb{R}^2$  上で

$$\Phi = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 - f(x, y) = 0$$

のことを呼ぶようである。この線型化方程式は

$$D\Phi \varphi = (u_{yy}\partial_x^2 - 2u_{xy}\partial_x\partial_y + u_{xx}\partial_y^2)\varphi = f$$

となる。この線型化方程式  $D\Phi$  の微分方程式としての型によって  $\Phi$  の解  $u$  における型を定める。(1)  $f > 0$  なら,  $\Phi = 0$

の解  $u$  に対しては  $\det \begin{pmatrix} u_{yy} & -u_{xy} \\ -u_{xy} & u_{xx} \end{pmatrix}$  も又正より固有値は 0

でなくしかも同符号。(したがって  $D\Phi$  よって  $\Phi$  は楕円型となる。たとえば  $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  とすると,  $f = 1$ ,  $D\Phi = \partial_x^2 + \partial_y^2$ 。

(2) 更に  $f < 0$  なる固有値は異符号となり  $\Phi$  は狭双曲型。

$u = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$  とすると  $f = -1$ ,  $D\Phi = \partial_x^2 - \partial_y^2$ 。次に  $f = 0$  となる

のが simple 印  $\partial f \neq 0$  at  $f = 0$  とする。この時  $D\Phi$  が

kovarevskian であるとする。典型的には (3) Tricomi 型と (4)

Euler-Darboux 型の 2 つに分かれる。(3) の例として

$u = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}x^3$ ,  $f = x$ ,  $D\Phi = \partial_x^2 + x\partial_y^2$ 。(4) の例として

は、 $u = \frac{1}{2}(y + \frac{1}{2}x^2)^2$ ,  $f = y + \frac{x^2}{2}$ ,  $D\Phi = (\partial_x - x\partial_y)^2 + (y + \frac{x^2}{2})\partial_y^2$ 。

これらの特徴は、(3) は  $\partial_x f \neq 0$  (4) は  $(\partial_x - x\partial_y)f = 0$  と

なることである。これらに続くものは、 $f$  の critical points

の  $f = \partial f = 0$  での方程式である。 $\partial^2 f \neq 0$  とすると  $\partial^2 f$  の

固有値の正負によって、やはり方程式の型がかわる。例に

よって考へると、(5)  $u = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{12}x^4$  とすると

$f = (x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)^2$ ,  $D\Phi = (1 + x^2 + y^2)\partial_x^2 - 4xy\partial_x\partial_y +$

$(x^2 + y^2)\partial_y^2$ 。  $D\Phi$  の symbol  $D\Phi(5)$  は  $D\Phi(5) \geq 0$ 。

(6)  $u = \frac{1}{2}y^2 - (\frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{12}x^4)$ ,  $f = -(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)^2$

$D\Phi = (1 - x^2 - y^2)\partial_x^2 + 4xy\partial_x\partial_y - (x^2 + y^2)\partial_y^2$   $\therefore x = y = 0$  の点

で双曲型。(7)  $u = \frac{1}{2}y^2 \pm (\frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{12}x^4)$ ,

$f = \pm(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$ ,  $D\Phi = (1 \pm (y^2 - x^2))\partial_x^2 \mp 4xy\partial_x\partial_y \pm (x^2 - y^2)\partial_y^2$ 。

(1) (2) (3) は偏微分方程式の言葉でまとめると Real Principal type となる。これは中村前田で使われる。

(4) の一般型を Fuchs 型の偏微分方程式とよんで最近よく研

究されている。(5)は、退化楕円型と呼び、 $\bar{\Delta}_0$ に対する Laplacianがその代表として現われてくる型である。もっと簡単なものとしては、 $u = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{12}x^4$ ,  $f = x^2$ ,  $D\Phi = \Delta_x^2 + x^2\Delta_y^2$ 。

(6)は双曲方程式の中で特に実効的雙曲型とよばれるものである。典型は  $u = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}x^4$ ,  $f = -x^2$ ,  $D\Phi = \partial_x^2 - x^2\partial_y^2$  である。この(5)(6)の型がここで取りあつかうものである。(7)は(3)(4)のように場所により型の変るものである。線型方程式の中で簡単なものを考えれば  $\Delta_x^2 \pm (\alpha^2 - y^2)\Delta_y^2$  となる。この型の方程式については、どんな結果があるか、よくしらべてないので知らない。 $z = u(x, y)$  とおいた曲面を考えると(1)~(4), (7)はそれぞれ曲面の形においてそれぞれの特徴があらわれている。しかし(5)は(1)の(6)は(2)の曲面の少しびしゃげた形でしかない。実際に解を作る場合も楕円型及び狭双曲型での構成法を少し一般化するだけである。

§ 1. 方程式と結果 real Monge-Ampère (型)方程式とは、 $\Phi = 0$ では次の形をした2階の非線型方程式のことであると理解しておく。問題は局所的であるから  $\mathbb{R}^{n+1}$ 上で考える。

$$(1.1) \quad \Phi(u) = \det A - f = 0$$

但し,

$$A = \gamma^2 u + C(\alpha, u, \partial u),$$

$$f = f(\alpha, u, \partial u),$$

( $C(\alpha, u, v), f(\alpha, u, v)$ は  $x \in \mathbb{R}^{n+1}, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ の関数で,  $C$ は  $(n+1) \times (n+1)$ 実対称行列,  $f$ は実数値である。)

まず Cauchy問題を考える。方程式の形から初期面  $x_0 = 0$ と仮定(一般性を失う(た)はない。2階の方程式であるから初期条件は

$$(1.2) \quad (u, \partial u)|_{x_0=0} = (g_0, g_1).$$

条件を述べたために記号を定める。  $A$  の各成分を  $a_{ij}$ ,

$$A_{ij} = \{a_{kl}\}_{k, l \neq i, j} \text{ は } a_{ij} \text{ に対する小行列, } A^{\text{co}} = \{a_{ij}^{\text{co}}\}$$

$$a_{ij}^{\text{co}} = (-1)^{i+j} \det A_{j,i} \text{ は } A \text{ の Cofactor 行列と可る。}$$

このとき,  $\Phi$ の線型化方程式  $D\Phi$ は

$$D\Phi \varphi = \text{Tr}(A^{\text{co}} \cdot \partial^2 \varphi) + \text{Tr}[A^{\text{co}} \cdot (\sum_{\bar{i}} C_{v_{\bar{i}}} \partial_{\bar{i}} \varphi + C_u \varphi)] \\ - \sum_{\bar{i}} f_{v_{\bar{i}}} \partial_{\bar{i}} \varphi - f_u \varphi,$$

但し,  $C_{v_{\bar{i}}} = \partial_{v_{\bar{i}}} C$ , etc, で与えられる。

仮定.  $f$  は常に非正な関数 (負半定値) とする。

$$(1.3) \quad f \leq 0.$$

初期条件  $(u, \partial_0 u)|_{x_0=0} = (g_0, g_1)$  において

$$(1.4) \quad A_{00} > 0$$

が成立するものとする。

$A_{00} > 0$  より  $\det A_{00} \neq 0$ 。

$$\Phi(u) = (\det A_{00}) \partial_0^2 u + \dots$$

となつてゐるから、 $\Phi(u) = 0$  は

$$\partial_0^2 u = \dots$$

と書きかえられる。(Kowalevskian, 右辺は  $\partial_0 u$  をふくまぬ。 $D\Phi$  も同様。) 初期面  $\{x_0=0\}$  では右辺は初期条件によつて決定される。 $\partial_0^2 u$  を右辺で与え、以下順次  $\partial_0^s u$  ( $s \geq 2$ ) が  $\{x_0=0\}$  上で定まる。これより

$$\Phi(\tilde{u}) \text{ flat at } \{x_0=0\} \quad (\partial^\alpha (\Phi(\tilde{u}))|_{x_0=0} = 0, \forall \alpha)$$

なる  $\tilde{u} \in C^\infty$  が作れる。(Cauchy 問題の形式解)

この  $\tilde{u}$  を使って、次の条件を仮定する。

仮定.  $x=0$  において  $f(\alpha, \tilde{u}, \partial \tilde{u}) = 0$  ならず,  $x=0$  で

$$(1.5) \quad L^2 f(\alpha, \tilde{u}, \partial \tilde{u}) \neq 0,$$

$$\text{但し} \quad L = \sum_{j=0}^{\infty} a_{0j}^{\infty} (\alpha, \tilde{u}, \partial \tilde{u}, \partial^2 \tilde{u}) \partial_j.$$

この条件は、 $\tilde{u}$  のとり方によらない。実際に、 $\tilde{u} = \tilde{u}$  を  $\tilde{u}(\tilde{u}) = 0$  かつ  $\chi_0 = 0$  により決めれば、初期条件  $(g_0, g_1)$  に対する条件である。 $\tilde{u}$  の 2 階微分までしか陽に現われない。

定理 1.  $f$  は (1.3) をみたすとする。初期条件  $(g_0, g_1)$  が (1.4) (1.5) をみたす時、Cauchy 問題 (1.1-2) の  $C^k$ -解が原点  $\chi = 0$  の近傍で一意的に存在する。

注.  $\chi_0 = 0$  の原点の近傍  $\Omega$  と、十分大きな  $m$  の  $C^m(\bar{\Omega})$  を考へる。初期条件が定理の  $g = (g_0, g_1)$  に、 $C^m(\bar{\Omega})$  のノルム  $\|\cdot\|_m$  に関し、十分小さければ、解の一意的存在領域  $\Omega \ni \chi = 0$  は一様にとれる。又この範囲で初期条件  $g \in C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow$  解  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  の写像は連続である。

例.  $\det(\nabla_{ij} u) = K(x) h(x, u, \nabla u),$

$$\text{但し, } \nabla_{ij} = \partial_i \partial_j - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

$$h(0, 0, 0) \neq 0,$$

$$K \leq 0, \quad K(0) = 0, \quad \partial_0^2 K(0) \neq 0$$

とする。

$$g_0 = \frac{1}{2} \nu |x'|^2, \quad x' = (x_1, \dots, x_m) \quad \nu > 0.$$

$$g_1 = 0$$

とある。

$$A_{00}|_{x_0=0} = (\partial_i \partial_j g_0 - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k g_0 - \Gamma_{ij}^0 g_1)$$

より,

$$A_{00}|_{x=0} = \nu I > 0.$$

その他の  $a_{ij}|_{x=0} = 0$ . 又  $L = \sum_{j=0}^n a_{0j}^{\text{co}} \partial_j$  は,  $x=0$  では  $a_{00}^{\text{co}} = m\nu$ , 他は 0 より

$$L|_{x=0} = m\nu \partial_0$$

$$L^2 f|_{x=0} = (m\nu)^2 (\partial_0^2 K)(0) \cdot h(0,0,0) \neq 0.$$

一般に  $f$  が次の条件をみたしておけば, (1.4) 及び (1.5) が満たされる初期面と初期条件が作れる。

定理 2.  $f(x, u, v)$  は  $f \leq 0$  であつ 点  $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v})$

で  $f = 0$  となす

$$(1.6) \quad H_f(L, L) \neq 0 \quad \text{in } \Sigma,$$

但し,  $H_f$  は  $f = 0$  なる点  $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v})$  における  $f$  の hessian  $\nabla^2 f$  で

$$L = \xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{v} \cdot \xi \frac{\partial}{\partial u} - \langle C\xi, \frac{\partial}{\partial v} \rangle,$$

とす。この時, (1.1)  $\Phi(u) = 0$  は,  $x = \tilde{x}$  で  $C^0$ -可解, 即ち,  $x = \tilde{x}$  の近傍で (1.1) を満たす  $C^0$  解  $u$  が存在する。

又  $(u, \partial u)|_{x=\tilde{x}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$  と与えられる。

条件 (1.3-4) は未知関数  $u$  を  $-u$  とすれば、わかるように、不等式の向きに関して  $n+1$  が偶数の時は (1.3)  $f \leq 0$  が、 $n+1$  が奇数の時は (1.3) と (1.4) の不等式の向きが逆ということである。このことから、次の  $n+1$  が奇数の時は不等式の向きがどちらであっても解の形を問題にしなければ局所可解性が言えたことになる。(  $f$  が  $\geq 0$  のときも  $\leq 0$  のときも )  
 一方、 $f > 0$  の時は方程式を楕円型にすることが可能である。このことを使って局所可解性が示せる。これと同じ方法で、 $n+1$  が偶数 (奇数の時も当然ふくめて) の場合も、

$$(1.7) \quad f \geq 0,$$

と (1.6) との設定のもとで  $\Phi(u) = 0$  の局所可解性が示せる。

(1.6) があると (1.6) の  $L$  ( $H_f(L, ) \neq 0$ ) が transversal になるような初期値  $S = \{p=0\}$  をとる。 ( $Lp \neq 0$ ) 今の  $S$  を  $\chi_0 = 0$ ,  $\hat{\chi} = 0$  と思うと、(1.4) 及び

$$(g_0, g_1, \partial' g_0) |_{\chi=0} = (\tilde{u}, \tilde{v})$$

をみたす初期条件  $(g_0, g_1)$  が作れる。この時  $\Phi(u) = 0$  は Kovalevskian となり形式解  $\tilde{u}$  が作れる。これに対し (1.5) が成立する。ここまでは  $f$  の正負は無関係である。一方、 $u$  を  $\Phi(u) = 0$  の解で (1.4) を  $\chi = 0$  でみたすものとする。線型化方程式  $D\Phi$  の主要部は次の形をしてゐる。

$$(1.8) \quad P(\xi) = \langle \theta, \xi \rangle^2 + f(x, u, \partial u) E(\xi),$$

但し,  $\theta \neq 0$ ,  $E(\theta) = 0$ ,  $E(\xi) \geq \varepsilon |\xi|^2$  ( $\varepsilon > 0$ )  $\forall \xi \perp \theta$ .

(したがって,  $f \leq 0$  ならば  $P$  は双曲型になり条件 (1.5) は,  $\langle \theta, \xi \rangle^2 f \neq 0$  を意味するから, このとき  $P$  は実効的双曲型とよばれるものになり, Cauchy 問題は低階項の如何にかかわらず解ける。あとは Nash-Moser の陰関数定理を使って非線形方程式  $P=0$  に対する Cauchy 問題を解く。可解性のみを問題にする (一意性を考へない) ならば  $D$  型の未知関数  $u$  の変化に対して一様な右逆元の存在が言えればよい。

(1.6) (1.7) が成立するとき Garding 型の不等式及び楕円型不等式, その中でも楕円型について強い評価式が (1.8) を標象とする作用素  $P(\partial)$  に対して成立する。

$$\operatorname{Re}(P(\partial)\varphi, \varphi)_0 \geq \delta \|\varphi\|_{1/2} - C_\delta \|\varphi\|_0, (\delta > 0)$$

$$\|P(\partial)\varphi\|_s \geq \delta \|\varphi\|_{s+1} - C_{s,\delta} \|\varphi\|_0. (s \geq 0)$$

但し,  $\varphi \in C_0^\infty$  (nbd of  $x = \tilde{x}$ ),  $\|\cdot\|_s$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  上のソボレフノルムで,  $u$  の Fourier 変換を  $\hat{u}$  とすると

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 d\xi.$$

(注). 楕円型るとき ( $\delta > 0$  のとき) は右辺は  $1/2$  が  $1$ ,  $s+1$  が  $s+2$  で成立している。

このことから, 楕円型の時と同じく,  $\lambda = \tilde{\lambda}$  の十分小正の近傍での,  $D$  型に対する Nash-Moser の定理の適用はたえ得る。

右逆作用素の存在を示せ,  $\Phi(u) = 0$  の局所解を作れ。

定理.3.  $f(x, u, v)$  は (1.7) の  $f \geq 0$  でありとす。今, 集  $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{v})$  が  $f = 0$  なる (1.6) が成立すると仮定する。この時, (1.1)  $\Phi(u) = 0$  は  $x = \tilde{x}$  で  $C^p$ -可解である。又,  $u$  は  $(u, \partial u)|_{x=\tilde{x}}$  が  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  に十分近きものを取れる。

§2. 応用例. 簡単な応用例を Spivak の本から引用する。2次元 Riemannian manifold  $M$  の  $\mathbb{R}^3$  の局所等距離うめをみる。これは  $g$  を  $g$  の Metric とすると,  $M$  上の関数,  $u, v, w$  によって局所的に

$$(2.1) \quad g = du^2 + dv^2 + dw^2$$

とできるとを示すことである。Spivak の本によれば,  $g$  の一つの手法として, 新たな Metric

$$g - du^2$$

が flat 即ち Gauss 曲率が恒等的に 0 となる  $u$  を見つければ  $g - du^2$  に対して

$$g - du^2 = dv^2 + dw^2$$

なる局所座標  $(v, w)$  がユークリッド変換をのびいて一意にきまる, これを使って (2.1) を示す方法がある。そして,  $g - du^2$  が flat ということ,  $u$  が Darboux の方程式,  $M$  上の局所座標  $(x_0, x_1)$  に関して,

$$(2.2) \quad \det(\nabla_{\tilde{a}_j} u) = K(x) \det(g_{\tilde{a}_j} - \nabla_{\tilde{a}_j} u \nabla_{\tilde{a}_j} u),$$

をみたすことと同値である。(但し,  $K$  は  $(M, g)$  の Gauss 曲率。) したがって Darboux 方程式の解  $u$  を見つけることに問題は帰着される。今  $M$  の点  $P$  の近傍で  $g$  の Gauss 曲率  $K$  は半定値 ( $K \geq 0$  又は  $K \leq 0$ ) であるとす。もし  $K(P) = 0$  なら,  $L^2 K(P) \neq 0$  なる接ベクトル  $L$  があると仮定すると,

定理2及び定理3より,  $p$  の近傍で Darboux 方程式の  $C^1$  解  $U$  が存在する。よって, このよる  $(M, g)$  の真  $P$  には  $P$  の適当な近傍が  $\mathbb{R}^3$  への等距離うめこみ可能となる。

Cauchy 問題を解けるということは, 単に  $\Phi(u) = 0$  の解が存在するだけでなく, これらの解が初期条件 (初期面上の関数) でパラメトライズされている。うめこまれた曲面のあつ種の同値性を示すのに, これが使える。Spivak の本に E. E. Levi の定理として紹介されている。  $(M, g)$  の開集合  $U$  から  $\mathbb{R}^3$  への 2 つの等距離うめこみ  $\Phi_0, \Phi_1$  とその像曲面  $S_0, S_1$  とする。 ( $S_1$  を  $S_0$  の warp 曲面と呼ぶ。) さらにパラメータ  $t \in [0, 1]$  に連続な  $U$  の等距離うめこみ  $\Phi_t$  があつたとする。 ( $\Phi_0 = \Phi_t|_{t=0}, \Phi_1 = \Phi_t|_{t=1}$ ) このとき  $S_0$  は  $S_1$  と (あるいは  $S_0$  と  $S_1$  は) bendable と呼ぶことにする。今  $(M, g)$  の Gauss 曲率  $K$  は  $K \leq 0$  とする。  $S_0, S_1$  の第一基本形式  $b_0, b_1$  は真  $P$  で, ある接ベクトル  $T$  に関して  $b_0(T, T), b_1(T, T)$  が共に正 (又は共に負) になるものとする。  $K(p) = 0$  のときは  $b_0(L_0, L_0) = b_1(L_1, L_1) = 0$  なる  $L_0, L_1 \neq 0$  がスカラー倍をのぐいて一意にきまるが, その  $L_0, L_1$  に対して  $(L^2 K)(p) \neq 0$  と仮定する。この時,  $S_0$  と  $S_1$  は  $P$  の近傍で bendable である。又  $K < 0$  のときは, この結果を 2 回使うと  $S_0$  と  $\bar{S}_0$  ( $\Phi_0 = (u, v, w)$  とすると  $\bar{\Phi}_0 = (-u, v, w)$ ) が局所的に bendable となり,  $S_0$  は

任意の Warp と局所的に bendable (E, E, Levi) となる。

証明は次の様になる。  $\mathbb{R}^3$  の 2-フリッド変換を用いて、  
 $\Phi_0(p) = \Phi_1(p)$ ,  $\nabla \Phi_0(p) = \nabla \Phi_1(p)$  (よって  $p$  における  $S_0$  と  $S_1$   
 の接平面は一致している) としよ。  $\Phi_t(p) = (u_t, v_t, w_t)$   
 とおき、  $(w_0, w_0)$  は  $M$  の局所座標であるとす。  $u_0, u_1$  は  
 Darboux 方程式の解であるが、解答には、Darboux 方程式の  
 解  $u_t$  が  $u_0, u_1$  を含むものを作ればよい。  $p$  の近傍上で  $t$  に  
 関して連続に動く  $u_t$  を作れば、  $v_t, w_t$  は  $v_0(p) = v_t(p)$ ,  
 $w_0(p) = w_t(p)$ ,  $\frac{\partial w_t}{\partial v_0}(p) = 0$ ,  $\frac{\partial v_t}{\partial w_0}(p) > 0$ ,  $\frac{\partial w_t}{\partial w_0}(p) > 0$  7"  $v_t, w_t$   
 は共通な  $p$  の近傍上で一意にままり  $t$  に関して連続に動く。  
 7" で、  $p$  を通る初期曲線  $\Sigma$  を  $K(p) < 0$  のときは  $p$  における  
 接線が  $T$  をふくむように、  $K(p) = 0$  のときは、  $L_0$  と  $L_1$  の方  
 向を適当にえらぶと  $L_t = (1-t)L_0 + tL_1$  は  $L_t^2 K(p) \neq 0$  と  
 できる。この  $L_t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) が  $\Sigma$  に transversal になる様  
 取る。座標を適当にとれば  $\Sigma = \{x_0 = 0\}$  としよ。7" で  
 初期条件を

$$g_{0t} = (1-t)u_0 + tu_1 \Big|_{x_0=0},$$

$$g_{1t} = \frac{\partial}{\partial x_0} [(1-t)u_0 + tu_1] \Big|_{x_0=0}$$

7" 定めると、この  $(g_{0t}, g_{1t})$  に対して Darboux 方程式は  
 定理1の仮定をみたし、共通な  $p$  の近傍上に解  $u_t$  が  $t$  に関  
 して連続に存在する。

$\mathbb{R}^3$ へのうめこみを $\mathbb{R}^4$ に代えれば, どうなるであろうか。局所等距離うめこみは常に可能である。実際,  $g = dz^2$ が Gauss 曲率が負の metric になるように実数  $z$  を適当に選べば, これは  $\mathbb{R}^3$ へのうめこみが可能, 従って  $g = du^2 + dv^2 + dw^2 + dz^2$ 。bendable については,  $\mathbb{R}^3$ への2つの warp 曲面  $S_0, S_1$  の点  $P$  における2基本形式  $b_0, b_1$  に前と同様  $b_0(T, T), b_1(T, T)$  が共に正になる接ベクトル  $T$  があるとす。Gauss 曲率  $K$  については何も仮定しない。このとき,  $\mathbb{R}^4$ への連続な warp  $S_t$  により  $S_0$  は  $S_1$  に bendable である。  $S_0$  と  $S_1$  は  $\tilde{S}_t = (u_0 \cos \pi t, v_0, w_0, u_0 \sin \pi t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  により bendable であるから, 系として, Gauss 曲率  $K$  が正の点  $P$  でも,  $P$  の近傍の任意の  $\mathbb{R}^3$  への warp は  $\mathbb{R}^4$ への連続な warp により局所的に bendable である。証明は次りようになる。  $\mathbb{R}^3$ の時と同じ設定で, より簡単にするため,  $x = v_0, y = w_0$  と局所座標を取り,  $\frac{\partial}{\partial x} u_i = \frac{\partial}{\partial y} u_i = 0$  ( $i=0,1$ ) と仮定する。又  $T = \frac{\partial}{\partial x}$  とすると  $(\frac{\partial}{\partial x})^2 u_i > 0$  ( $i=0,1$ ) ます,  $\Phi_{\varepsilon} = (u_i, v_i, \varepsilon^{-1} \sin \varepsilon w_i, \varepsilon^{-1} (\cos \varepsilon w_i - 1))$  により,  $\varepsilon > 0, S_i$  は  $\mathbb{R}^4$ の中へ bend する。  $P$  まで,  $z_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_i - \varepsilon^{-1} (\cos \varepsilon w_i - 1))$ ,  $z_t = (1-t)z_0 + tz_1$  とおいて  $\tilde{g}_t = g - dz_t^2$  と考へる。これの Gauss 曲率を  $\tilde{K}_t$  とすると点  $P$  においては

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}_t &= K - \det \nabla^2 z_t \\
 &= K - \frac{1}{2} \det \nabla^2 u_t - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u_t,
 \end{aligned}$$

$$u_t = (1-t)u_0 + tu_1.$$

$\varepsilon$  を十分大きく取りと  $\tilde{K}_t$  は一様に負となる。  $\gamma = \tau \left[ \tilde{g}_t - d\tilde{z}_t^2 \right]$  の Gauss 曲率  $\equiv 0$  の Darboux 方程式を考へ、  $\gamma$  の初期面  $(\gamma=0)$  での初期値を  $\tilde{z}_t|_{\gamma=0} = [(1-t)\tilde{z}_0 + t\tilde{z}_1]|_{\gamma=0}$  及び  $\frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{z}_t|_{\gamma=0} = [(1-t)\frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{z}_0 + t\frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{z}_1]|_{\gamma=0}$ 、 但し、  $\tilde{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_1 + \varepsilon^{-1}(\cos \varepsilon \omega_1 - 1)]$  と取れば、 方程式は  $t$  に關してなめらかなに動く狭双曲型 (古典的に解けてゐる) になる。 従つて、  $\gamma$  の解  $\tilde{z}_t$  は  $t$  に關して、 なめらかなになり、  $t=0, 1$  では  $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1$  に一致してゐる。 よつて、  $t$  に關して連続な  $\tilde{v}_t, \tilde{w}_t$  があつて、  $\tilde{g}_t = d\tilde{z}_t^2 + d\tilde{v}_t^2 + d\tilde{w}_t^2$ 、  $\gamma = \tau$  で、  $\tilde{\Phi}_t = (\tilde{z}_t, \tilde{v}_t, \tilde{w}_t, \tau_t)$  とおくと、 これは  $\mathbb{R}^4$  への  $\mathbb{R}$  の近傍の局所等距離写像  $\tilde{\Phi}_t$  は  $\mathbb{R}^4$  の座標のとり代へ  $R$  (直交変換) で、  $R \cdot \tilde{\Phi}_t = \tilde{\Phi}_t$  となる。 故に、  $S_0$  と  $S_1$  をむすぶ warp の列が作れた。

## 参考文献

- [1] Reports on Global Analysis I, 微分幾何における非線型問題, 落合卓四郎編集, 1979.
- [2] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 5 (second edition), Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.
- [3] N. Iwasaki, The strongly hyperbolic equations and their applications, to appear in PATTERNS AND WAVES --- Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations --- North-Holland, 1986.