

高精度差分法による平行平板間の 剪断乱流の直接数値シミュレーション

京工織大・機械 徳永 宏 (Hiroshi Tokunaga)

里深信行 (Nobuyuki Satofuka)

石塔重工

宮川 浩 (Hiroshi Miyagawa)

§1. 序論

近年の電子計算機の長足の進歩により、流体力学における諸現象を数値シミュレーションで解明しようとする計算流体力学 (Computational Fluid Dynamics) といわれる分野が大きく発展して来た。乱流の研究分野でも、剪断乱流が *Large Eddy Simulation*¹⁾ 及び直接シミュレーション²⁾ により計算できる段階になって来た。しかし、乱流の数値シミュレーションにおいては、擬スペクトル法³⁾ と言われる手法がその主流を占めている。この手法は、Fourier 級数展開を用いるため、精度が良い反面、工学的に重要な複雑な流れの境界条件に適合しづらい側面がある。このために、高精度な差分法による乱流の数値計算手法が必要とされる。

二次元の一様等粘性乱流は、既に、修正微分求積法 (MDQ 法) によ、て計算され、擬スペクトル法と同一の結果を与えらるととも、高 Reynolds 数の乱流のシミュレーションにも適合することが示されている。³⁾ 本論文では、MDQ 法を拡張し、剪断乱流の直接シミュレーションを行、た結果を報告する。⁴⁾ 6次精度の MDQ 法を用い、Poisson 方程式も新たに開発された 6次精度の多重格子解法により解かれる。時間積分には、精度のよい Runge-Kutta-Gill 法を用いる。⁴⁾

§2. 基礎方程式及び数値計算方法

直交座標系 (x, y, z) に対する速度成分 $u = (u, v, w)$ についての Navier-Stokes 方程式と圧力 p に対する Poisson 方程式を基礎方程式として用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \frac{1}{R} \Delta u, \quad (1)$$

$$R = \frac{UL}{\nu},$$

$$\Delta p = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z}\right). \quad (2)$$

図1に計算領域が示されている。空間微分項の離散化は、全て MDQ 法で行なわれる。固体境界壁の影響をうける y 方向の離散化を最初に行う。格子点 $y = y_j$ 上の u の空

間微分は次のように表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y_j} = \sum_{m=0}^{j+M-1} a_{jm} u(y_{j+m}) \equiv D_M(u_j), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=y_j} = \sum_{m=0}^{j+M-1} b_{jm} u(y_{j+m}) \equiv D_M^2(u_j).$$

$$b_{jm} = \sum_{l=0}^{j+M-1} a_{jl} a_{lm}, \quad (4)$$

ここでMDQ法の指数Mを $M=7$ とし、 Δy に適当な整数値を与えることにより、 y 方向のあらゆる格子点での離散化が行える。^{4~6)} x 方向も z 方向についても同様の離散化を行うと、放物型偏微分方程式である Navier-Stokes 方程式は、次のような連立の常微分方程式に帰着できる。

$$\frac{dU}{dt} = F(U_i, D_M(U_i), D_M^2(U_i), D_M(P_i)) \equiv F(U, P),$$

$$U = (u_{222}, u_{322}, \dots, u_{I-1, J-1, K-1}, v_{222}, v_{322}, \dots, v_{I-1, J-1, K-1}, w_{222}, w_{322}, \dots, w_{I-1, J-1, K-1})^T,$$

$$P = (p_{222}, p_{322}, \dots, p_{I-1, J-1, K-1})^T. \quad (5)$$

連立常微分方程式を解くために、4段階4次精度の陽的な Runge-Kutta-Gill 法が用いられる。

§3. 6次精度多重格子法による Poisson 解法

工学的に重要な流れは、複雑な境界条件で支配されている。高精度である。且つこの要求にたえられる Poisson 解法は殆ど報告されていなかった。最近、4次精度⁵⁾及び6次精度⁶⁾のものが発表されたが、本論文においては6次精度のものを用いる。この方法は、多段階の格子系 $\Omega^h, \Omega^{2h}, \dots, \Omega^{2^m h}$ 、ただし、その格子幅は、それぞれ $h, 2h, \dots, 2^m h$ と2倍毎に粗くなるが、を用い、異なる格子間で反復解法を用いることにより、その収束を加速しようという方法である。

図2に、Poisson 解法の収束過程を示すが、多重格子法を用いることにより、6次精度でありながら、2次精度のSOR法の1/3の計算時間で収束解が得られる。

§4. 剪断乱流の直接数値シミュレーション

臨界 Reynolds 数を越えた剪断乱流の直接シミュレーションは、現在の super computer をもってしても、記憶容量と計算時間の制約から現実的でない。直接シミュレーションは、亜臨界 Reynolds 数で行なわれているので、²⁾ 本論文においても、この Reynolds 数の範囲で、平行平板間の三次元剪断乱流のシミュレーションを行う。この場合、初期条件は、Benney-Lin 型と呼ばれるものが使われている。²⁾

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) = & (1-y^2)z + \text{Real} [u_{2D}(y) \exp(i\alpha x)] \\
 & + \text{Real} [u_{+3D}(y) \exp(i(\alpha x + \beta z))] \\
 & + \text{Real} [u_{-3D}(y) \exp(i(\alpha x - \beta z))], \quad (6)
 \end{aligned}$$

ここで $u_{2D}(y)$ および $u_{\pm 3D}(y)$ は、Poiseuille 流に加えられた擾乱の分布を表すが、これは、流れの安定性の直接シミュレーションにより求められる。^{6,7)}

三次元剪断流のシミュレーションは、先ず $R=750$ で行なわれたが、この場合の時間発展が図3に示されている。二次元の基本波モードは急速に減少し、二次元の倍波数モードが三次元の基本波モードも結局は減衰し、この程度の Reynolds 数では乱流への遷移が起らな¹⁾。

次に、三次元剪断流の直接シミュレーションが $R=1250$ で行なわれ、その時間発展の様子が図4に描かれている。この場合、二次元基本波モードの減少はわずかであり、二次元倍波数モードは励起された後に一定のレベルに保たれる。三次元基本波モードは、二次元基本波モードより大きくなり、乱流への遷移が生じる。

図5に horseshoe 渦の形成を示す等渦度曲線が示されている。壁面近くの x - z 平面と y - z 平面での x 軸方向の等渦度線は、形成された horseshoe 渦は、平行平板の上部

にまで引き上げられ、強い渦度を持つことを示している。また、 z 方向の等渦度線も壁面近くの $x-z$ 平面で示されているが、いずれも horseshoe 渦は強くなり、乱流への遷移の初期の段階を示している。これらの結果は、平面 Poiseuille 流の乱流への遷移の実験⁶⁾ と良好な一致を示す。

§5. 結論

修正微分求積法に基づいた剪断乱流の直接シミュレーションに対する6次精度の数値計算方法が提案され、この方法により平行平板間の剪断乱流のシミュレーションが実行され、次のような結論が得られた。

- (i) 6次精度多重格子法による Poisson 解法は、2次精度のSOR法よりも計算効率が高く、 $32 \times 32 \times 32$ の格子でその計算時間をSOR法の $1/3$ に短縮できる。
- (ii) 平行平板間の三次元剪断乱流の直接シミュレーションが実行され、 $R=750$ では乱流への遷移は起こらないが、 $R=1250$ では生じることが確認された。
- (iii) 剪断乱流の直接シミュレーションにおいて、horseshoe 渦の形成が確認され、乱流遷移における渦構造の重要性が明らかにされた。

文献

- 1) P. Moin and J. Kim, J. Fluid Mech., 118 (1982) 341.
- 2) S. A. Orszag and L. C. Kells, J. Fluid Mech., 96 (1980) 159.
- 3) N. Satofuka, H. Nishida and H. Nakamura, Proc. 9th Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn., Saclay, France, Springer, (1984).
- 4) H. Tokunaga, N. Satofuka and H. Miyagawa, Proc. 10th Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn., Beijing, China, Springer, (1986).
- 5) H. Tokunaga, N. Satofuka and Y. Tanimura, Int. Symp. Comp. Fluid Dynam.-Tokyo, Japan, (1985), 293.
- 6) H. Tokunaga, N. Satofuka and H. Miyagawa, Memoirs of Faculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology, 34 (1985) 72.
- 7) 徳永, 日本流体力学会誌, 5 (1986) 27.
- 8) M. Nishioka, S. Iida and M. Asai, Transition of Turbulence, ed. R. E. Meyer, Academic Press, (1981), 113.

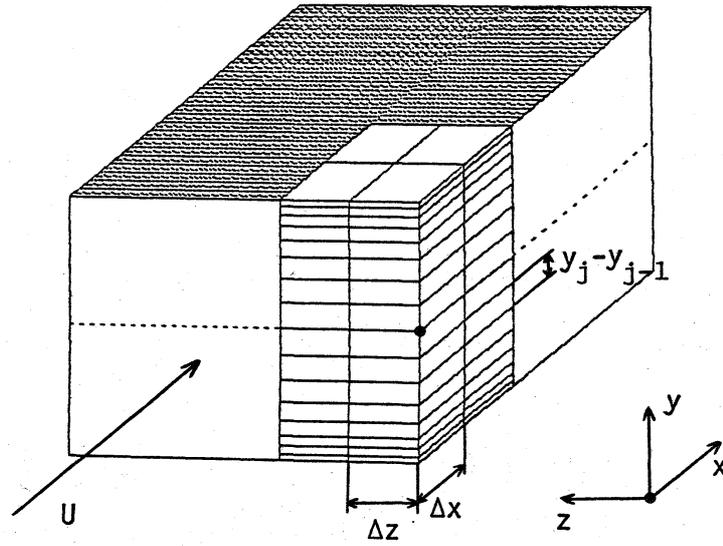


図1. 平行平板間の三次元剪断乱流の直接シミュレーションの計算領域.

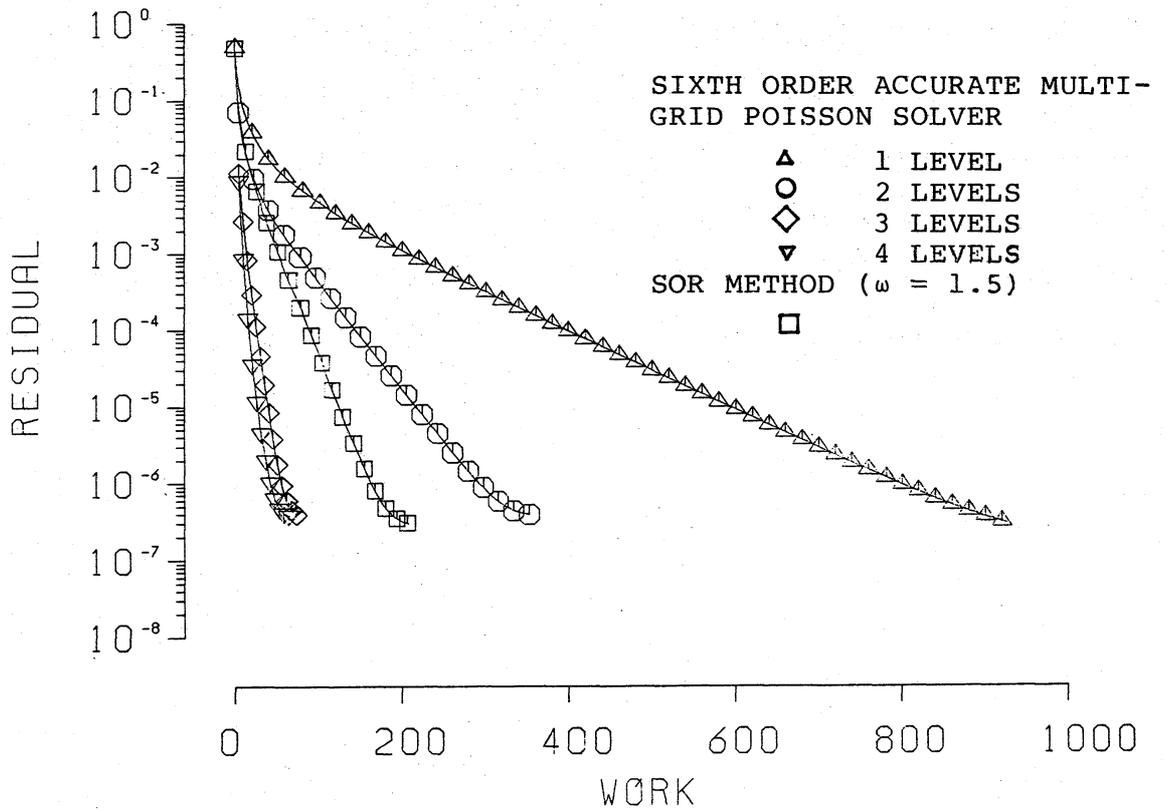


図2. 6次精度多重格子法によるPoisson解法の収束過程(32×32×32の格子).

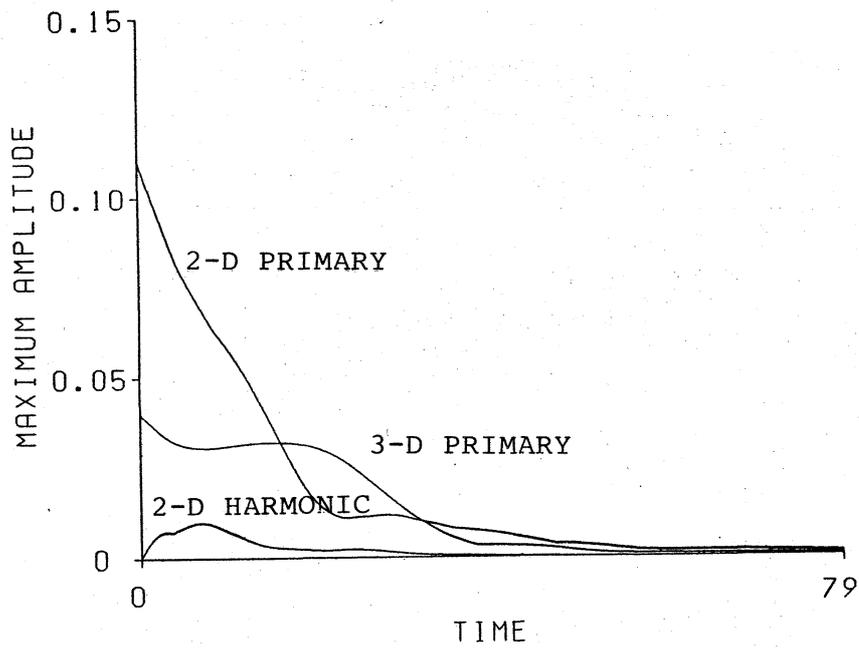


図3. $R=750$ の三次元剪断流の時間発展.

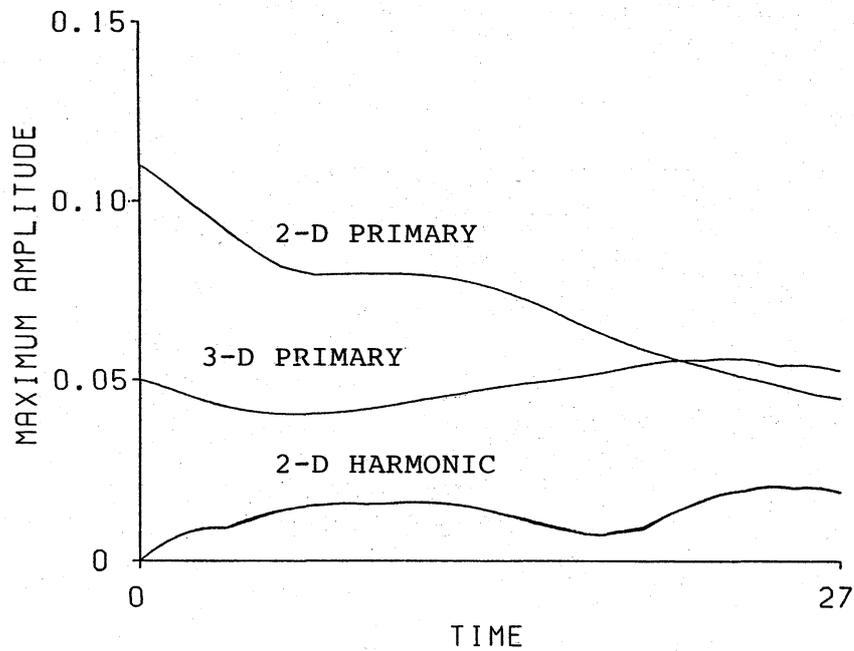


図4. $R=1250$ の場合の三次元剪断乱流の時間発展.

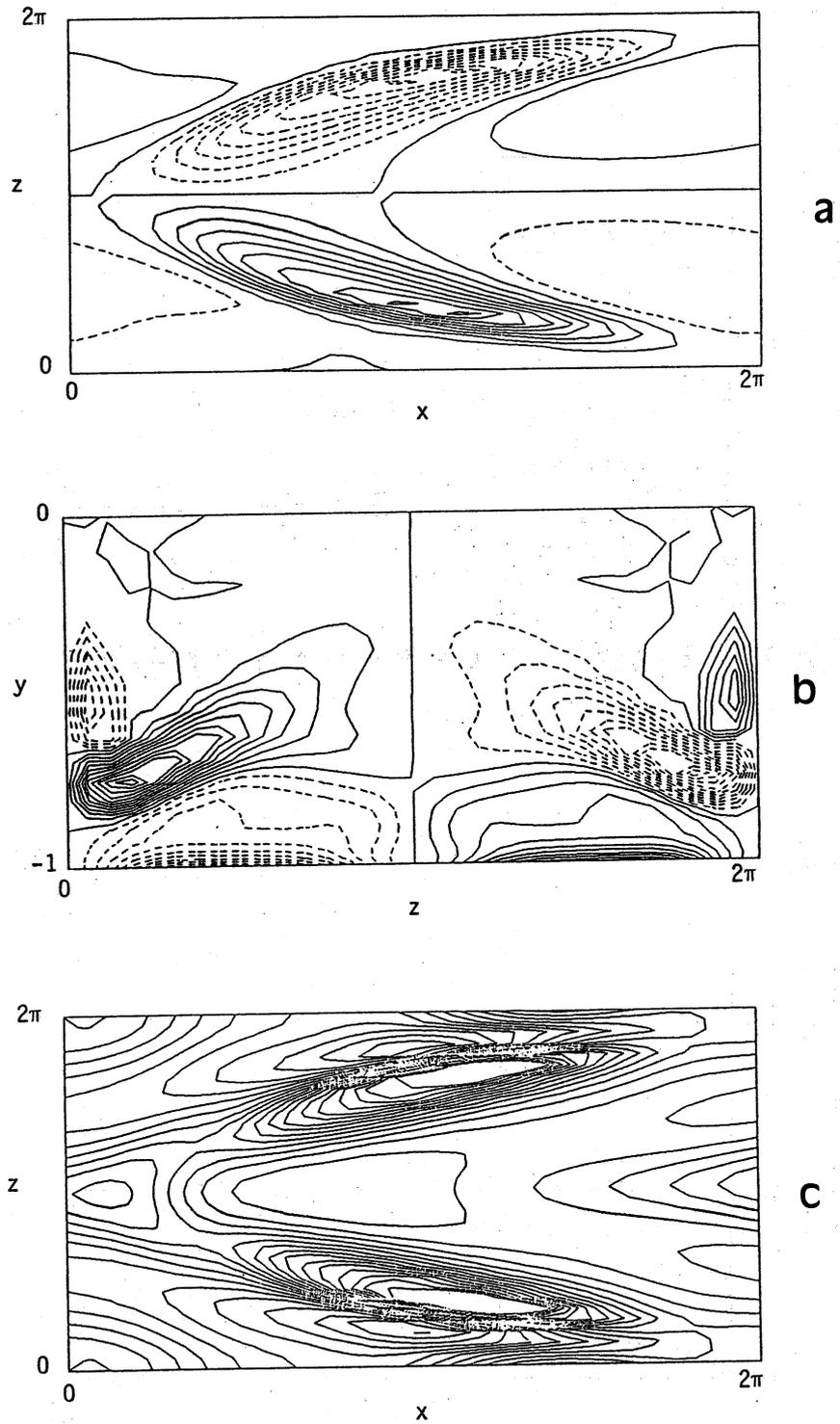


図5. 三次元剪断乱流の等渦度線図。
horseshoe vortexの形成を示す。(a) ω_x , (b) ω_x
(c) ω_z .