数理解析研究所講究録
第627巻 1987年 102-110

BMOにおけるL^∞の一側面

富山大・理 風巻紀彦 (Norihiko Kazamaki)

$(\Omega, \mathcal{F}, P : (\mathcal{F}_t))$を通常の条件をみたす確率系とし、$(\mathcal{F}_t)$に関するmartingaleのsample continuityを仮定する。次に、Mをmartingale, λを実数とし

$$Z_t^{(\lambda)} = \exp(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t) \quad (0 \leq t < \infty)$$

とおく。簡単のため、$Z^{(1)}$をZで表すことにする。特に、Mがuniformly integrableの場合、$1 \leq p < \infty$に対し

$$\|M\|_{BMO_p} = \sup_T \| E[|M_\infty - M_T|^p | \mathcal{F}_T]^{1/p} \|_\infty$$

とおく。ここで、Tはstopping timeである。これが有限のとき、MをBMO-martingaleといい、その全体はBMOで表される。周知のように、$\|M\|_{BMO_p}$はBMO上のequiv. normsをなしている。定義より$\|M\|_{BMO_1} \leq 2\|M\|_\infty$だから、$L^\infty \subset BMO$となる。しかも、trivial caseを除き、$L^\infty$はBMOにおいてdenseでもないしclosedでもない(Dellacherie-Meyer-Yor [1])。

本稿では、L^∞と逆Hölder不等式の関連について述べる。

逆Hölder不等式とは.

(R_p) $\quad \exists C_p > 0,\ \forall T,\ E[Z_\infty^p \mid \mathcal{F}_T] \leq C_p Z_T^p$

のことで，特に $E[Z_\infty] = 1$ のとき，次の関係が成立している：

$$M \in BMO \iff \exists p > 1,\ Z \in (R_p)$$

なお，$M \in BMO$ から，$E[Z_\infty] = 1$ が簡単にわかる。以下，この条件を仮定して話を進めよう。

先ず，M を unif. integ. martingale とし

$$a(M) = \sup\{\alpha > 0 : \exists C_\alpha > 0,\ \forall T,\ E[\exp\{\alpha|M_\infty - M_T|\} \mid \mathcal{F}_T] \leq C_\alpha\}$$

とおく。従って，"$M \in BMO \iff a(M) > 0$" である。

次に，$1 \leq p < \infty$ に対し，$d_p(M,N) = \|M - N\|_{BMO_p}$ $(M, N \in BMO)$ とする。このとき：

補題1 (Emery [2])

$$\frac{1}{4\, d_1(M, L^\infty)} \leq a(M) \leq \frac{4}{d_1(M, L^\infty)} \qquad (M \in BMO)$$

従って，"$M \in \overline{L^\infty} \iff a(M) = \infty$" である。

定理1 $\quad M \in \overline{L^\infty} \iff (\forall \lambda \in \mathbb{R})\ Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p)$

$\because$

$\longrightarrow$: 仮定により $a(M) = \infty$。従って，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$，$p > 1$ に対し

$$E[Z_\infty^{(\lambda)p} \mid \mathcal{F}_T] = Z_T^{(\lambda)p} E\left[\left\{\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_T^{(\lambda)}}\right\}^p \mid \mathcal{F}_T\right]$$

$$\leq Z_T^{(\lambda)p} E[\exp\{|\lambda| p\, |M_\infty - M_T|\} \mid \mathcal{F}_T]$$

$$\leq C_{\lambda,p} Z_T^{(\lambda)p}$$

i.e., $Z^{(\lambda)} \in (R_p)$

$\longleftarrow$: $M \in BMO$ だから

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \exists C_0 > 0 : \forall T,\ E[\exp\{\tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\} \mid \mathcal{F}_T] \leq C_0$$

次に，任意の $\alpha > 0$ に対し，$\varepsilon > 0$ を $\varepsilon < \min\{2\alpha, \frac{\varepsilon_0}{2\alpha}\}$ とし，$p = \frac{2\alpha}{\varepsilon}$ とおくと，$1 < p < \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^2}$ となる。Schwarz's ineq. を用いて，

$$\begin{aligned}
E[\exp\{\alpha(M_\infty - M_T)\} \mid \mathcal{F}_T] &= E[\exp\{\alpha(M_\infty - M_T) - \tfrac{\varepsilon_0}{4}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\} \\
&\qquad \times \exp\{\tfrac{\varepsilon_0}{4}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\} \mid \mathcal{F}_T] \\
&\leq E[\exp\{2\alpha(M_\infty - M_T) - \tfrac{\varepsilon_0}{2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\} \mid \mathcal{F}_T]^{1/2} \\
&\qquad \times E[\exp\{\tfrac{\varepsilon_0}{2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\} \mid \mathcal{F}_T]^{1/2} \\
&\leq C_0^{1/2} E[\exp\{\tfrac{2\alpha}{\varepsilon}(\varepsilon M_\infty - \varepsilon M_T) - \tfrac{\varepsilon_0}{2\varepsilon^2}(\langle \varepsilon M\rangle_\infty - \langle \varepsilon M\rangle_T)\} \mid \mathcal{F}_T]^{1/2} \\
&\leq C_0^{1/2} E[\{\tfrac{Z_\infty^{(\varepsilon)}}{Z_T^{(\varepsilon)}}\}^p \mid \mathcal{F}_T]^{1/2} \\
&\leq C_{\alpha,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

同様の計算により，$E[\exp\{-\alpha(M_\infty - M_T)\} \mid \mathcal{F}_T] \leq C_0^{1/2} E[\{\frac{Z_\infty^{(-\varepsilon)}}{Z_T^{(-\varepsilon)}}\}^p \mid \mathcal{F}_T]^{1/2}$ を得る。従って

$$\forall \lambda > 0,\ \exists C_\alpha > 0 : \forall T,\ E[\exp\{\alpha |M_\infty - M_T|\} \mid \mathcal{F}_T] \leq C_\alpha$$

つまり，$a(M) = \infty$。このとき，補題1より，$M \in \overline{L^\infty}$ □

<u>注意1</u>. 上記証明より，実際は次の成立が分る：

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall \lambda \ (|\lambda| < \delta), \ Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p) \implies M \in \overline{L^\infty}$$

注意2　$\forall \lambda > 0, \ Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p) \not\Longrightarrow M \in \overline{L^\infty}$.

さらに、$Z, Z^{(-1)} \in \bigcap_{p>1} (R_p) \not\Longrightarrow M \in \overline{L^\infty}$。以下に、これを例証する。

$B = (B_t, \mathcal{F}_t)$ を 1-dim. Brownian Motion on $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, $B_0 = 0$ とし、$\tau = \inf\{t : |B_t| = 1\}$ とおく。このとき、$E_Q[\exp(\frac{\pi^2}{8}\tau)] = \infty$ ([4]) (ただし、E_Q は Q に関する平均)。次に、$dP = \exp(B_\tau - \frac{\tau}{2}) dQ$ とおくと、明らかに P は確率測度である。ここで Girsanov の変換 $M = 2B^\tau - 2\langle B^\tau \rangle$ を考えよう。M は BMO-martingale/P で $\langle M \rangle = 4\langle B^\tau \rangle$ である ([5])。条件付平均の定義により、任意の $\lambda \in \mathbb{R}$, $p > 1$ に対し

$$
\begin{aligned}
E\left[\left\{\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_T^{(\lambda)}}\right\}^p \middle| \mathcal{F}_T\right] &= E_Q\Big[\exp\left\{(B_\tau - B_{\tau\wedge T}) - \frac{1}{2}(\tau - \tau\wedge T)\right\} \\
&\qquad \times \exp\left\{p\lambda(M_\infty - M_T) - \frac{p}{2}\lambda^2(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\right\} \Big| \mathcal{F}_T\Big] \\
&= E_Q\Big[\exp\left\{(1+2p\lambda)(B_\tau - B_{\tau\wedge T})\right\} \\
&\qquad \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(4p\lambda^2 + 4p\lambda + 1)(\tau - \tau\wedge T)\right\} \Big| \mathcal{F}_T\Big]
\end{aligned}
$$

従って、$4p\lambda^2 + 4p\lambda + 1 \geqq 0$ (i.e., $|\lambda + \frac{1}{2}| \geqq \frac{1}{2\sqrt{q}}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) ならば

$$E\left[\left\{\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_T^{(\lambda)}}\right\}^p \middle| \mathcal{F}_T\right] \leqq \exp\{2(1 + 2p|\lambda|)\}.$$

例えば、$\lambda > 0$ 又は $\lambda \leqq -1$ のとき、$Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p)$。特に $Z, Z^{(-1)}$ はすべての (R_p) 条件をみたしている。

他方、$-1 < \lambda < 0$ のとき、$p_\lambda = \dfrac{1 + \pi^2/4}{1 - (2\lambda+1)^2}$ とおけば、$p_\lambda > 1$ で $-\frac{1}{2}(4p_\lambda\lambda^2 + 4p_\lambda\lambda + 1) = \frac{\pi^2}{8}$ となるから、

$$E[\{Z_\infty^{(\lambda)}\}^{p_\lambda}] \geqslant \exp\{-(1+2p)\}\cdot E_Q[\exp(\frac{\pi^2}{8}\tau)] = \infty .$$

つまり、$-1<\lambda<0$ のとき、$Z^{(\lambda)}$ は、(R_{p_λ}) 条件をみたさない。従って、定理1により $M \notin \overline{L^\infty}$。実際に、少し計算すると

$$d_1(M, L^\infty) \geqslant \frac{4}{4+\pi^2}$$

が得られる。

さて、次に、Z に対する (R_p) 条件が $\mathrm{dist.}(M, L^\infty)$ に依存することを述べよう。先ず

$$\Phi(p) = \left\{1 + \frac{1}{p^2}\log\frac{2p-1}{2(p-1)}\right\}^{1/2} - 1 \qquad (1<p<\infty)$$

とおく。明らかに、Φ は conti. decreas. 付 で、$\Phi(1+0)=\infty$, $\Phi(\infty)=0$.

<u>補題2</u>　$\|M\|_{BMO_2} < \Phi(p) \Longrightarrow Z \in (R_p)$.

$\because$

本質的には、Emery's idea ([3]) に従って示す。便宜上

$$n(M) = 2\|M\|_{BMO_1} + \|M\|^2_{BMO_2}$$

とおく。このとき

$$n(M) \leqslant (\|M\|_{BMO_2}+1)^2 - 1 < \frac{1}{p^2}\log\frac{2p-1}{2(p-1)} \quad \text{i.e., } 0 < \frac{2(p-1)}{2p-1}e^{p^2 n(M)} < 1.$$

$K_{p,M} = 2\Big/\left\{1 - \frac{2(p-1)}{2p-1}e^{p^2 n(M)}\right\}$ とおき、先ず

(*)　　$E[Z_\infty^p] \leqslant K_{p,M}$

を示す。

$n(M^T) \leqslant n(M)$ だから $K_{p,M^T} \leqslant K_{p,M}$。従って、あらかじめ Z を有

界と仮定できる。次に，$\delta = \exp\{-p\, n(M)\}$ とおくと，任意の stopping time T に対し

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{Z_\infty}{Z_T} < \delta \,\middle|\, \mathcal{F}_T\right) &= P\left(\frac{1}{\delta} < \frac{Z_T}{Z_\infty} \,\middle|\, \mathcal{F}_T\right) \\
&= P\left(\log\frac{1}{\delta} < -(M_\infty - M_T) + \frac{1}{2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T) \,\middle|\, \mathcal{F}_T\right) \\
&\leqq \frac{1}{p\, n(M)} E[\,|M_\infty - M_T| + \frac{1}{2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T) \mid \mathcal{F}_T] \\
&\leqq \frac{1}{2p\, n(M)} \cdot n(M) = \frac{1}{2p}
\end{aligned}$$

i.e., $$P\left(\frac{Z_\infty}{Z_T} \geqq \delta \,\middle|\, \mathcal{F}_T\right) \geqq 1 - \frac{1}{2p}$$

いま $\lambda > 1$ を任意にとり，$T = \inf\{t : Z_t > \lambda\}$ とおく。このとき，$Z_T = \lambda$ on $\{T < \infty\}$ だから

$$P(Z_\infty \geqq \delta\lambda \mid \mathcal{F}_T) \geqq \left(1 - \frac{1}{2p}\right) I_{\{T<\infty\}}.$$

$\{Z_\infty > \lambda\} \subset \{T < \infty\}$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}
E[Z_\infty : Z_\infty > \lambda] &\leqq E[Z_\infty : T < \infty] \\
&\leqq E[Z_T : T < \infty] \\
&\leqq \lambda P(T < \infty) \\
&\leqq \frac{2p}{2p-1} \lambda P(Z_\infty \geqq \delta\lambda).
\end{aligned}$$

両端辺に，$(p-1)\lambda^{p-2}$ を掛けて λ に関して区間 $[1,\infty)$ 上で積分すると，

$$E[Z_\infty(Z_\infty^{p-1} - 1) : Z_\infty > 1] \leqq \frac{2p}{2p-1} \cdot \frac{p-1}{p} E\left[\left(\frac{Z_\infty}{\delta}\right)^p - 1 : Z_\infty > \delta\right]$$

$\delta = e^{-p\, n(M)}$ だから

$$E[Z_\infty^p : Z_\infty > 1] \leqq \left\{1 + \frac{2(p-1)}{2p-1} e^{p^2 n(M)}\right\} \Big/ \left\{1 - \frac{2(p-1)}{2p-1} e^{p^2 n(M)}\right\}$$

これを整頓すると (*) がえる。

次に T を fix し, $A \in \mathcal{F}_T$, $P(A) > 0$ とし

$$M'_t = M_{T+t} - M_T\ ,\quad \mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{T+t}\ ,\quad P'(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

とおくと, M' は $(\mathcal{F}'_t)$-martingale $/ P'$, $\langle M' \rangle_t = \langle M \rangle_{T+t} - \langle M \rangle_T$,

従って, $\|M'\|_{BMO_2(P')} \leq \|M\|_{BMO_2}$, $\exp(M'_t - \frac{1}{2}\langle M' \rangle_t) = Z_{T+t}/Z_T$,

$K_{p,M'} \leq K_{p,M}$ となる。このとき (*) より

$$E'\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^p\right] \leqslant K_{p,M} \quad \text{i.e.,}\ E\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^p : A\right] \leqslant K_{p,M} P(A).$$

換言すれば, $E[Z_\infty^p \mid \mathcal{F}_T] \leqslant K_{p,M} Z_T^p$ $\square$

定数 $K > 0$ に対し, $L^\infty_K = \{M : |M| \leqslant K\}$ とおく。このとき:

<u>定理 2</u> $1 < p < \infty$ に対し,

$$d_2(M, L^\infty_K) < e^{-K}\Phi(p) \Longrightarrow Z \in (R_p)$$

$\because$

仮定により, $\exists N \in L^\infty_K : \|M - N\|_{BMO_2} < e^{-K}\Phi(p)$。簡単のため $X = M - N$ とおく。測度の変換 $d\hat{P} = \exp(N_\infty - \frac{1}{2}\langle N \rangle_\infty)\, dP$ を施すことにより, $\hat{X} \equiv X - \langle X, N \rangle$ は martingale $/ \hat{P}$ で $\langle \hat{X} \rangle = \langle X \rangle$ となる。$\hat{X}$ に対応する exponential martingale $/ \hat{P}$ を都合により $\mathcal{E}(\hat{X})$ で表すと

$$Z = \exp(N - \tfrac{1}{2}\langle N \rangle) \cdot \mathcal{E}(\hat{X}).$$

がなりたつ。このとき,

$$E\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^p \,\middle|\, \mathcal{F}_T\right] = E\Big[\exp\{(p-1)[(N_\infty - N_T) - \tfrac{1}{2}(\langle N\rangle_\infty - \langle N\rangle_T)]\}$$
$$\times \left\{\frac{\mathcal{E}(\hat{X})_\infty}{\mathcal{E}(\hat{X})_T}\right\}^p \cdot \exp\{(N_\infty - N_T) - \tfrac{1}{2}(\langle N\rangle_\infty - \langle N\rangle_T)\} \,\Big|\, \mathcal{F}_T\Big]$$
$$\leq e^{2(p-1)K}\, \hat{E}\left[\left\{\frac{\mathcal{E}(\hat{X})_\infty}{\mathcal{E}(\hat{X})_T}\right\}^p \,\middle|\, \mathcal{F}_T\right]$$

ところで，

$$\hat{E}[\langle\hat{X}\rangle_\infty - \langle\hat{X}\rangle_T \mid \mathcal{F}_T] = E[(\langle X\rangle_\infty - \langle X\rangle_T)\exp\{(N_\infty - N_T) - \tfrac{1}{2}(\langle N\rangle_\infty - \langle N\rangle_T)\} \mid \mathcal{F}_T]$$
$$\leq e^{2K} E[\langle M-N\rangle_\infty - \langle M-N\rangle_T \mid \mathcal{F}_T]$$
$$\leq e^{2K} \|M-N\|^2_{BMO_2} < \Phi(p)^2$$

$$\text{i.e.,}\quad \|\hat{X}\|_{BMO_2(\hat{P})} < \Phi(p)$$

従って，補題2により，$\mathcal{E}(\hat{X}) \in (R_p)$。 つまり，$Z \in (R_p)$． □

<u>注意3</u>　条件 (i) $\langle M-N, N\rangle = 0$ 　(ii) $\|M-N\|_{BMO_2} < \Phi(p)$ をみたす $N \in \overline{L^\infty}$ が存在するとき，$Z \in (R_p)$ である。これは，条件(i)から，$Z = \exp(N - \frac{1}{2}\langle N\rangle)\cdot\exp(M-N-\frac{1}{2}\langle M-N\rangle)$ がなりたつことに注意し，定理1，定理2 を適用すれば比較的簡単に証明できる。

参考文献

[1] C. Dellacherie, P.A. Meyer and M. Yor, Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO, Sém. Prob. XII Lecture Notes in Math. 649 (1978), 98-113

[2] M. Emery, Le théorème de Garnett-Jones d'après Varopoulos, Sém. Prob. XV, Lecture Notes in Math. 850 (1981), 278-284.

[3] M. Emery, Une définition faible de BMO, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 21-1 (1985), 59-71.

[4] K. Ito and H. P. Mckean, Jr, Diffusion processes and their sample paths, Springer-Verlag, New York, 1964

[5] N. Kazamaki, Martingale の理論, Seminar on Probability, vol. 51, 1981.