数理解析研究所講究録
第 634 巻 1987 年 93-109

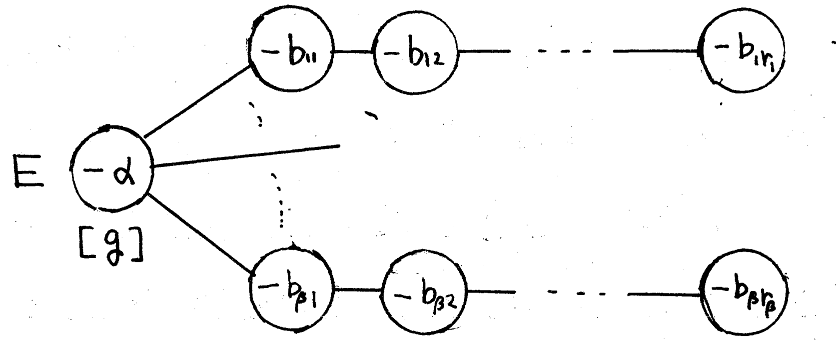
"Star-shaped" resolution を持つ Gorenstein 特異点について

筑波大数学系　泊　昌孝（Masataka TOMARI）

このノートは [T-W2] の続きとして，渡辺敬一氏（東海大理）及び，日高文夫氏（専修大北海道短大）らとの，議論にもとづいた内容を紹介するものである（詳細は，[H-T], [T-W1] を参照されたい。）。

§0. 以下，特に断わらぬ限り，基礎体は複素数体 $\mathbb{C}$ であるとする。正規2次元特異点 (W,w) であって，特異点解消 $f: (\tilde{X}, A) \longrightarrow (W,w)$ に於ける例外集合 A の weighted dual graph Γ が，次のような "star-shaped" graph (i.e., tree graph であって，central curve と呼ばれる vertex が高々 1 つしかないようなもの) としよう：

Γ:



β 本の $\mathbb{P}^1$-chain よりなる枝．

この時，(特に central curve が存在する時)，局所環 $\mathcal{O}_{W,w}$ に filtration $\{F^k\}_{k\geq 0}$ を；$F^k \leq f_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-k\cdot E)) \subseteq \mathcal{O}_{W,w}$ によって定め，次数付環 $G = \bigoplus_{k\geq 0} F^k/F^{k+1}$ と $\mathcal{O}_{W,w}$ を比較しようという事を考えて，次を問題として挙げた [T-W 2]：

<u>問題</u> <u>G が正規となる為の良い条件を求めよ。</u>

すでに示された事柄の中で基本的と思われるのは，G が孤立特異点のみを持つ integral domain になり，

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow R(E,D) \longrightarrow H^1_{G_+}(G) \longrightarrow 0$$

と書かれる事である。ただし，$R(E,D)$ は，上記の例外集合より決まる E 上の $\mathbb{Q}$-divisor D を用いて，$R(E,D) = \bigoplus_{k\geq 0} H^0(E,\mathcal{O}_E(k\cdot D))$ としてあらわされる normal two-dimensional graded ring であって，その特異点解消の例外集合に，与えられた Γ があらわれるものである (Pinkham - Demazure's construction)。

また，$H^1_{G_+}(G)$ は filtered blowing-up $X = Proj(\bigoplus_{k\geq 0} F^k) \xrightarrow{\psi} Spec(\mathcal{O}_{W,w}) = W$, with $E = Proj(G) \subset X$，を用いて次のようにあらわされる graded $R(E,D)$-module U と同型である：

$$U = \bigoplus_{k\geq 0} \operatorname{Ker}\{R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-(k+1)E)) \longrightarrow R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-kE))\}.$$

このように，$H^1_{G_+}(G)$ を書いてみると，次の定理は，(W,w) の Gorenstein 性と G の正規性の関係について，基本的である。

<u>定理</u> (定理3 [T-W 2])．<u>上の状況で，(W,w) が Gorenstein 特異点になる為には，$R(E,D)$ が Gorenstein 環であって，かつ</u>

自然な制限写像 $H^1(X, \mathcal{O}_X(-a(R)\cdot E)) \cong R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-a(R)\cdot E)) \longrightarrow H^2_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O}_{W,w}) \cong H^1(X-E, \mathcal{O}_X)$ が単射となる事である。

ただし，$a(R)$ とは，$a(R(E,D)) = \max\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid H^2_{R(E,D)_+}(R(E,D))_\alpha \neq 0\} = \max\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid H^1(E, \mathcal{O}_E(\alpha \cdot D)) \neq 0\}$ として定まる整数である（[G-W], [W]）。

以下では，(W,w) の Gorenstein 性から $\mathcal{G}$ の正規性が従うかどうかを [T-W2] に引き続いて論ずる（答えは，残念ながら，いまだ open である）。

§1. A remark on singularities arising from the minimal section of ruled surfaces ($/\mathbb{C}$).

(1.1). (以下に述べる，日高 [H1], によって考察された特異点は，別の表示にて O. Riemenschneider [R] により導入されたものと一致する.) A を genus g の非特異代数曲線であり，$L \longrightarrow A$ を正の degree を持つ直線束とする。L にたいする可逆層をやはり L とあらわす。$\mathcal{E}_\xi$ を cohomology 類 $\xi \in H^1(A, L) = H^1(A, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_A}(L^{-1}, \mathcal{O}_A))$ にたいして，次のように L^{-1} の $\mathcal{O}_A$ による extension として得られる rank 2 の locally free $\mathcal{O}_A$-module とする：

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{E}_\xi \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow 0$$

S_ξをA上のruled surfaceであって．$S_\xi = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{d\geq 0} S^d(\mathcal{E}_\xi)) \longrightarrow A$ として得られるものとし，X_ξをその minimal section の適当な 1-convex neighborhood とする。$(X_\xi, A) \longrightarrow (W_\xi, w_\xi)$ を2次元正規特異点への blowing-down とする。我々の言葉で[T-W2]言えば，[R]の議論は「この resolution より決まる filtration について，$H^1_{G_+}(G) = 0$ ならば，$H^0(A, L^k)\cdot\xi = 0$ in $H^1(A, L^{k+1})$ for $k \geq 1$」を示している。Riemenschneiderは，$g \geq 2$ なるAに関して，更に $H^0(A, L)\cdot H^1(A, L) \neq 0$ となるLの存在を示している（ゆえに，$g \geq 2$ なる場合では，$H^1_{G_+}(G) \neq 0$ となる例が Example (2.2) [T-W2] の拡張としてつくれる。）。更に．日高[H1, H2]は，$(S_\xi, A) \longrightarrow (S'_\xi, w_\xi)$ なる blowing-down で得られる compact 解析空間S'_ξの代数性及び射影性を研究して，次の事実を示してきした。

<u>定理(1.2)</u>（p157 [H1]）．我々の記号で，(W_ξ, w_ξ) が Gorensteinであって，かつ $\xi \neq 0$ in $H^1(A, L)$ と仮定する。その時：(1) 基礎体の標数 = zero $\Rightarrow$ $L \cong K_A$

(2) 基礎体の標数 $p > 0$ $\Rightarrow$ $\exists \alpha \in \mathbb{N}$. $L^\alpha \cong K_A$ with $p \mid \alpha - 1$.

この定理の系として，基礎体の標数が zero の時，日高の結果

により，「(1.1)で導入した (W_ξ, w_ξ) が Gorenstein特異点ならば，$U=0$ (i.e., G が正規)」 がわかる。

以下，この節では，上の(i)と/© について，[T-W2] Theorem 3 を用いて証明する事にする。

(1.3). X_ξ の表示　　$\mathcal{E}_\xi^* \longrightarrow A$ を $\mathcal{E}_\xi$ の dual 束，$\mathcal{J}_A$ を $\mathcal{E}_\xi^* \longrightarrow A$ の zero section の $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^*}$ における ideal sheaf，そして $\alpha: (\mathcal{E}_\xi^*)^\wedge \longrightarrow \mathcal{E}_\xi^*$ を $\mathcal{E}_\xi^*$ の total space の $\mathcal{J}_A$ による blowing-up とする。 $\alpha^{-1}(A) = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{J}_A^d/\mathcal{J}_A^{d+1}\right) = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d\geq 0} S^d(\mathcal{E}_\xi)\right) = S_\xi$ である。$\mathcal{E}_\xi^*$ の変換系を用いて，X_ξ をあらわしてみよう。

定義により，我々は $-\xi \in H^1(A, L)$ にふずいする完全系列

$$0 \rightarrow L \rightarrow \mathcal{E}_\xi^* \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0$$

を有する。$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ を A の Stein open covering であって，$L|_{U_i} \cong \mathcal{O}_A|_{U_i}$ なる局所自明化を与えるものとする。$H^1(\mathfrak{U}, L) = 0$ なので，extension sequence は split して次のように書かれる：

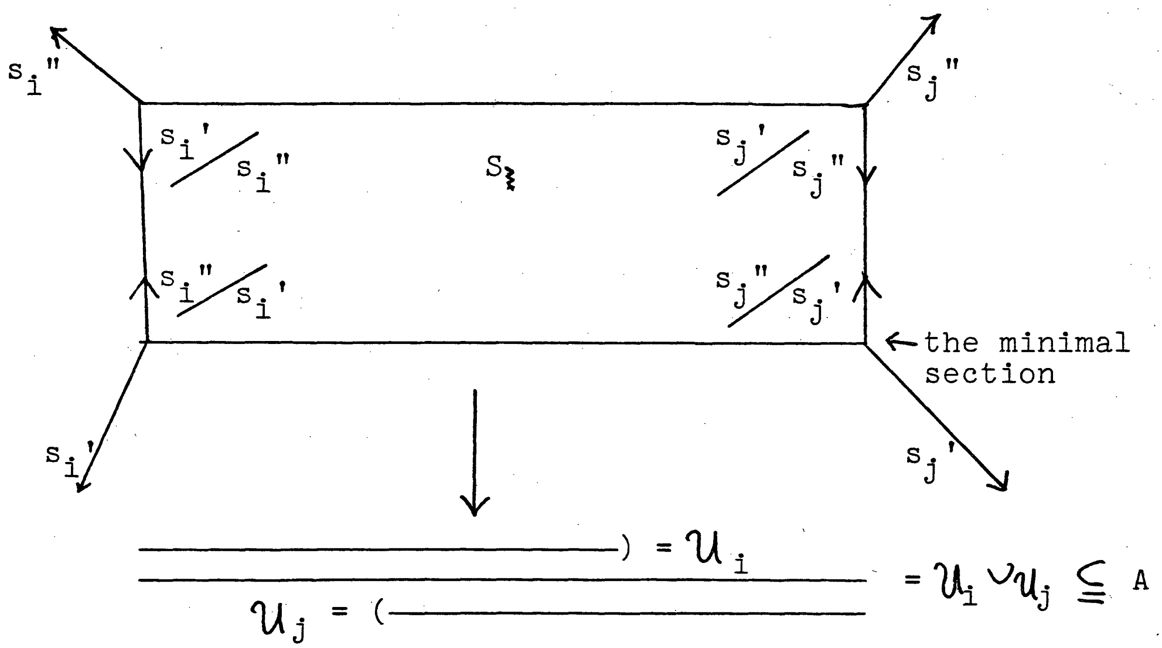
$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{E}_\xi^*|\mathfrak{U}_i = L|\mathfrak{U}_i \oplus O_A|\mathfrak{U}_i & \longrightarrow & L|\mathfrak{U}_j \oplus O_A|\mathfrak{U}_j = \mathcal{E}_\xi^*|\mathfrak{U}_j \\
\wr\| & & \wr\| \\
O_A|\mathfrak{U}_i \oplus O_A|\mathfrak{U}_i & & O_A|\mathfrak{U}_j \oplus O_A|\mathfrak{U}_j \\
\Psi & & \Psi \\
(s_i', s_i'') & \longmapsto & (s_j', s_j'')
\end{array}$$

with

$$s_j' = (s_i' + (-\xi_{ij})_i \cdot s_i'') \cdot f_{ij} \quad \text{and} \quad s_j'' = s_i''$$

ただし，$(-\xi_{ij})_i$ は，$\{\xi_{ij}\}=\xi\in \check{H}^1(\mathfrak{U}, L)$ について，$-\xi_{ij}$ の $H^0(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j, L)$ の $L/\mathcal{U}_i \cong \mathcal{O}_A/\mathcal{U}_i$ による自明化を用いてあらわしたもの，そして $\{f_{ij}\}$ は L の変換系である（i.e., L の section は $u_j = u_i f_{ij}$ となる）。

$\mathcal{U}_i\cup\mathcal{U}_j$ 上 $(\mathcal{E}_\xi^*)^\wedge$ は，次のようにあらわされる：



ここで $X_\xi = \bigcup \mathcal{U}_i\times\mathbb{C}$ の $\mathcal{U}_i\times\mathbb{C}\cap\mathcal{U}_j\times\mathbb{C}$ 上でのはりあわせは

(1.3.1). $\displaystyle s_j''/s_j' = (f_{ij})^{-1}\left(1+(-\xi_{ij})_i\cdot\left(s_i''/s_i'\right)\right)^{-1}\cdot\left(s_i''/s_i'\right)$

である．

(1.4) $T\subseteq\mathbb{C}$ を zero の近傍とし，$X_{t\xi}$，$t\in T$ を cohomology 類 $t\xi\in H^1(A, L)$ に付ずいする 1-convex mfd と

する。union $\mathfrak{X} = \bigcup_{t \in T} X_{t\cdot\xi}$ は T 上の 1-convex map $\omega : \mathfrak{X} \longrightarrow T$ を決める。$\mathfrak{X}$ のはりあわせは,

(1.4.1) $v_j = (f_{ij})^{-1} \cdot \left(1 + (-t \cdot \xi_{ij})_i \cdot v_i\right)^{-1} \cdot v_i$

on $\mathcal{U}_i \times \mathbb{C} \times T \cap \mathcal{U}_j \times \mathbb{C} \times T$ となり, まさに Riemenschneider [R] の与えたものと一致する。

<u>Lemma (1.5)</u>. $s \in H^0(A . L^k)$, $k \geqq 1$ について, $s = \{s_i\} \in \overset{\vee}{H}(\mathcal{U} . L^k)$ とあらわす。$A \times T$ の近傍 $M \subset \mathfrak{X}$ 上の正則関数 F であって $F / u_i \times \mathbb{C} \times \{t=0\} = s_i(y) \cdot (u_i)^k +$ higher terms of order $\geqq k+1$ (with respect to u_i) となったとせよ (; $s(y)$ の, y は A の局所 coordinate)。(このような時 " s は extendable " と以下では呼ぶ事にする。

この時, $k \cdot s \cdot \xi = 0$ in $H^1(A . L^{k+1})$ である。

証明は, p98 of [R] と同様

(1.6) 次に, $R(E, D)$ の元について, 上で定めた "extendability" に相当する状況が起る充分性を論じる ((1.8) の使い方, 参) !

$\omega : \tilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow T$ は, 2次元 1-convex mfd の族であって, 各 fiber の maximal compact set は, ある "一定の" "star-shaped" A (i.e., Pinkham - Demazure 構成が, 解析的

に constant ）であるとし，

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathfrak{X}} \arrow[rr, "\tau"] \arrow[drr, "\omega"'] & & \mathfrak{X} \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[r, "\Theta"] & \mathcal{W} \arrow[dl] \\
 & & T \subseteq \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\mathfrak{X}} \supseteq A \times T$, $\mathfrak{X} \supseteq E \times T$, $T \subseteq \mathbb{C}$ open and contains zero 0.

$\tau : \tilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathfrak{X}$ は β 本の枝の simultaneous な blowing-down$/T$ とする。さらに，$\tilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathcal{W}$ と $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{W}$ は $A \times T$ と $E \times T$ の T 上の relative blowing-down とする。[T-W2] §1 と同様に

$$(1.6.1) \qquad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-k \cdot E \times T) \Big/ \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-(k+1) E \times T) \cong \mathcal{O}_{E \times T}([kD] \times T)$$

が $k \in \mathbb{Z}$ について成立し，$\mathcal{O}_T$-free modules になる。

<u>Lemma (1.7)</u>　上の状況 (1.6) で，k_0 integer ≥ 0 を考えて固定する。各 fiber ごとに，§0 の意での $\sqcup$ を考え $\sqcup(X_t)$，その k 次部分を $\sqcup(X_t)_k$ などと記す。今，

$$\sqcup(X_t)_k = 0 \quad , \quad t \neq 0 , \quad k \geq k_0$$

と仮定する。すると，

$$R^1\Theta_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-(k+1)E \times T)) \longrightarrow R^1\Theta_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-kE \cdot T))$$

は $k \geq k_0$ で単射である。

証明は standard.

(1.8) 定理(1.2)(1) の証明. (1.6) の diagram に (1.4) の $\mathscr{X} \to T$ をあてはめる(今, τ は trivial である)。$(W_\xi, w_\xi) \cong (W_{t\xi}, w_{t\xi}), t \neq 0$, が Gorenstein であると仮定する。Theorem 3 [T-W2] より, $\sqcup(X_t)_k = 0$ for $k \geqq a(R(A.L)) - 1$, $t \neq 0$ である。Lemma (1.7) より, 次の図式を得る:

($a(R(A.L)) = a$ と書く.)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{H}_*(\mathcal{O}_{\mathscr{X}}(-(a-1)\cdot E \times T)) & \longrightarrow & \mathbb{H}_*(\mathcal{O}_{E\times T}(L^{a-1} \times T)) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \lambda & & \\
\mathbb{H}_*(\mathcal{O}_{X_0}(-(a-1)E)) & \longrightarrow & \mathbb{H}_*(\mathcal{O}_E(L^{a-1})) = H^0(A.L^{a-1}) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
\end{array}$$

ここで, λ の surjectivity は (1.6.1) でのべた $\mathcal{O}_T$-freeness による。ゆえに, $H^0(A.L^{a-1})$ は Lemma (1.5) の意味で extendable であり, もし $a-1 \geqq 1$ ならば, $H^0(A.L^{a-1}) \cdot \xi = 0$ となり Serre-duality に反する (Lemma (1.5))。ゆえに $a-1=0$ である。 q.e.d.

(1.9) 同様の「局所的 ([H1] と比べて)」な議論を, 基礎体の標数 p が正の場合にも考える事は可能である。しかし, そこでは, Lemma (1.5) の効果が, $p \mid k$ の場合には ((1.8) の議

論と平行に考えると）なくなる。実際，日高氏は，characteristic $=3$，$a=4$，$\xi\neq 0$ かつ $(W_{t,\xi}, w_{t,\xi})$ が Gorenstein になる特異点が存在する事を，その後示した。その例について $Ш=0$ となるのかは，大変興味ある事だが，残念ながらいまだ不明である（[H2]，[H-T] には書かれるはずだと思う。）。

§2. 特異点の arithmetic genus p_a を手掛りにした $Ш$ の消滅についての考察.（[T-W2] §3 のアプローチの続き）.

(2.1) 特異点解消 $\psi : (\tilde{X}, A) \longrightarrow (W, w)$ が与えられた時，算術種数 $p_a(W,w)$ とは，$\max\{p_a(D) \mid D$: non-zero effective divisor whose supports are contained in $A\}$ と定義される非負な整数である（[Wagreich]，参[T]）。これは，例外集合 A の weighted dual graph Γ によりきまるので，$p_a(\Gamma)$ とも書く事にする。我々の今考える "star-shaped" な状況では，Pinkham-Demazure の $\mathbb{Q}$-divisor D on E を用いて，

(2.1.1) $$p_a(\Gamma) = \max_{r\geq 1}\left\{ r(g-1)+1 - \sum_{k=0}^{r-1} \deg([kD]) \right\}$$

とあらわす事ができる（[T] Theorem (3.8)）。また，（[T-W2] でも述べたように）$R(E,D)$ の canonical partial resolution

$$\varphi : C = \mathrm{Proj}(R(E,D)^{\natural}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R(E,D))$$

$$\text{where } R(E,D) = \bigoplus_{l\geq 0}\left(\bigoplus_{k\geq l} R(E,D)_k \right)$$

について，

$$\text{(2.1.2)}\quad \dim\left(m_R^k \cdot R^1\varphi_* O_C \big/ m_R^{k+1} \cdot R^1\varphi_* O_C \right) \leqq p_a(\Gamma) \qquad k \geqq 0$$

が成立する（[T] §1, Theorem(3,4)）。

そして，§3 [T-W2] と同様にして次が従う（証明は [T-W1] を参）。

定理(2.2)　(W, w) は "star-shaped" resolution を持つ Gorenstein 特異点であって，$C = \mathrm{Proj}(R(E,D)^{h}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Spec}(R(E,D))$ なる Pinkham's construction の canonical partial resolution について $\dim\left(m_R \cdot R^1\varphi_* O_C \big/ m_R^2 \cdot R^1\varphi_* O_C \right) \leqq 1$ であると仮定する。その時 $\sqcup = 0$ である。

これと，(2.1.2) を組み合わせれば，$p_a(\Gamma) = 1$，かつ (W,w) が Gorenstein となる "star-shaped" 特異点については $\sqcup = 0$ ([T-W2]) なのだが，勿論，$p_a(\Gamma) = 2$ であっても，(2.2) の条件を満すものは存在する。以下では，$p_a(\Gamma)$ を手掛りにして考察をつづける。そして，$\sqcup$ の消滅問題が open になっている $p_a(\Gamma) = 2$ なる graph の例をあげよう。

Lemma (2.3)　状況は §0 で述べた通りとする。ξ_k を，$\xi_k : R^1\psi_*(O_X(-kE)) \longrightarrow H^1(E, O_E(kD))$ なる上射とし

ように $k \in \mathbb{Z}$)。この時,

(i) $\dim U = \sum_{k \geqq 1} \dim\left(\xi_k\{\operatorname{Ker}\{R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-kE)) \to R^1\psi_*\mathcal{O}_X\}\}\right)$

(ii) 更に (W, w) が Gorenstein であるとすると,:

$$\operatorname{Image}\{F^k \longrightarrow R_k = H^0(E, \mathcal{O}_E(kD))\}$$
$$= \left\{ x \in R_k \;\middle|\; \begin{array}{l} x \cdot \xi_{a-k}\left(\operatorname{Ker}\{R^1\psi_*\mathcal{O}_X(-(a-k)E) \to R^1\psi_*\mathcal{O}_X\}\right) \\ \quad = 0 \quad \text{in} \quad H^1(E, \mathcal{O}_E(aD)) \end{array} \right\}$$

for $k \geqq 0$. ただし $a = a(R(E, D))$.

証明は (i) 線型代数 (ii) は Serre duality $R_k \times H^1(E, \mathcal{O}_E((a-k)D)) \to H^1(E, \mathcal{O}_E(aD)) \cong \mathbb{C}$ (cf [W]) と (i) を用いる. 詳しくは [T-W 1].

これにより, 次が直ちに従う。

<u>定理 (2, 4)</u> (W, w) は "Star-shaped" resolution をもつ Gorenstein 特異点であるとすると, $\dim U \neq 1$ である。

<u>証明</u>. 仮に $\dim U = 1$ とし, $U_k \neq 0$ であるとする。非 zero 元 $\Phi \in U_k$ をとろう。$y \in R_k$ と $\Phi \in R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-pE))$ with $p \geqq k+1$ をうまくとって, 次が成立するようにできる ([T-W 2] (3, 5) (3, 6) 参照);

$$\begin{tikzcd}
R_k \arrow[r] & R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-(k+1)E)) \arrow[r] & R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-k\cdot E)) \\
y \arrow[r, mapsto] & \Phi \arrow[r, mapsto] & 0 \\
& \Psi \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \xi_p(\Psi) \neq 0 \\
& R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-pE)) \arrow[r, "\xi_p"'] & H^1(E, \mathcal{O}_E(pD))
\end{tikzcd}$$

(i)(2.3) により，$\bigoplus_{k\geq 1} \xi_k(\mathrm{Ker}\{R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-kE)) \to R^1\psi_*\mathcal{O}_X\}) = \mathbb{C}\cdot\xi_p(\Psi) \subset \bigoplus_{k\geq 1} H^1(E, \mathcal{O}_E(kD))$ 。(ii) (2.3) より，$p = a-k$ かつ $y\cdot\xi_p(\Psi) \neq 0$ in $H^1(E, \mathcal{O}_E(aD))$ である。(3.6) [T-W 2] により，$\mathrm{Ker}\{R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-aE)) \to R^1\psi_*\mathcal{O}_X\}$ は non-trivial である。これは (W, w) が Gorenstein 特異点である事に反する (Th.3 [T-W2])。

q.e.d.

<u>Lemma (2.5).</u> "star-shaped" graph Γ について，$p_a(\Gamma) = p_a(E) = g$ かつ $g \geqq 2$ ならば，$a(R(E,D)) \leqq 2$ である。

証明は (2.1.1) より容易である。

<u>系 (2.6)</u> (W, w) が "star-shaped" resolution を持つ Gorenstein 特異点とし，更に $p_a(\Gamma) = p_a(E)$ ならば $U = 0$ である。($p_a(\Gamma) \leqq 1$ の場合の結果と，$a \leqq 2$ の場合について，それぞれ [T-W2] による。)。

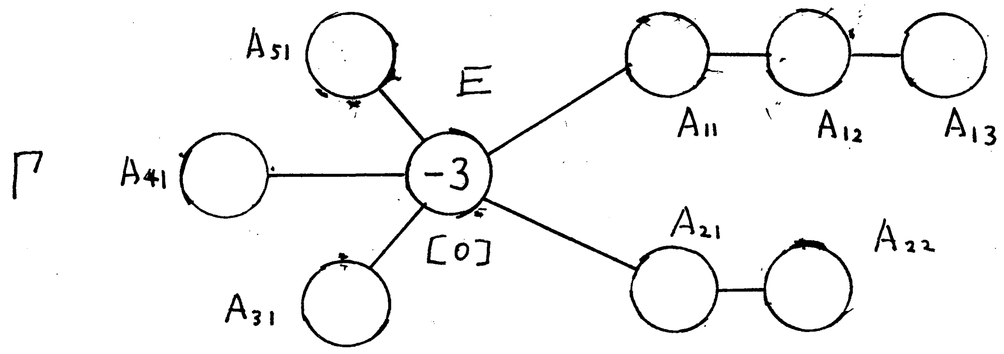
(2.7). そこで．問題は．$P_a(\Gamma)=2$ の場合は．$g\leqq 1$ に残る。

<u>$g=1$ の場合</u>　実は $P_a(\Gamma)=2$ で Gorenstein "star-shaped" graph については，$a(R(E,D))\leqq 7$ $(a\neq 6)$ が示せて，定理(2.4)を使って $\sqcup=0$ を示す事ができる。（公式(2.1.1)を使った細い議論によるのだが，省略する。）.

<u>$g=0$ の場合</u>　この時に．$P_a(\Gamma)=2$ かつ $a(R(E,D))\leqq 10$ の場合には，定理(2.2)より $\sqcup=0$ を示せる。

そして，$a(R(E,D))=11$，$P_a(\Gamma)=2$，$g=0$ かつ．$\dim\left(m_R\cdot R'\otimes\mathcal{O}_c / m_R^2\cdot R'\otimes\mathcal{O}_c\right)=2$ となる graph Γ であって $R(E,D)$ が Gorenstein 環になるもの例を以下に挙げる。この graph Γ について，Gorenstein "star-shaped" 特異点 (W,w) として，どのようなものが存在するのか，いまだ筆者には解析し得ていない。

<u>例(2.8)</u>　§0 の状況で．例外集合 $f^{-1}(w)$ の dual graph Γ が以下の通りであるとする！



central curve $E\cong\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{Q}$-divisor

$$D=3P_0-\frac{3}{4}P_1-\frac{2}{3}P_2-\frac{1}{2}P_3-\frac{1}{2}P_4-\frac{1}{2}P_5$$

ただし　$P_i = A_{i1} \cap E$, $i=1,\dots,5$, P_0 は E上のある点,

を用いて上の graph を例外集合の dualgraph に有する正規次数付環は　$R(E,D) = \bigoplus_{k\geq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(kD))$ とあらわされる。ここで，関係式　$K_E + D' - 11 \cdot D = 0$ ，ただし $D' = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{2}P_4 + \frac{1}{2}P_5$ ，より　$R(E,D)$ は $a(R(E,D)) = 11$ の Gorenstein 環である [W].　更に，$h(r) = r(g-1) + 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \deg([kD])$ とおいてやると，

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	≥ 12
$\deg[rD]$	-2	-1	-2	0	-2	0	-2	0	-1	0	-2	≥ -1
$h(r)$	0	1	1	2	1	2	1	2	1	1	0	$\leqq -2$

となって，　$p_a(\Gamma) = \max_{r\geq 1} h(r) = 2$ ，$p_g(R(E,D)) = \sum_{k\geq 0} h^1(\mathcal{O}_E(kD)) = 5$ である。　これだけから，Γ を例外集合に持つ特異点についての $\sqcup$ を調べてみよう。　まず，$\sqcup_k = 0$ for $k \geqq a = 11$ ($\because$ $\sqcup_k = \mathrm{Ker}\{R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-(k+1)E)) \longrightarrow R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-kE))\}$.)。　そして $\sqcup_0 = 0$ [T-W2]。また $R_k \longrightarrow \sqcup_k \rightarrow 0$ より，$\sqcup_k = 0$ for $k = 1, 2, 3, 5, 7, 9$。ゆえに，$R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-kE)) \longrightarrow R^1\psi_* \mathcal{O}_X$ は $k \leqq 4$ で単射である。　Lemma (2.3) (i) より，$\dim \sqcup = \sum_{k\geq 5} \dim(\xi_k \{\mathrm{Ker}\{R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-kE)) \longrightarrow R^1\psi_* \mathcal{O}_X\}\}) \leqq \sum_{k\geq 5} h^1(\mathcal{O}_E(kD)) = 3$ となる。

更に，(W, w) が Gorenstein特異点であると仮定する。

duality (2.3.1) [T-W2] より，$R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-(12-k)E)) \longrightarrow R^1\psi_*(\mathcal{O}_X)$ は $k \leqq 4$ で単射である。だから，$U_8 = U_{10} = 0$ である。

定理(2.4)により，$\dim U \neq 1$ である。だから，$\dim U = 0$，又は $\dim U = 2$ となるのである。

しかしながら，$\dim U = 2$ となる Gorenstein 特異点 (W, w) を見つける事は，まだできていない。

文献（完全ではありません。originality をもっと明確にするべき事柄を，多く，このノートでは使った。詳細は [H-T]，[T-W1]．oref．）

[G-W] S. Goto., K.-i. Watanabe., On graded rings I, J. Math. Soc. Japan 30 (1978) 179-213.

[H1] F. Hidaka., Normal surface singularities associated to ruled surfaces (in Japanease). 可換環論シンポジウム報告集 No.7 (1985) 145-159.

[H2] ________., A projective contractibility criteria and its applications, 準備中.

[H-T] F. Hidaka. M. Tomari., A remark on singularities arising from the minimal section of ruled surfaces. 準備中.

[P]. H. Pinkham., On a result of Riemenschneider. manuscripta math. 16, 137-144 (1975).

[R] O. Riemenschneider., Bemerkungen zur Deformationtheorie nichtrationaler Singularitäten . manuscripta math. 14 91-99 (1974)

[T]. M. Tomari., Maximal-ideal-adic filtration on $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ for normal two-dimensional singularities Adv. Studies. in Pure Math. 8 (1986) "Complex Analytic Singularities" 633-647.

[T-W 1] M. Tomari., K.-i. Watanabe., Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "Star-shaped" resolution. Preprint (1987).

[T-W 2]. ________________, "Star-shaped" resolution を持つ2次元正規特異点について, RIMS 講究録 595, 112-142 (1986).

[Wagreich]. Ph. Wagreich., Elliptic singularities of surfaces. Amer. J. Math., 92 (1970). 419-454.

[W] K.-i. Watanabe., Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings. Nagoya Math. J. 83 (1981) 203-211.