数理解析研究所講究録
第 634 巻 1987 年 368-377

Stableベクトル束のlimitについて

東京理科大　理工　細尾敏男（Toshio Hosoh）

F_1, F_2を射影多様体X上の階数1のtorsion free $\mathcal{O}_X$－moduleとする。F_1のF_2による自明でない拡大で、stableになるものもならないものもある場合に、そのstableでないものを別のものに置き換えて、stableの族を作れないかという問題を考える。

命題　Xを体k上の射影多様体、HをX上のample因子。F_1, F_2を階数1のtorsion free $\mathcal{O}_X$－moduleで$\deg_H F_1 < \deg_H F_2$となるものとする。自明でない拡大

$$0 \to F_1 \to E \to F_2 \to 0$$

で、EがH-stableでないとすると、次の可換図式がある。

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[u] & T \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[u, equal] & E \arrow[r] \arrow[u] & F_2 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & G_2 \arrow[r, equal] \arrow[u] & G_2 \arrow[u] & \\
 & & \arrow[u] & \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$0 \qquad 0$

ここでG_1, G_2は階数1の torsion free $\mathcal{O}_X$ −moduleで$\deg_H G_1 \leq \deg_H G_2$となるもの、Tはnon−zero torsion $\mathcal{O}_X$ −module。」

Xを体k上のscheme、F_i, G_i $(i=1, 2)$, Tを$\mathcal{O}_X$ −moduleで

$$0 \to F_1 \xrightarrow{f} G_1 \xrightarrow{g} T \to 0, \quad 0 \to G_2 \xrightarrow{h} F_2 \xrightarrow{i} T \to 0$$

がexactとなるものとする。次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(F_2, F_1) & \to & \mathrm{Ext}^1(F_2, G_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^1(G_2, F_1) & \to & \mathrm{Ext}^1(G_2, G_1) \end{array}$$

により、$c : \mathrm{Ext}^1(F_2, F_1) \to \mathrm{Ext}^1(G_2, G_1)$ を定義する。$\mathrm{Ext}^1(F_2, F_1)$の元ξに対応する拡大を

$$0 \to F_1 \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} F_2 \to 0 \text{ とする。}$$

このとき$X \times \mathbb{P}^1$上のcomplex

$$0 \to F_1 \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{(f, -j)} (G_1 \oplus E) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} y \cdot g \\ x \cdot ik \end{pmatrix}} T \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \to 0$$

のcohomology sheafを$\mathcal{E}$とおく。ここで$\langle x, y \rangle$は$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$の1つの基底である。

定理　（１）$\mathcal{E}$は$\mathbf{P}^1$上flat，（２）$\mathcal{E}_0 \cong E$，（３）$\mathcal{E}_\infty \cong E_{0\langle \ell \rangle}$，（４）次の図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & G_2 \arrow[u] \arrow[r, equal] & G_2 \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}(-\infty) \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{E}_\infty \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}(-\infty) \arrow[u, equal] \arrow[r] & \mathcal{E}' \arrow[u] \arrow[r] & G_1 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

により$\mathcal{E}'$を定義すると、次の短完全列

$$0 \to F_1 \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \to \mathcal{E}' \to F_2 \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1) \to 0$$

がある。

（５）$\mathcal{E}'_\infty$　は次の図式によりuniqueに決定される。

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & G_1 \arrow[u] \arrow[r] & T \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[u, equal] \arrow[r] & \mathcal{E}'_\infty \arrow[u] \arrow[r] & F_2 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & & G_2 \arrow[u] \arrow[r, equal] & G_2 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 0 & 0 \end{array}$$

つまり　$\theta : \mathrm{Hom}(F_2, T) \to \mathrm{Ext}^1(F_2, F_1)$により$\mathcal{E}'_{\infty} \cong E_{\theta(1)}$。」

このことから$\mathcal{E}$は$\mathbf{P}^1$上のextensionの族$\mathcal{E}'$にelementary transformationをほどこして得られたものであることがわかる。この応用として、3次元rational scroll上の階数2のstableベクトル束のlimitを調べてみることにする。

上の定理と以下の内容については、そのうち証明を付けてどこかに発表します。

§3次元rational scroll上のstableベクトル束のlimit

$V = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}$　$(a \leq b \leq 0)$を$\mathbf{P}^1$上の階数3のベクトル束、$X = \mathbf{P}(V)$をVにassociateした3次元rational scroll、$\pi : X \to \mathbf{P}^1$を標準的射影とする。DをX上の因子で$\pi_* \mathcal{O}_X(D) \cong V$となるもの、$F$を$\pi$のfibreとし、$q > -a$に対して$H = D + qF$と置くとこれはvery ampleになる。$p = (D \cdot H^2) = 2q + a + b$、$L = \mathcal{O}_X(-D + (p+1)F)$と置く。$M_0$を$X$上の階数2のH-stable sheafで$C_1 = C_1(L)$, $C_2 = D \cdot F$, $C_3 = 0$となるものの同型類の集合、MをM_0のベクトル束からなる部分集合とする。丸山[1]によりM_0のmoduliが存在し射影的であり、MはM_0の開集合である。

Mの構造は我々の結果［２］によりよくわかっている。（以下のTheorem２．を参照）ここではM_0においてMを含む連結成分およびその既約成分について上の定理を使ってわかる事を報告する。

Lemma 1．（１）$E \in M$ならば、次の自明でない拡大

$$0 \to \mathcal{O}_X(-F) \to E \to L(F) \to 0$$

がある。

（２）自明でない拡大 $0 \to \mathcal{O}_X(-F) \to E \to L(F) \to 0$ において$E \notin M$ならば、πのfibre $F \simeq \mathbb{P}^2$のline Yが存在して、次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(-F) \arrow[r] & \mathcal{I}_Y \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}_F(-1) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(-F) \arrow[r] \arrow[u, equal] & E \arrow[r] \arrow[u] & L(F) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & L \arrow[r, equal] \arrow[u] & L \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

がある。

（３）$\dim \mathrm{Ext}^1(L(F), \mathcal{O}_X(-F)) = N+1$、

$\dim \mathrm{Ext}^1(L, \mathcal{I}_Y) = N-3$、但し$N = 3p-a-b+5$。

$c : \mathrm{Ext}^1(L(F),\ \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-F)) \to \mathrm{Ext}^1(L,\ \mathcal{I}_{\mathfrak{Y}})$ は全射。』

$\pi : \mathfrak{X} = \mathbb{P}(V^{\vee}) \to \mathbb{P}^1$ を X の双対3次元 rational scroll、$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{X}$ 上の因子で $\pi_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{D}) \simeq V^{\vee}$ となるもの、$\mathfrak{F}$ を π の fibre とし、$\mathfrak{H} = \mathfrak{D} + (p+1)\mathfrak{F}$、$\mathbb{P} = \mathbb{P}(H^1(L^{\vee}(-2F))^{\vee})$ と置くと、自然な埋め込み $|\mathfrak{H}| : \mathfrak{X} \to \mathbb{P}$ が存在して、Lemma 1.(1)，(2) より次が導かれる。

Theorem 2.（[2] Theorem(3.19)）M の moduli は $\mathbb{P} \setminus \mathfrak{X}$ に同型である。』

$\mathfrak{Y} = \{(Y,\ x) \in \mathfrak{X} \times X \mid x \in Y\}$ と置き、$\mathcal{I}_{\mathfrak{Y}}$ を $\mathfrak{Y}$ の $\mathfrak{X} \times X$ におけるイデアルの層とする。$\mathfrak{X} \times X$ 上の直線束 $\mathfrak{q}^* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-\mathfrak{H}-2\mathfrak{F}) \otimes q^* L$ を $\mathfrak{L}$ と書く。ここで $\mathfrak{q}$，q は $\mathfrak{X} \times X$ の $\mathfrak{X}$ 及び X への射影である。

Lemma 3．$\mathfrak{X}$ の $\mathbb{P}$ における法束は $R^1 \mathfrak{q}_*(\mathcal{I}_{\mathfrak{Y}} \otimes \mathfrak{L}^{\vee})$ に同型であり、かつ simple である。』

$\tilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}$ を $\mathbb{P}$ の $\mathfrak{X}$ に沿っての blow up とし、$\tilde{\mathfrak{X}}$ をその例外集合とする。Lemma 3．より、$\tilde{\mathfrak{X}}$ 上に $\mathcal{I}_{\mathfrak{Y}}$ の L による自明でない拡大の万有族が存在して、定理を適用することで、$\tilde{\mathbb{P}} \setminus \tilde{\mathfrak{X}} \simeq \mathbb{P} \setminus \mathfrak{X}$ 上の H-stable ベクトル束の万有族と $\tilde{\mathbb{P}}$ 上で patch する。

Lemma 4．Y を π の fibre $\simeq \mathbb{P}^2$ の line とする。

（１）自明でない拡大$0 \to \mathcal{I}_Y \to E \to L \to 0$において

$E \notin M_0$ならば、Ｙの閉点xが存在して、次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
& & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_Y \arrow[r] & \mathfrak{m}_x \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}_Y(-1) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_Y \arrow[r] \arrow[u, equal] & E \arrow[r] \arrow[u] & L \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
& & L \otimes \mathcal{I}_Y \arrow[r, equal] \arrow[u] & L \otimes \mathcal{I}_Y \arrow[u] & \\
& & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

がある。

（２）$\dim \mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathcal{I}_Y, \mathfrak{m}_x) = N-1$、

$c : \mathrm{Ext}^1(L, \mathcal{I}_Y) \to \mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathcal{I}_Y, \mathfrak{m}_x)$

において$\dim(\mathrm{Im}\, c) = N-5$。』

Lemma３．及びLemma４．より、$\mathcal{Y}$は自然に$\mathcal{X}$に埋め込まれて、上で作られた族を$\mathbb{P} \setminus \mathcal{Y}$に制限したものはＨ－stable sheafの族になり、$\mathbb{P} \setminus \mathcal{Y}$から$M_0$のmoduliへのmorphismが定まる。

Theorem５．上のmorphismはopen immersionである。』

Lemma６．Ｙをπのfibre$\cong \mathbb{P}^2$のline、xをＸの閉点とす

る。

（１）自明でない拡大 $0 \to \mathfrak{m}_x \to E \to L \otimes \mathcal{J}_Y \to 0$

において $E \notin M_0$ ならば、次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{m}_x \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[u] & k(x) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{m}_x \arrow[r] \arrow[u, equal] & E \arrow[r] \arrow[u] & L \otimes \mathcal{J}_Y \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & L \otimes \mathcal{J}_{Y'} \arrow[r, equal] \arrow[u] & L \otimes \mathcal{J}_{Y'} \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

がある。ここで $\mathcal{J}_{Y'}$ は、Eによって決まる短完全列

$0 \to \mathcal{J}_{Y'} \to \mathcal{J}_Y \to k(x) \to 0$ で与えられるイデアルの

層である。

（２）$\dim \mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathcal{J}_Y, \mathfrak{m}_x) = N-1$,

$\dim \mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathcal{J}_{Y'}, \mathcal{O}_X) = N-2$。

$c : \mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathcal{J}_Y, \mathfrak{m}_x) \to \mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathcal{J}_{Y'}, \mathcal{O}_X)$

において、$x \in Y$ ならば c は全射であり、$x \notin Y$ ならば

$\dim(\mathrm{Im}\, c) = N-3$。

（３）自明でない拡大 $0 \to \mathcal{O}_X \to E \to L \otimes \mathcal{J}_{Y'} \to 0$

があれば、$E \in M_0$。』

$\overline{X \times \check{X}}$を$X \times \check{X}$の$\check{Y}$に沿ったblow upとすると、$\overline{X \times \check{X}}$の閉点の集合は

$\{ \mathfrak{I}_{x'} \mid 0 \to \mathfrak{I}_{x'} \to \mathfrak{I}_{x} \to k(x) \to 0, (x, Y) \in X \times \check{X} \}$であるとみなされる。

$Z = \bigcup_{(x, Y) \in X \times \check{X}} \mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathfrak{I}_x, \mathfrak{m}_x)^{\vee})$、

$W = \bigcup_{\mathfrak{I}_{x'} \in \overline{X \times \check{X}}} \mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathfrak{I}_{x'}, \mathcal{O}_x)^{\vee})$と置くと

Zは$\overline{X \times \check{X}}$を含み、$Z \setminus \overline{X \times \check{X}}$及びW上にH-stable sheafの族が構成される。(Lemma 6.)

定理により$(\mathbb{P} \setminus \check{Y}) \cup (Z \setminus \overline{X \times \check{X}}) \cup W$の$M_0$のmoduliへの像は連結である。よって次を得る。

Theorem 7. M_0のmoduliにおいて、stableベクトル束を含む連結成分は、少なくとも2つの既約成分を持ち、stableベクトル束を含む既約成分の次元はNであり、他に次元がN+4以上の既約成分を持つ。

References

[1] M.Maruyama,Moduli of stable sheaves,II,J.Math.Kyoto Univ..18 (1978),557-614.

[2] T.Hosoh and S.Ishimura,Stable vector bundles of rank 2 on a 3-dimensional rational scroll,J.Math.Soc.Japan.Vol.37,No.4,(1985) 557-568