数理解析研究所講究録
第638巻 1988年 135-146

対称空間上のエーレンプライスの基本原理

東大 理 大島 利雄
千葉短大 佐分利 豊
福山大 若山 正人

0. 対称空間.

G を連結で簡約可能な線型実リー群, K をその極大コンパクト部分群とする. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ をそれぞれ G 及び K のリー代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン分解とする. 等質空間 G/K は, リーマン対称空間であり, 次の実解析的微分同相写像がある:

$$(0.0)\quad \exp: \mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} G/K,\quad X \longmapsto (\exp X)K$$

我々の目標は, ユークリッド空間上のエーレンプライスの基本原理をこの型の対称空間上にまで拡げることである.

1. 函数空間 — その0.

$\mathfrak{p}$ 上の K-不変な内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と書き, $x\in G/K$ に対し

$$(1.0)\quad |x| := \langle \exp^{-1}x,\ \exp^{-1}x \rangle^{1/2}$$

とおく。$\{X_0, \cdots, X_{m-1}\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底とする。各 X_j は，G/K 上のベクトル場を定める。$X = (X_0, \cdots, X_{m-1})$ とおき，$\alpha \in \mathbb{N}^m$ に対し，G/K 上の微分作用素 X^α を次により定義する：

$$(1.1)\quad X^\alpha := X_0^{\alpha_0} \cdots X_{m-1}^{\alpha_{m-1}}.$$

G/K 上に次の2つの函数空間を定義する：

$$(1.2)\quad C_*(G/K) := \Big\{ \varphi \in C^\infty(G/K);\ \forall r>0,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^m \ \ \|\varphi\|_{\alpha,r} := \sup_{x \in G/K} |(X^\alpha \varphi)(x)|\, e^{r|x|} < \infty \Big\},$$

$$(1.3)\quad \mathcal{A}_*(G/K) := \Big\{ \varphi \in C^\infty(G/K);\ \forall r>0,\ \forall J \in \mathcal{O}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*) \text{：劣指数増大}\ \ \|\varphi\|_{J,r} := \sup_{x \in G/K} |(J(x)\varphi)(x)|\, e^{r|x|} < \infty \Big\}.$$

$\mathcal{A}_*(G/K) \subset C_*(G/K)$ であり，$\mathcal{A}_*(G/K)$ の元は，G/K 上の実解析函数となっている。$C_*(G/K)$ は FS 空間であるが，$\mathcal{A}_*(G/K)$ は名前のついた型の線型位相空間ではない。$G/K = \mathbb{R}^m$ の時には，

$$(1.4)\quad \mathcal{A}_*(G/K) = \lim_{r>0} \mathrm{proj} \left[\mathcal{O}^{-r}(U_\varepsilon) \right]$$

ただし，$U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^m ; |\mathrm{Im}\, z| < \varepsilon\}$，

$$\mathcal{O}^{-r}(U_\varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{O}(U_\varepsilon) ; \sup_{z \in U_\varepsilon} |\varphi(z)| e^{r|z|} < \infty\}$$

と書ける．つまり，$\mathcal{A}_*(G/K)$ は DFS 空間の族の射影極限になっている．

$C_*'(G/K)$ 及び $\mathcal{A}_*'(G/K)$ の元をそれぞれ指数型の distribution 及び指数型の hyperfunction と命名する．

2．フーリエ・ラプラス変換．

$G = KAN$ 及び $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ をそれぞれ G 及びそれに対応する $\mathfrak{g}$ の岩沢分解とする．すなわち，各 $g \in G$ に対して $k(g) \in K$，$H(g) \in \mathfrak{a}$，$n(g) \in N$ が一意的に存在して，g は次の形に分解される：

(2.0) $\quad g = k(g)\exp(H(g))n(g)$

ただし，$\exp : \mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} A$．

M を A の K における中心化群：$M = Z_K(A) = \{k \in K ; ka = ak \ \forall a \in A\}$ とする．

$\varphi \in C_*(G/K)$ のフーリエ・ラプラス変換 $\mathcal{F}\varphi$ は，次のように定義される：

$$(2.1)\qquad \mathcal{F}\varphi(\lambda;kM) := \int_G \varphi(x)\, e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)(H(x^{-1}k))}\, dx$$

ただし，$\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$，$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{a})} m_\alpha\alpha$，

$\Sigma^+(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ に対応した正のルート系 ($\subset\mathfrak{a}^*$)，

m_α は α の重複度．

すなわち，$\mathcal{F}\varphi$ は $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\times K/M$ 上の函数として定義される．

3．函数空間 ― その1

1 で導入された2つの函数空間のフーリエ・ラプラス像となる函数空間を導入する．まず，次の2つを用意する：

$$(3.0)\qquad \mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\times K/M) := \Big\{\Phi\in C^\infty(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\times K/M);\ \forall r>0,\ \forall r'\in\mathbb{N}$$

$$\|\Phi\|^{r',r} := \sup_{\substack{|\mathrm{Im}\,\lambda|\le r\\ k\in K}} \left|(1-\Delta_{K/M})^{r'}\Phi(\lambda;kM)\right|(1+|\mathrm{Re}\,\lambda|)^{r'}<\infty,$$

Φ は，$\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ について複素解析的$\Big\}$，

$$(3.1)\qquad \mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\times K/M) := \Big\{\Phi\in\mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\times K/M);\ \forall r>0,\ \forall J=(J_1,J_2):$$

$J_1\in\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$，$J_2\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$；$J_1(\lambda)$，$J_2(z^2)$：劣指数増大

$$\|\Phi\|^{J,r} := \sup_{\substack{|\mathrm{Im}\,\lambda|\le r\\ k\in K}} \left|J_1(\lambda)J_2(\Delta_{K/M})\Phi(\lambda;kM)\right|<\infty\Big\},$$

ただし，$\Delta_{K/M}$ は K/M 上のラプラシアン．

$\Phi \in \mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)$ に対しそのポワソン積分 $\check{\Phi}$ を次により定義する：

$$(3.2)\quad \check{\Phi}(\lambda; x) := \int_K \Phi(\lambda; kM)\, e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(x^{-1}k)}\, dk$$

$$(\lambda, x) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times G$$

W をワイル群：$N_K(A)/Z_K(A)$ として，

$$(3.3)\quad \mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W := \{\Phi \in \mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M);\ \check{\Phi}(w\lambda; x) = \check{\Phi}(\lambda; x)\quad \forall_w\, \forall_{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*}\, \forall_{x \in G}\}$$

$$(3.4)\quad \mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W := \mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M) \cap \mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W$$

とおく。$\mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W$ 及び $\mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W$ は，それぞれ $\mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)$ 及び $\mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)$ の閉部分空間である。

これで，最初の

<u>定理</u>（ペーリー・ウィナー型定理）次の２つは線型位相同型：

$$(3.5)\quad \mathcal{F} : C_*(G/K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W$$

$$(3.6)\quad \mathcal{F} : \mathcal{A}_*(G/K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W$$

$\mathcal{F}^{-1}$ は次により与えられる：

$$(3.7)\quad \mathcal{F}^{-1}\Phi(x) = \frac{1}{\#W}\int_{\mathfrak{a}^*} \check{\Phi}(\lambda; x)\frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}$$

ここで, $c(\lambda)$ はハリシューチャンドラの c 函数と呼ばれる $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上の有理型函数である。

この定理は, Eguchi [1] の定理 4.1.1 の系として得られる。

4. 不変微分作用素.

G/K 上の G-不変微分作用素全体のなす代数を $\mathbb{D}(G/K)$ と書く。$\mathbb{D}(G/K)$ は可換であり、しかも

$\exists\, \Delta_1, \cdots, \Delta_l \in \mathbb{D}(G/K)$: 代数的に独立 $(l = \dim \mathfrak{a})$

$\quad$ s.t. $\mathbb{D}(G/K) = \mathbb{C}[\Delta_1, \cdots, \Delta_l]$

となっている。$D = (\Delta_1, \cdots, \Delta_l)$ と書く。$P(D) \in \mathbb{C}[D]$ に対して

$$(4.0)\quad P(\lambda) := P(D)\, e^{(\sqrt{-1}\lambda - \rho)H(x^{-1})}\Big|_{x=e} \qquad (\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$$

とおく。$\varphi \in C_*(G/K)$ に対して, 次の等式がなりたつ:

$$(4.1)\quad \mathcal{F}(P(D)\varphi)(\lambda; kM) = P(\lambda)\,\mathcal{F}\varphi(\lambda; kM).$$

5. エーレンプライスの基本原理(予想)

ユークリッド空間上のエーレンプライスの基本原理(以下, FP と略す)とは, 定数係数の線型偏微分方程式系の斉次解は, その方程式系の特性多様体に台を持つ測度(の微分)のフーリエ積分により表示されるという主張であった。我々の G/K の場合でも, ペーリー・ウィナー型定理や(4.1)の等式を見れば, 同様のことが成立つだろうと期待される。

M を有限生成の $\mathbb{D}(G/K)$-加群とし, その自由分解を1つとる:

$$(5.0)\quad 0 \leftarrow M \leftarrow \mathbb{D}(X)^{m_0} \xleftarrow{{}^{t}A(D)} \mathbb{D}(X)^{m_1} \xleftarrow{{}^{t}A_1(D)} \mathbb{D}(X)^{m_2} \longleftarrow \cdots$$

ここで, $A(D) = [A_{ij}(D)]_{\substack{1\le i\le m_1\\ 1\le j\le m_0}}$, $A_{ij}(D) \in \mathbb{C}[D]$ 等である.

つまり, 我々の問題は, 不変微分作用素 $A(D)$ の核は何か. さらに、次の列は完全かということである:

$$(5.1)\quad 0 \to \mathrm{Ker}(A(D)) \to E^{m_0} \xrightarrow{A(D)} E^{m_1} \xrightarrow{A_1(D)} E^{m_2} \longrightarrow \cdots,$$

ここで, $E = C'_*(G/K)$ or $\mathcal{A}'_*(G/K)$.

この問題を考える為には, ユークリッド空間上の場合と同じように, (5.1)の双対列のフーリエ変換をとり, その完全性や, 多項式環上の加群の商構造を調べる方法が有効である:

$$(5.2)\quad 0 \leftarrow \mathcal{Z}_W^{m_0} / {}^*A(\lambda)\mathcal{Z}_W^{m_1} \leftarrow \mathcal{Z}_W^{m_0} \xleftarrow{{}^*A(\lambda)} \mathcal{Z}_W^{m_1} \xleftarrow{{}^*A_1(\lambda)} \mathcal{Z}_W^{m} \leftarrow \cdots$$

ここで，$\mathcal{Z}_W = \mathcal{F}(\mathcal{E}')$,

$$A(\lambda) = [\, A_{ij}(D)\, e^{(\sqrt{-1}\lambda - \rho)H(x^{-1})} \big|_{x=e} \,].$$

ここで，FP を正確に定式化してみる．

$$(5.3)\quad V = \{ \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \,;\, \mathrm{rank}\, A(\lambda) < m_0 \}$$

とおく。我々の場合 $V \times K/M$ が $A(D)$ の特性多様体となる．$A(\lambda)$ に対する multiplicity variety（Ehrenpreis [2]）を $\{ (d_\ell(\lambda, \partial_\lambda), V_\ell) \}_{1 \le \ell \le N}$ とする．それは次のようなものであった：

(5.4) $V = V_1 \cup \cdots \cup V_N$ ： 代数多様体 V の既約分解，

$d_\ell(\lambda, \partial_\lambda) = (d_\ell^0(\lambda, \partial_\lambda), \ldots, d_\ell^{m_0-1}(\lambda, \partial_\lambda))$ は $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上の多項式係数の微分作用素のベクトル，

s.t. $Q(\lambda) \in {}^*A(\lambda)\, \mathbb{C}[\lambda]^{m_1}$

$$\Longleftrightarrow \Big(\sum_{\nu=0}^{m_0-1} d_\ell^\nu(\lambda, \partial_\lambda) Q_\nu(\lambda) \Big) \Big|_{V_\ell} = 0.$$

これを用いると，FP は次のように定式化される．

<u>FP$(C_*'(G/K); \mathbb{D}(G/K))$</u> ：

$$\{ u \in C_*'(G/K) \,;\, A(D)u = 0 \}$$

$$= \Big\{ \sum_{\ell=1}^{N} \int_{V_\ell^+ \times K/M} d_\ell(\lambda, \partial_\lambda)^* (1-\Delta_{K/M})^L (1+|\lambda|)^L e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)H(x^{-1}k)} d\mu_\ell(\lambda; kM);$$

$L>0$, $d\mu_\ell$: $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M$ 上の有界な測度で

$\operatorname{supp}\mu_\ell \subset (V_\ell^+ \cap (\mathfrak{a}^* \times \sqrt{-1}\mathfrak{a}_L^*)) \times K/M \Big\}$,

<u>$FP(\mathcal{A}_*'(G/K); \mathbb{D}(G/K))$</u>:

$$\{u \in \mathcal{A}_*'(G/K)\ ;\ A(D)u = 0\}$$

$$= \Big\{ \sum_{\ell=1}^{N} \int_{V_\ell^+ \times K/M} d_\ell(\lambda, \partial_\lambda)^* J_1(\lambda) J_2(\Delta_{K/M}) e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)H(x^{-1}k)} d\mu_\ell(\lambda; kM);$$

$J_1 \in \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$, $J_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $J_1(\lambda)$, $J_2(z^2)$: 劣指数増大,

$d\mu_\ell$: $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M$ 上の有界な測度で

$\operatorname{supp}\mu_\ell \subset (V_\ell^+ \cap (\mathfrak{a}^* \times \sqrt{-1}\mathfrak{a}_L^*)) \times K/M$ for $\exists L>0 \Big\}$,

ここで, $V_\ell^+ := \{\lambda \in V_\ell\ ;\ \operatorname{Im}\langle \lambda, \alpha\rangle \le 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})^+\}$

$\mathfrak{a}_L^* := \{ Y \in \mathfrak{a}^*;\ \langle Y, Y\rangle < L\}$.

この定式化は, (5.2) 及び, $\mathcal{Z}_W = \mathcal{Z}_*(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W$ or $\mathcal{Z}_*^a(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times K/M)_W$ の位相の定義より考えるならば, 誰しも納得のいくものと考えられる.

<u>6</u>. <u>FPに対する到達点</u>.

我々の現在の到達点は, 次のようになる.

<u>定理</u>　G/K がランク $= \dim \mathfrak{a} = 1$ の対称空間の直積であるならば，$FP(C'_*(G/K); \mathbb{D}(G/K))$，$FP(\mathcal{A}'_*(G/K); \mathbb{D}(G/K))$ は正しい。

（証明のキー・ポイント）

(A) すでに，

$$(6.0)\quad 0 \leftarrow M_\lambda \leftarrow \mathbb{C}[\lambda]^{m_0} \xleftarrow{{}^t\!A(\lambda)} \mathbb{C}[\lambda]^{m_1} \xleftarrow{{}^t\!A_1(\lambda)} \mathbb{C}[\lambda]^{m_2} \leftarrow \cdots$$

の完全性はわかっている訳であるから，これに $\otimes \mathcal{Z}_W$ をほどこす時，それが完全函手となることが1つ．(B) さらに，

$$(6.1)\quad \begin{tikzcd} 0 & \mathcal{Z}_W^{m_0}/{}^t\!A(\lambda)\mathcal{Z}_W^{m_1} \arrow[l] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{Z}_W^{m_0} \arrow[l] \arrow[dl, "\tilde{d} = \{(d_\ell(\lambda,\partial_\lambda),\, v_\ell)\}"] & \mathcal{Z}_W^{m_1} \arrow[l, "{}^t\!A(\lambda)"'] & \mathcal{Z}_W^{m_2} \arrow[l, "{}^t\!A_1(\lambda)"'] & \cdots \arrow[l] \\ & \mathcal{Z}_W|_{V \times K/M} & & & & \end{tikzcd}$$

において，$\tilde{d}$ が閉値域となることが2つ目．これらの2つを示すことができればよい．

上の (A)，(B) を示すためには，いわゆる cohomology with bounds の議議論が必要になる．その点で，我々の場合には，Hörmander [3] の $\bar{\partial}$ 作用素に対する L^2 評価の方法は役に立たない．Ehrenpreis [2] のクザン積分を用いる方法は，我々の場合でも有効である．それは，我々の場合，フーリエ

・ラプラス像が，ワイル群に対する不変性を持つということによる．同様の事情から，ランクが２以上の場合には，解析函数を成分にもつ行列の積による分解を増大度付きで行なわなければならなくなる．これが現在の我々の課題としてある．

7. FP の系

(6.0) の M_λ の自由分解を見ると，$A_1(D)$ に対する multiplicity variety は，$({}^{*}A(\lambda), (\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*})^{m_0}) = (A_{*j}(\lambda), \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*})_{1\leq j\leq m_0}$ であることがわかる．従って，

系. $\mathcal{C}'_{*}(G/K)$, $\mathcal{Q}'_{*}(G/K)$ はともに injective $\mathbb{D}(G/K)$-加群，すなわち，

$$(7.0)\qquad \mathcal{C}'_{*}(G/K) \xrightarrow{A(D)} \mathcal{C}'_{*}(G/K) \xrightarrow{A_1(D)} \mathcal{C}'_{*}(G/K) \quad (\text{完全}),$$

$$\mathcal{Q}'_{*}(G/K) \xrightarrow{A(D)} \mathcal{Q}'_{*}(G/K) \xrightarrow{A_1(D)} \mathcal{Q}'_{*}(G/K) \quad (\text{完全}).$$

特に，$P(D) \in \mathbb{D}(G/K)$ が $\neq 0$ ならば，

$$(7.1)\qquad \mathcal{C}'_{*}(G/K) \xrightarrow{P(D)} \mathcal{C}'_{*}(G/K)$$

$$\mathcal{Q}'_{*}(G/K) \xrightarrow{P(D)} \mathcal{Q}'_{*}(G/K) \quad \text{は共に全射.}$$

系. $A(D)$ が hypoelliptic とすると，

$$u \in \mathcal{A}'_*(G/K),\ A(D)u=0 \Rightarrow u \in C^\omega(G/K).$$

特に，G が可換の時は，u は entire function である．

<u>例.</u> $G/K = \mathbb{R}^{1+n}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) u(t,x) = 0,\quad |u(t,x)| \leq {}^\exists L e^{{}^\exists L|(t,x)|}$$

$$\Rightarrow\ u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{1+n}).$$

<u>文献</u>

[1] EGUCHI, M.: Asymptotic expansions of Eisenstein integrals and Fourier transforms on symmetric spaces, J. Funct. Anal. <u>34</u>, 167-216 (1979).

[2] EHRENPREIS, L., Fourier Analysis in Several Variables, Wiley-Intersci., New York (1979).

[3] HÖRMANDER, L., L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator, Acta Math. <u>113</u>, 89-152 (1965)