数理解析研究所講究録
第639巻 1988年 57-67

正則拡散過程によるLiouvilleの定理の拡張

大阪府立大学工学部
金子 宏
(Hiroshi Kaneko)

1. 序

u を C^n で定義された多重劣調和関数で $m(u,r) = \sup_{|z|\leq r} u(z)$ に対して $\lim_{r\to\infty} m(u,r)/\log r = 0$ がみたされるならば u は定数であることが容易にわかる．この事実は関数 $v_R(z) = m(u,1)(1-\log|z|/\log R) + m(u,R)\log|z|/\log R$ について不等式 $v_R(z) \geq u(z)$ が $\{1<|z|<R\}$ で成立するため，この不等式において $R\to\infty$ とすることによって導くことができる．$n=1$ の場合に限定して考たとき $\log|z|/\log R$ が z を出発したブラウン運動が円周 $\{|z|=1\}$ を hit する前にその外側の円周 $\{|z|=R\}$ に hit する確率を表わしていることに注意すると，一般の複素多様体の上で上記のような多重劣調和関数についての Liouville の定理に関しては次のような確率論的導出法があることがわかる：

今，M を連結複素多様体，$\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\Omega_k \uparrow M$ をみたす領域の増大列とする．さらに M の上の正則拡散過程 $\mathbb{D} = \{Z_t, \zeta, \mathcal{F}_t, P_z\}$ を考える．ここで拡散過程が正則であると

は，M の任意の領域 U で定義された全ての正則関数 f に対して $\mathrm{Re} f(Z_{t\wedge\eta})$ が $(P_z, \mathcal{F}_{t\wedge\eta})$－局所マルティンゲールであることが全ての出発点 $z\in U$ と全ての $\eta<\tau_{U}$ をみたす停止時刻 η について成り立つことである．ただし $\tau=\inf\{t>0;\ Z_t\notin D\}$ である．M の Borel 集合 E に対して停止時刻を

$$\sigma_E=\inf\{t>0;\ Z_t\in E\}$$

$$\tau_E=\inf\{t>0;\ Z_t\notin E\}$$

とおきこの記号を以下でも用いる．それぞれ集合 E への到達時刻，E からの離脱時刻である．

命題 1　正則拡遇 $\mathbb{D}$ に対してある M のコンパクト集合 Γ があり，$P_z(\sigma_\Gamma<\infty)=1$ が M のほとんど全ての出発点 z について成立するとき，M の上で定義された多重劣調和関数 u に対して $m(u,\Omega_k)=\sup\limits_{z\in\Omega_k}u(z)$ とおく，このとき全ての k に対して

$$m(u,\Omega_k)<\infty$$

しかも

$$\lim_{k\to\infty} m(u,\Omega_k)P_z(\sigma_\Gamma>\tau_{\Omega_k})=0$$

が成立するならば u は定数である．ここで M のほとんど

すべての点で成立するとは全ての複素座標近傍上で Lebesgue 測度零集合を除いて成立することを意味する．

証明　$\Gamma \subset \Omega_1$ と仮定してよい．[F-2; Prop 1] より u は $\mathbb{D}$-劣調和である．従って

$$u(z) \leqq E_z[u(Z_{\sigma_\Gamma \wedge \tau_{\Omega_k}})]$$
$$\leqq m(u,\Omega_k)\,P_z(\tau_{\Omega_k} < \sigma_\Gamma) + \max_{w\in\Gamma} u(w) \times P_z(\sigma_\Gamma < \tau_{\Omega_k})$$

が成立する．ここで $k \to \infty$ とすると不等式

$$u(z) \leqq \max_{w\in\Gamma} u(w)$$

が M のほとんど全ての点で成立することがわかる．u は複素座標近傍上球面的劣平均値性が局所的に満たされているため，この評価式は M 全体で成立することがわかり，最大値の原理により u は定数でなければならない．［証明終］

この命題で仮定した性質"あるコンパクト集合 Γ について $P_z(\sigma_\Gamma < \infty) = 1$ a.a. $z \in M$ がみたされる"ことを拡散過程 $\mathbb{D}$ が弱リカレントであると言うことにする．次の節では多重劣調和な exhaustion 関数 Φ で $(dd^c\Phi)^{\dim M}$ が無限遠

で 0 にある意味で収束するものがある場合に弱リカレント正則拡散過程を構成し，さらに多重劣調和関数についての Liouville 型定理が証明できることを示す．この応用として極を持つ Kähler 多様体でその radial curvature k が

$$\int_0^\infty x K(x)\,dx < \infty$$ をみたす関数 $K(x)$ と極からの距離関数 r を用いて $|k| \leqq K(r)$ という評価を持つとは限らない場合にも非定数多重劣調和関数が存在しないことが示せるのである．

竹腰氏は，我々が扱う極を持つ Kähler 多様体について，有界多重調和関数や有界強多重劣調和関数が存在しないこと，さらに射影空間への正則写像に関する Casorati－Weierstrass の定理を証明している（[T2]）．

2．Liouville 型定理

この節では連結複素多様体 M は次の性質 (i)，(ii) をみたす多重劣調和な exhaustion 関数 $\Phi : M \longrightarrow [\inf \Phi, \infty)$ を持ち $n = \dim_{\mathbb{C}} M \geqq 2$ であるとする．以下では $\theta = dd^c\Phi$ である．

(i)　ある $\rho \in \mathcal{A}$ に対して

$$\theta^n \leqq \rho(\Phi)\,\theta^{n-1} \wedge d\Phi \wedge d^c\Phi$$

が M のあるコンパクト集合の外で成立する。ここで $\mathcal{A}=\{\rho : [\inf\Phi,\infty)$ の上で定義された非負連続関数で $c>\inf\Phi$ について $g_\rho(x)=\int_c^x \exp\left(-\int_c^\eta \rho(\xi)d\xi\right)d\eta \longrightarrow \infty$ $(x\to\infty)$ をみたすもの$\}$ とする。

(ii) ある M のコンパクト集合の外で定義された局所有界強多重劣調和関数 p についてすべての複素局所座標近傍上の Lebesgue 測度はカレント $\theta^{n-1}\wedge dd^c p$ について（p の定義域の上で）絶対連続である。ここでは，各複素局所座標近傍の上である正数 δ について $p-\delta|z|^2$ が多重劣調和であることをもって p が強多重劣調和とする。

条件 (i) (ii) がコンパクト集合 K の外でみたされているとし，次の記号を用いることにする：

$$M(s)=\{\Phi<s\},\quad M[s]=\{\Phi\leq s\}$$

$$M(s,R)=\{s<\Phi<R\},\quad M_*=M-K.$$

また $K\subset M(s_0)$ をみたす $s_0>0$ をとり，以下では $c=s_0$ とおいて $g_\rho(x)$ が定義されているとする。

$C_0^\infty(M_*)$ の上の bilinear form $\mathcal{E}_0$ を

$$\mathcal{E}_0(\phi,\psi) = \int_{M_*} d\phi \wedge d^c\psi \wedge \theta^{n-1}, \quad \phi,\psi \in C_0^\infty(M_*)$$

で定める．この form は $m = \theta^{n-1} \wedge dd^c p$ とおくと仮定 (ii) より $L^2(M_*;m)$ で可閉である．$\mathbb{D}^\theta = \{Z_t, \zeta, \mathcal{F}_t, P_z\}$ を $\mathcal{E}_0$ の $L^2(M_*;m)$ での最小閉拡大 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する正則拡散過程とする．$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は Dirichlet 空間とも言われ，これに付随した容量を考えることができる（[F-1]）．以後 "容量零集合を除外して" ある事柄が成立することを "g.e." を付記することによって表わす．

補題 1　任意の $R > s_0$ に対して $\tau_R = \inf\{t > 0;\ Z_t \notin M(s_0,R)\}$ とおくと，

$$P_z(\tau_R < \infty) = 1 \qquad \text{g.e.} \quad \text{on} \quad M(s_0,R).$$

証明　$p \in \mathcal{F}_{loc}$ により，任意の $t > 0$ に対して

$$E_z[\tau_R \wedge t] = E_z[p(Z_{\tau_R \wedge t})] - p(z)$$
$$\leqq 2\|p\|_{L^\infty(M_*)} \qquad \text{g.e.} \quad \text{on} \quad M(s_0,R)$$

$t \to \infty$ とすれば $P_z(\tau_R < \infty) = 1$ g.e. on $M(s_0,R)$ を得る．

命題 2　任意の $R > s_0$ に対して，$M(s_0, R)$ 上で

$$P_z(\tau_{M(R)} < \sigma_{M[s_0]}) \leq \frac{g_\rho \circ \Phi(z)}{g_\rho(R)} \quad \text{q.e.}$$

が成立する．特に $\mathbb{D}^\theta$ を $M[s_0]$ では trap（$z \in M[s_0]$ に対しては $P_z(Z_t = z, \forall t > 0) = 1$ とおく）に変形した拡散過程を $\mathbb{D}$ とすると $\mathbb{D}$ は M の上の弱リカレント正則拡散過程である．

証明　後半は前半の評価式からただちに導びかれるので前半を示せばよい．このために最初に $g_\rho(\Phi)$ が $\mathcal{E}$-優調和であること，すなわち $g_\rho(\Phi) \in \mathcal{F}_{loc}$ かつ任意の非負関数 $\phi \in C_0^\infty(M_*)$ に対して $\mathcal{E}(g_\rho \circ \Phi), \phi) \geq 0$ を証明する．まず Φ が滑らかならば明らかに $g_\rho \circ \Phi \in \mathcal{F}_{loc}$ であり

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(g_\rho \circ \Phi, \phi) &= -\int_{M_*} \phi \, dd^c g_\rho \circ \Phi \wedge \theta^{n-1} \\ &= -\int_{M_*} \phi \, g_\rho'(\Phi) [dd^c \Phi - \rho(\Phi) d\Phi \wedge d^c \Phi] \geq 0\end{aligned}$$

がわかる．Φ が滑らかでないときは ϕ の台がある座標近傍上にあるとしてよいことに注意して，Φ に軟化子を作用させたもので Φ を近似すれば上の式が正当化できる．$\Phi \in \mathcal{F}_{loc}$ より $g_\rho \circ \Phi \in \mathcal{F}_{loc}$ は Dirichlet 空間の一般論からわかる．[F-O2

; Appendix] と以上の事柄から補題 1 の τ_R について

$$E_z[g_\rho \circ \Phi(\tau_R)] \leqq g_\rho \circ \Phi(z) \quad \text{q.e.} \quad z \in M(s_0, R)$$

これは証明すべき式と同値である．［証明終］

命題 1 と 2 の組み合わせから次の定理を得る．

定理 1　$u(z)$ が M の上の多重劣調和関数であり

$m(u,R) = \sup\limits_{\Phi(z) \leqq R} u(z)$ について

$$\lim_{R \to \infty} \frac{m(u,R)}{g_\rho(R)} = 0$$

をみたすならば u は定数である．特に M は有界多重劣調和関数を許容しない．

3．Kähler 多様体への応用

最初に前節で述べた仮定 (i) がみたされるための一つの十分条件を与える．

補題 2　Hermitian manifold (M, g) の一点 o からの距離関数 r があるコンパクト集合の外で滑らかであり，x が十分大きいとき滑らかでしかも微分が正となる関数 $\lambda(x)$

について $\Phi = \lambda(r)$ が M の多重劣調和な exhaustion 関数となっていると仮定する．このときある $\rho \in \mathcal{A}$ について

$$0 < \omega < \alpha\, \omega_M$$

が $\alpha = \frac{1}{2}\left\{ \frac{r\lambda'(r)}{n} \rho(\Phi) - \frac{r\lambda''(r)}{\lambda'(r)} + 1 \right\}$ に対してみたされるならば Φ は前節の仮定 (i) を ρ について満足する．ここで ω_M は g の fundamental 2-form, $\omega = \frac{1}{4} dd^c r^2$ である．

この補題はカレントの計算によって容易に証明できる．前節の定理1の応用として次の Kähler 多様体上の多重劣調和関数に対する Liouville 型定理を得る．

定理 2　(M, g) を極を持つ Kähler 多様体とし，r を極からの距離関数，k を radial curvature, $n = \dim_{\mathbb{C}} M$ とする．また，ある $a > e$ に対して

$$|k| \leqq \delta/(r+a)^2 \log(r+a) \qquad (\delta\,;\,正定数)$$

が $\{r > 0\}$ でみたされているとする．ここで δ が n と a から決まる十分小さい正数であるならば，M 上の多重劣調和関数 u で $\lim_{r\to\infty} m(u,r)/\log(\log r) = 0$ をみたすものは定数である．ただし $m(u,r) = \sup_{r(z)\leq r} u(z)$ である．

証明　$\delta>0$ を十分小さくとって

$$f(s)=s\left(\frac{\log a}{\log(s+a)}\right)^{\delta}$$

とおけば $\lambda(x)=\int_a^{x\vee a}\frac{ds}{f(s)}$ は補題2の不等式を $\rho(x)=\frac{1}{x}$ についてみたすことが Hessian 比較定理 [G-W ; Th A] から導びかれる．また前節の仮定 (ii) が $p=r^2$ についてみたされていることも Hessian 比較定理によってわかるので我々の結論は前節定理1から導びかれる．［証明終］

我々が証明した定理1は，多重調和関数に付随したカレントの理論（[B-T1 および 2]）からも導出可能であると思われる．従ってここに述べた証明においては確率論的方法の不可欠性を問題とすべきではなく．筆者は，既存の方法論から考えを一歩進めるために役立つ概念が確率論に備わっている点に確率論の有益性を見い出せると考えている．

References

[B-T1] E. Bedford and B. A. Taylor: The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation, Invent. Math. 37 (1976) 1-44.

[B-T2] E. Bedford and B. A. Taylor: A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math. 149 (1982) 1-44.

[F1] M. Fukushima: Dirichlet forms and Markov processes (1980) North-Holland and Kodansha.

[F2] M. Fukushima: On the continuity of plurisubharmonic functions along conformal diffusions, Osaka J. Math. 23 (1986) 69-75.

[F-O1] M. Fukushima and M. Okada: On conformal martingale diffusions and pluripolar set, J. Funct. Anal. 55 (1984) 377-388.

[F-O2] M. Fukushima and M. Okada: On Dirichlet forms for plurisubharmonic functions, to appear in Acta Math.

[G-W] R. H. Greene and H. Wu: Function theory on manifolds which possesses a pole, Lecture Notes in Math. 699, Springer Verlag, Berlin-New York-Heidelberg, (1979).

[S] W. Stoll: The Ahlfors-Weyl theorem of meromorphic maps on parabolic manifolds, Lecture Notes in Math. 981 (1983) Springer Varlag, Berlin-New York-Heidelberg.

[T1] K. Takegoshi: A non-existence theorem for pluriharmonic maps of finite energy, Math. Z. 192 (1986) 21-27.

[T2] K. Takegoshi: Louville type theorems for pluriharmonic functions, preprint (in Japanese).