数理解析研究所講究録
第 639 巻 1988 年 182-189

Einstein-Kähler metric に関する最近の話題

阪大教養 満渕 俊樹 (Toshiki Mabuchi)

X を n 次元コンパクト連結ケーラー多様体とし、

$$\omega = \sqrt{-1} \sum g_{\alpha\bar{\beta}} \, dz^{\alpha} \wedge dz^{\bar{\beta}}$$

を、その Kähler form を holomorphic local coordinates $(z^1, z^2, \cdots, z^n)$ でもって書いたものとする。対応する Ricci form

$$Ric(\omega) = \sqrt{-1}\, \bar{\partial}\partial \log \det(g_{\alpha\bar{\beta}})$$

が De Rham コホモロジー類 $2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}$ の代表元になっていることに注意する。さて、次の定義を想い起こせ。

定義: ω が Einstein-Kähler $\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}\lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $Ric(\omega) = \lambda\omega$

ここで、ω を（正の）定数倍しても、$Ric(\omega)$ は変化しないので、ω を最初から適当に正定数倍して normalize することによって、λ の可能性は次の３種類の値に限られるとしてよい。

$$\lambda = -1 \text{ or } 0 \text{ or } 1.$$

そこで、ωを Einstein-Kähler として、上の3種類のλの値がXのどういう定性的性質を導くか、調べてみよう。

<u>Case</u> 1： $\lambda = -1$ （このとき ω represents $-2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}$ ）

$\Rightarrow Ric(\omega) = -\omega \Rightarrow c_1(X) < 0$, i.e., K_X is ample.

<u>Case</u> 2： $\lambda = 0$

$\Rightarrow Ric(\omega) = 0 \Rightarrow c_1(X)_{\mathbb{R}} = 0$, i.e., $\exists m \in \mathbb{Z}_+$ s.t. $mK_X = \mathbb{1}$

<u>Case</u> 3： $\lambda = 1$ （このとき ω represents $2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}$ ）

$\Rightarrow Ric(\omega) = \omega \Rightarrow c_1(X) > 0$, i.e., X is a Fano manifold.

この逆問題が Calabi 予想と言われている。即ち、

予想A： (1) K_X : ample $\Longrightarrow$ $\exists$ Einstein-Kähler metric ω s.t. $Ric\,\omega = -\omega$.

(2) $c_1(X)_{\mathbb{R}} = 0 \Longrightarrow {}^{\forall}$Kähler class $\mathcal{K}$, $\exists 1$ Ricci flat metric ω in $\mathcal{K}$.

(3) $c_1(X) > 0$, $h^0(X, \mathcal{O}(TX)) = 0 \Rightarrow {}^{\exists}$Einstein-Kähler metric ω s.t. $Ric\,\omega = \omega$.

この予想は、

(1) ： Affirmative に Aubin によって解決された。

(2) ： Affirmative に Yau によって解決された。

(3) は今もって open problem である。

そこで、以下 $c_1(X)>0$ 即ち X : Fano manifold を仮定し、更に、

$$\mathcal{K} := \{\text{all Kähler forms in the class } 2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}\}$$
$$\mathcal{E}_X := \{\omega \in \mathcal{K} \mid Ric(\omega) = \omega\}$$

とおく。このとき、上の予想Aの(3)に対しては、次の問題を考えればよい。

問題： $\mathcal{E}_X \neq \phi$ のための良い十分（又は必要十分）条件を求めよ。

上の予想Aの(3)では $h^0(X, \mathcal{O}(TX)) = 0$ が $\mathcal{E}_X \neq \phi$ のための十分条件ではないかと予想しているわけである。

さて、$\mathcal{E}_X \neq \phi$ のための必要条件に関しては次のことが知られている。

定理（松島）： $\mathcal{E}_X \neq \phi \Rightarrow X$ の正則変換群 $Aut(X)$ は reductive algebraic group である。

定理（二木）： $\mathcal{E}_X \neq \phi \Rightarrow X$ の Futaki's obstruction が消える。

定理(小林)： $\mathcal{E}_X \neq \phi \Rightarrow TX$ は stable vector bundle.

よって上の Calabi の予想 A の (3) は次の形の予想が適当かも知れない。

予想 B： $\mathrm{Aut}(X)$ が reductive algebraic, かつ X の Futaki's obstruction が消え、更に、TX が stable vector bundle であったとする(もちろん X は $c_1(X)>0$ をみたすとする)。このとき
$\Longrightarrow \mathcal{E}_X \neq \phi$.

もちろん、予想 A の (3) も予想 B も解けてはいないが、Einstein-Kähler metric に関する一意性は知られている。

定理(板東-満渕)： $\mathcal{E}_X \neq \phi$ と仮定する。このとき、$\forall \omega_1, \forall \omega_2 \in \mathcal{E}_X$ に対し、$\exists g \in \mathrm{Aut}^0(X)$ s.t. $\omega_2 = g^*\omega_1$.

但し、$\mathrm{Aut}^0(X)$ は $\mathrm{Aut}(X)$ の identity component を意味するものとする。また、Einstein-Kähler metric の存在に関して、最近、坂根-小磯, Siu, Tian-Yau らの研究によって、かなりのことがわかってきた。特に、最新の Tian-Yau

の研究は著しいので、ここにその結果だけだが紹介する。

$S \neq \mathbb{P}^2(\mathbb{C}),\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とする。かつ、S を Del pezzo surface（即ち $C_1(S) > 0$ を満たす compact 連結複素曲面）だとする。このとき S は $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の r 個（但し $1 \leqq r \leqq 8$）の点 $P_1, P_2, \cdots, P_r$（no three of them lie on a line, and no six of them lie on a conic）の blowing-up になっている事に注意する。更に簡単な計算から

$r = 1, 2$ の時、　$\mathrm{Aut}(X)$: not reductive

$r = 3$ の時、　$\mathrm{Aut}(X)$: reductive

$4 \leqq r \leqq 8$ の時、　$\mathrm{Aut}(X)$: finite group.

更に $r \geqq 3$ なら、Futaki's obstruction of X vanishes かつ TX が stable vector bundle になるので、予想 B の $n = 2$ の場合は次のような形となる。

予想 C：S を Delpezzo surface with $r \geqq 3$ とする。このとき $\mathcal{E}_S \neq \phi$ である。

Tian–Yau はこの予想をかなりの場合に解決した。即ち、

(1) $r = 3, 4$ のとき　$\mathcal{E}_S \neq \phi$,

(2) $5 \leqq r \leqq 8$ をみたす各 r に対し、general な S に対して、$\mathcal{E}_S \neq \phi$,

を示した。（$r=3$ のときは Siu も $\mathcal{E}_S \neq \phi$ を示した。）
更に、Siu 及び Tian は X が Fermat hypersurface of degree m or $m+1$ in $\mathbb{P}^{m+1}(\mathbb{C})$ であるときに、$\mathcal{E}_X \neq \phi$ を示している。

さて、予想Bを別の立場から考え直そう。そこで、X が Fano manifold でかつ $\mathcal{K}$ が Kähler class $2\pi c_1(X)_{\mathbb{R}}$ に属するような Kähler form 全体を意味することを再確認して、次の定義をする。

定義：
$$C_\omega := \operatorname{Sup}\{\lambda \in \mathbb{R} \mid Ric(\omega) - \lambda\omega \gg 0\} \quad (\omega \in \mathcal{K})$$
$$C_X := \operatorname{Sup}\{C_\omega \mid \omega \in \mathcal{K}\}.$$

但し、X 上の real $(1,1)$-form θ に対し、$\theta \gg 0$ であるとは、θ が X 上致る所で positive definite であることを示す。この C_X に関し、定義から次の性質が容易に出てくる。

(1) $0 < C_X \leqq 1$.

(2) C_X : biholomorphic invariant of X.

(3) $\mathcal{E}_X \neq \phi \Rightarrow C_X = 1$.

更に、Tian-Yau の定理の１つを次の様にとらえる事ができ

る。即ち、

定理(Tian-Yau): *The following are equivalent:*

(a) $\exists$ positive constant $\varepsilon = \varepsilon(n)$ depending only on n (and independent of the choice of X) s.t. $c_X \geqq \varepsilon$.

(b) $\exists$ positive constant $K = K(n)$ depending only on n (and independent of the choice of X) s.t. $c_1(X)^n[X] \leqq K$.

さて代数幾何(たとえば松阪-Yános Kollár)の結果により上の(b)は Fano manifold X of dimension n の deformation type (故に特に diffeomorphism type)の有限性を示している。そこで、Siu や Tian-Yau の注意した如く、次の予想は重要である。

予想D: $\exists$ positive constant $\varepsilon = \varepsilon(n)$ depending only on n s.t. $c_X \geqq \varepsilon$ for all Fano manifolds X with $\dim X = n$.

もちろん、この予想が正しければ、Fano manifold X of dimension n の deformation type (故に特に diffeomorphism type)の有限性が導かれる。最後に、次の問題をあげておく。

問題：$\varepsilon_X \neq \phi$ と $c_X = 1$ は同値か？

この他、Futaki's obstruction についても最新の結果があるのだが、それについては他の機会で論じることにする。

References

1、S. Bando and T. Mabuchi : Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo Connected Group Actions, in Algebraic Geometry Sendai 1985, Advanced Studies in Pure Mathematics 10, 1987 Kinokuniya, pp. 11–40.

2. Y. Sakane : Examples of compact Einstein Kähler manifolds with positive Ricci tensor, Osaka J. Math. 23 (1986), 585–616.

3、Y. T. Siu : The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anticanonical line bundle and a suitable finite symmetry group, to appear.

4、G. Tian and S. T. Yau : Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with $c_1 > 0$, Commun. Math. Phys. 112 (1987), 175–203.