数理解析研究所講究録
第 640 巻 1988 年 35-47

$\mathcal{D}$加群とグラスマン多様体 II

数理研　大山 陽介（Ohyama Yousuke）

初めに断っておくが、本稿は、鈴木範男氏の論説に続くものである。ここでは、多変数の場合の佐藤理論、いわゆる、高次元可積分系について述べる。

KP方程式系の理論の高次元化については、現在のところ最終的な形式に至っているとは言えない。現段階では、ここで述べる、自己双対Yang-Mills方程式を含む理論が得られているのみである。いずれの日にか、全ての「よい」gauge場方程式を含む、より透明な理論が構成できると思われる。

はじめに、ここで用いる記号のいくつかについて説明する。

自然数の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

C : 標数 0 の代数的閉体

$\mathcal{O} = C[[x_0, x_1, \cdots, x_{r-1}]] \qquad (r \in \mathbb{N})$

$\mathfrak{m} = \mathcal{O}x_0 + \cdots + \mathcal{O}x_{r-1}$; $\mathcal{O}$ の極大ideal

微分作用素のつくる環 $\mathcal{D} = \left\{ P(x, \partial_x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^r \\ |\alpha| < +\infty}} a_\alpha(x) \partial^\alpha ; a_\alpha \in \mathcal{O} \right\}$

$I = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{r-1}$, (後で $I_\phi = \mathbb{N}^c \times \{0\} \subset I$ を用いる)

擬微分作用素のつくる環 $\mathcal{E}$;

$$\mathcal{E} = \{ P(x,\partial_x) = \sum_{\substack{\alpha \in I \\ |\alpha| \ll +\infty}} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha \ ; \ a_\alpha(x) \in \mathcal{O} \}$$

話を簡単にするため、形式的巾級数の中で話をすすめている。

まずはじめに、ある微分方程式のクラスと、その"解空間"との対応について述べる。 ここでは、微分方程式を、$\mathcal{E}$ の $\mathcal{D}$-ideal ($\mathcal{E}$ の部分空間で、自然に左 $\mathcal{D}$ 加群の構造をもつもの) としてとらえる。

$\mathcal{E}$ 加群 $\mathbb{V}$ (*microfunction* の空間) を、

$$\mathbb{V} := \left\{ \varphi = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha e_\alpha \ : \ c_\alpha \in \mathbb{C}, \ \begin{array}{l} |\alpha| \ll 0 \text{ のとき } c_\alpha = 0, \\ m \in \mathbb{Z} \text{ を固定して, } |\alpha| = m \text{ のとき} \\ \alpha_0 \ll 0 \text{ で } c_\alpha = 0 \end{array} \right\}$$

とする。 $\mathcal{E}$ の作用は、次のように定める

$$x_0 e_\alpha = (\alpha_0+1) e_{(\alpha_0+1, \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1})} \qquad (\alpha \in I)$$

$$\partial_0 e_\alpha = e_{(\alpha_0-1, \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1})}$$

$$x_j e_\alpha = (\alpha_j+1) e_{(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_j+1, \cdots, \alpha_{r-1})} \qquad (j=1,2,\cdots,r-1)$$

$$\partial_{x_j} e_\alpha = e_{(\alpha_0, \cdots, \alpha_j-1, \cdots, \alpha_{r-1})} \qquad (\alpha_j \neq 0)$$

$$\partial_{x_j} e_\alpha = 0 \qquad (\alpha_j = 0)$$

※ いくつか補足しておく.

1. $\mathcal{E}$ の積構造は Leibniz 則

$$\left(\sum_{\alpha} a_\alpha(x)\partial^\alpha\right)\circ\left(\sum_{\beta} b_\beta(x)\partial^\beta\right)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \gamma\in\mathbb{N}^r}} \binom{\alpha}{\gamma} a_\alpha\, b_\beta^{(\gamma)}\, \partial^{\alpha+\beta-\gamma}$$

で定める。

2. $\mathbb{V}$ は microfunction の空間と考えることができる。つまり e_α を $\dfrac{x'^{\alpha'}}{\alpha'!}\delta^{-\alpha_0-1}(x_0)$ $\left(\alpha=(\alpha_0;\alpha')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^{r-1}\right)$ と考えればよい。しかしながら $\mathbb{V}$ は $\mathcal{E}/\mathcal{E}x_0+\sum_{1\leq j<r}\mathcal{E}\partial_{x_j}$ よりも大きい。$V_0 := \sum'_{\substack{\alpha\in I \\ \alpha_0<0}} \mathbb{C}e_\alpha$ とすると.

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

は $\mathcal{D}$-加群として exact 列である.

このVを ambient space として、無限グラスマン多様体 UGM°（1つのアフィン・セルを定めた）を、次のように定める。

$$\mathrm{UGM}^\circ := \left\{ \mathbb{V} \text{ の } \mathbb{C}\text{-subspace } U \;:\; \begin{array}{l} U = \sum_{j \in \mathbb{N}^c} \mathbb{C}\varphi_j \ , \ \varphi_j = \sum_{(i\alpha) \in I} \xi_{(i\alpha)/j}\, e_{i\alpha} \in \mathbb{V} \\ \text{ただし } \xi_{(i0)/j} = \delta_{ij} \quad (i, j < 0) \end{array} \right\}$$

U を $I \times \mathbb{N}^c$-行列 $(\xi_{(i\alpha)/j})$ で表すこともある。

$\mathcal{E}$ の $\mathcal{O}$-部分空間 $\mathcal{E}_\phi$ を

$$\mathcal{E}_\phi = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^c} \mathcal{O}\,\partial_0^\nu \qquad \text{(無限和)}$$

とする。我々の基本定理は次のものである。

<u>定理1</u>.

$\mathfrak{M} := \{ \mathcal{E}$ の左 $\mathcal{D}$-ideal $\mathcal{J}$; $\mathcal{E} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{E}_\phi \}$ と UGM° とは、1対1に対応する。対応関係は次の通り。

$$\mathfrak{M} \ni \mathcal{J} \longmapsto U = \{ \varphi \in \mathbb{V} . \ P\varphi \in V_0 \quad \forall P \in \mathcal{J} \} \in \mathrm{UGM}^\circ$$

$$\mathrm{UGM}^\circ \ni U \longmapsto \mathcal{J} = \{ P \in \mathcal{E} : P\varphi \in V_0 \quad \forall \varphi \in U \} \in \mathfrak{M} .$$

//

ここで、$\mathcal{M}$の元$\mathcal{I}$について次のことに注意する。$\mathcal{I}$は$\mathcal{D}$加群としては無限生成である。$\mathcal{I}$の$\mathcal{O}$-加群としての基底 $W_{j.\alpha} \in \mathcal{I}$ $\left((j.\alpha) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{r-1} - \mathbb{N}^{c} \times \{0\} \right)$ を、

$$W_{j.\alpha} - \partial_0^j \partial_{x'}^{\alpha} \in \mathcal{E}_{\phi}$$

となる作用素として定める。この時、$W_{j.\alpha}$ の係数について、次の事実が成りたつ。

<u>補題</u> $\mathcal{I} \in \mathcal{M}$ に対して上で定めた $W_{j.\alpha}$ を

$$W_{j.\alpha} = \partial_0^j \partial_{x'}^{\alpha} - \sum_{k \in \mathbb{N}^c} w_{j\alpha/k}(x) \partial_0^k \qquad \left((j.\alpha) \in I - I_{\phi} \right)$$

と書く。このとき、各 $k \in \mathbb{N}^c$ について

$$j + |\alpha| \longrightarrow -\infty \quad ならば \quad \mathrm{ord}_x\, w_{j.\alpha/k} \longrightarrow \infty$$

かつ、$\underbrace{}_{さらに}$ $j + |\alpha| = m \ (\in \mathbb{Z})$ を固定した時、

$$j \longrightarrow -\infty \quad ならば \quad \mathrm{ord}_x\, w_{j.\alpha/k} \longrightarrow \infty$$

となる。ここで

$$\mathrm{ord}_x\, w_{j.\alpha/k} := \max_{l \in \mathbb{N}} \left(w_{j.\alpha/k} \in \mathfrak{m}^l \right)$$

である。 //

※ この補題は正確ではない．$\mathcal{J}$の元は，必ず $\sum_{(j,\alpha)\in I - I_\phi} \mathcal{O} W_{(j\alpha)}$ の形で表されるという完備性の条件を考えたものである。

定理１で与えた対応は，具体的には Wronskian の方法で構成することができる。１次元の場合と異なり，Plücker 座標が発散するので，技術的には多少の注意を要する。

$U = (\xi_{(i\alpha)/j}) \in UGM^\circ$ に対して，空間変数 x について時間発展させた frame $U(x)$ を

$$U(x) = \exp\Big(\sum_{0\le j<r} x_j \partial_{x_j}\Big) U = \big(\xi_{(i\alpha)/j}(x)\big)_{\substack{(i\alpha)\in I\\ j\in N^c}}$$

ここで $\displaystyle \xi_{(i\alpha)/j}(x) = \sum_{(k,\beta)\in N^r} \xi_{i+k,\alpha+\beta} \frac{x_0^k}{k!} \cdot \frac{x'^\beta}{\beta!}$

で定義する。この時 $\det(\xi_{(i0)/j}(x)\,;\, i,j<0)$ は発散するが N^c－サイズの行列 $(\xi_{(i0)/j}(x))_{i,j<0}$ の逆行列は次のようにして構成できる。

$(\xi_{(i0)/j}(x))_{i,j<0}$ の行列要素を m 進展開して，

$$(\xi_{(i0)/j}(x)) = \sum_{l\in N} C^{(l)}, \qquad C^{(l)} \in Mat(N^c \times N^c, m^l)$$

とする。$C^{(0)} = 1$．となる。$C^{(l)} = (C^{(l)}_{ij})_{i,j<0}$ とすると，Uに関する条件から，jを固定すると，$C^{(l)}_{ij} = 0$ $(i \ll 0)$

となるので、$C^{(\ell)}$ たちの間の積は well-defined である。したがって Neumann 展開によって $A(x) = (\zeta_{(i0)/j}(x))^{-1}$ が構成できる。

上のことから、U に対応する ideal $\mathcal{J}$ の $\mathcal{O}$-基底 $W_{j,\alpha}$ が、次のように構成される。

$$U(x)A(x) = \left(w_{i\alpha/j}(x)\right)_{\substack{(i,\alpha)\in I \\ j\in\mathbb{N}^c}} \qquad w_{(i0)/j} = \delta_{ij} \quad (i,j<0)$$

としたとき、

$$W_{i\alpha} = \partial_0^{i}\partial_{x'}^{\alpha} - \sum_{j\in\mathbb{N}^c} w_{i\alpha/j}(x)\,\partial_0^{j} \qquad (i\alpha)\in I-I_\phi$$

$$\mathcal{J} = \sum_{(i\alpha)\in I-I_\phi}{}' \,\mathcal{O}\,W_{i,\alpha}$$

となる。$A(x)$, $U(x)$ の定義により、$U(x)A(x)$ が定義可能なこと、$w_{i\alpha/j}(x)$ が補題の条件をみたすことが簡単にわかる。

次に、$\mathcal{J}$ から UGM° への対応を考える。1 次元の場合は、微分方程式を「解く」ことで得られたわけだが、今度は無限連立方程式になるので、技術的に準備を要する。

次の簡単な命題が鍵になる。

命題　$\mathcal{J} \in \mathfrak{M}$ に対して $W_{j.\alpha} \in \mathcal{J}$ $((j\alpha) \in I - I_\phi)$ は今まで通りとする。このとき、

$$W_{j.\alpha} = \partial_0^j \left\{ \partial_{x'}^\alpha - \sum_{\mu+j<0} \partial_0^\mu \gamma_{j,\alpha}^{(\mu)} W_{00} \right\}$$

と書き直すと、$\mu+j<0$ の場合

$$\gamma_{j.\alpha}^{(\mu)} = \gamma_{j-1,\alpha}^{(\mu)} = \cdots = \gamma_{-\mu-1,\alpha}^{(\mu)} = w_{(-\mu-1,\alpha)/-1}(x)$$

となる。　//

以下、次の記号を用いる。

$$R^{(\alpha)}(x,\partial_0) := \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \partial_0^\mu w_{(-\mu-1,\alpha)/-1}(x) \qquad \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$$

$$R_j^{(\alpha)}(x,\partial_0) := \sum_{\mu+j<0} \partial_0^\mu w_{(-\mu-1,\alpha)/-1}(x)$$

この記号を用いると、

$$W_{0.0}^{-1} = R^{(0)}$$

$$W_{j.\alpha} = \partial_0^j \left\{ \partial_{x'}^\alpha - R_j^{(\alpha)} W_{00} \right\}$$

となる。一般に $R^{(\alpha)}$ は $\mathcal{E}$ の元にならないことに注意されたい。（次の注で説明する、$\mathcal{E}^\infty$ の元になる）

注） 無限階擬微分作用素の全体 $\mathcal{E}^\infty$ を

$$\mathcal{E}^\infty = \Big\{ P(x,\partial) = \sum_{\alpha \in I} \partial_x^\alpha a_\alpha(x) \;;\; a_\alpha(x) \in \mathcal{O},$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ について } \ n \in \mathbb{Z} \text{ が存在して,}$$

$$|\alpha| < m \text{ のとき } \ a_\alpha(x) \in \mathfrak{m}^n \Big\}$$

とする。$\mathcal{E}^\infty$ は環にはならない。$\alpha_0 < 0$ のとき $a_\alpha(x) \equiv 0$ となる $\mathcal{E}^\infty$ の作用素全体を $\mathcal{D}^\infty$ と表すと，$\mathcal{D}^\infty$ は Leibniz 則によって環になり，$\mathcal{E}^\infty$ は右 $\mathcal{D}^\infty$-加群になる。

後で用いるが，$P(x,\partial) \in \mathcal{E}^\infty$ に対して，

$$P(x,\partial)_+ = \sum_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_0 \geq 0}} \partial_x^\alpha a_\alpha(x) \in \mathcal{D}^\infty$$

とする。

前の命題から導き出した $R^{(\alpha)}$ たちを用いて，$\mathcal{M}$ から UG M^0 への対応が構成できる。

<u>定 理 2</u>

$$\mathcal{W} = \Big\{ W(x_0, x', \partial_0) = \sum_{(\mu,\alpha) \in I - I_\phi} \frac{x'^\alpha}{\alpha!} \partial_0^\mu w_{\mu,\alpha}(x_0) \in \mathcal{E}^\infty$$

$$: \ w_{\mu,\alpha}(x_0) \in \mathbb{C}[[x_0]],\ w_{00} = 1 \Big\}$$

とすると，次の事実が成りたつ。

1) $\mathfrak{M}$ と $\mathcal{W}$ とは1対1に対応する。$\mathcal{I} \in \mathfrak{M}$ に対して、前の記号を用いて

$$W = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{r-1}} \frac{x'^{\alpha}}{\alpha!} R^{(\alpha)}(x_0, 0, \partial_0) \quad \in \mathcal{W}$$

を対応させる。

2) (1) で構成した $W \in \mathcal{W}$ に対して、さらに

$$U = \sum_{j \in \mathbb{N}^c} C\varphi_j \in UGM^\circ \qquad (\varphi_j \equiv We_{(j,0)})$$

を対応させると、定理1で述べた $\mathfrak{M}$ から UGM° への対応を得る。

//

注) $W \in \mathcal{E}^\infty$ より、$We_{(j,0)} \in \mathbb{W}$ となる。

また、(2) で構成した $U = \sum_{j \in \mathbb{N}^c} C\varphi_j$ は、厳密には UGM° の定義で示した $\zeta_{(i,0)/j} = \delta_{ij}$ $(i,j<0)$ の条件をみたさないが、この条件をみたすように φ_j を取りかえることが可能である。

以上で、$\mathfrak{M}$ と UGM° との対応関係が完全に（構成的に）ついた。次に時間発展について述べる。

時間パラメタを $t = (t_{j\alpha}\ ;\ (j,\alpha) \in I_t)$ とする。ここで、$I_t = I - (I_\phi \cup (0;0))$ である。$U_0 \in UGM^0$ に対して、UGM^0 上の時間発展を、

$$U_t = \exp\Big(\sum_{(j,\alpha)\in I_t} t_{j\alpha}\partial_0^j \partial_x^\alpha\Big) U_0 = \big(\xi_{(i\alpha)/j}(t)\big)$$

として定める。x について発展させた場合と同様に、$(\xi_{(i0)/j}(t))_{i,j<0}$ は逆行列を持ち、U_t の右から乗ずることができる。

$$\big(\tilde{\xi}_{(i\alpha)/j}(t)\big)_{\substack{(i,\alpha)\in I \\ j\in N^c}} := \big(\xi_{(i\alpha)/j}(t)\big)\cdot\big(\xi_{(i0)/j}\ ;\ i,j<0\big)^{-1}$$

とすると、各 $j \in N^c$ に対して、$\forall n \in N$ について $m \in \mathbb{Z}$ が存在して、$i + |\alpha| < m$ のとき、$\mathrm{ord}_t\, \tilde{\xi}_{(i\alpha)/j}(t) \geq n$。ここで、$\mathrm{ord}_t$ は $\mathrm{ord}_t(t_{\alpha_0} t_{\alpha_1} \cdots t_{\alpha_{k-1}}) = |\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{k-1}|$。

したがって、$(\tilde{\xi}_{(i\alpha)/j}(t))$ は UGM^0 の frame とはならないが、"infinitesimal" には UGM^0 と考えられ、Wronskian の方法など、今までの議論は全て適用できる。

この U_t に対応する $\mathcal{M}$ のイデアル $\mathcal{J}_t = \sum_{(j,\alpha)\in I - I_\phi} \mathcal{O}\, W_{(j,\alpha)}$ に関する時間発展の方程式は

$$\frac{\partial W_{j,\alpha}}{\partial t_{i,\beta}} + W_{j,\alpha}\partial_0^i \partial_x^\beta \in \mathcal{J}_t \qquad ((i,\beta) \in I_t)$$

となる。　上式の左辺を $W_{j\cdot\alpha}$ たちで割り算した剰余項 $\in \mathcal{E}_\phi$ が、０になるという意味である。

次に、この発展方程式を、定理２で定めた $W \in \mathcal{W}$ に関する方程式に書き直そう。

$W_{j\cdot\alpha} = \partial_0^j \{\partial_{x'}^\alpha - R_j^{(\alpha)} W_{00}\}$　を代入して、$t = t_{i\beta}$ と略記すると、

$$W_{00,t} + W_{00}\partial_0^i \partial_{x'}^\beta = \sum_{k<0} w_{00/k} W_{i+k,\beta}$$

$$-\partial_0^j R_{j,t}^{(\alpha)} W_{00} - \partial_0^j R_j^{(\alpha)} [W_{00,t} + W_{00}\partial_0^i \partial_{x'}^\beta] + \partial_0^{i+j} R_{i+j}^{(\alpha+\beta)} W_{00} \in \mathcal{J}$$

となる。　上式を代入して、$W_{i+k,\beta}$ を $R_\nu^{(\beta)}$ で表せば

$$-\partial_0^j R_{j\cdot t}^{(\alpha)} W_{00} + \partial_0^{i+j} R_{i+j}^{(\alpha+\beta)} W_{00} - \partial_0^j \Big[R_j^{(\alpha)} \sum_{k<0} w_{00/k} \partial_0^{i+k} (-R_{i+k}^{(\beta)})$$

$$+ \partial_0^{-j} \sum_{l \geq 0} \binom{j+\nu}{l} (w_{(-\nu-1,\alpha)/-1}\, w_{00/k})^{(l)} \partial_0^{i+\nu+j+k-l} R_{i+\nu+j+k-l}^{(\beta)} \Big] W_{00}$$

$$\in \mathcal{J}_t$$

ところがこの式は $\mathcal{E}_\phi$ に入るので０になる。左から ∂_0^{-j}、右から W_{00}^{-1} をかけて、$j \longrightarrow -\infty$ とすれば

$$-R_t^{(\alpha)} + \partial_0^i R^{(\alpha+\beta)} - R^{(\alpha)} (W_{00} \partial_0^i R^{(\beta)})_+ = 0 \quad .$$

$(W_{00}\partial_0^i R^{(\beta)})_+$ については8頁参照。また、同じ注より、$R^{(\alpha)}(W_{00}\partial_0^i R^{(\beta)})_+$ は意味を持つ。これから

$$\frac{\partial W}{\partial t_{i\beta}} = \partial_0^i \frac{\partial^\beta W}{\partial x'^\beta} - W(W_{00}\partial_0^i R^{(\beta)})_+ = 0$$

を得る。これを、高次元KP方程式系という。