数理解析研究所講究録
第640巻 1988年 61-71

ゲージ理論とK.-P.系について

東京理大・理　印牧尚次 (Shôji Kanemaki)

日　大・文理　鈴木　理 (Osamu Suzuki)

(概要) ゲージ理論の基本となる内山理論を紹介し，K.-P.系の解がゲージ接続として得られることを示す。この事柄より，K.-P.系について得られている手法を，より一般なゲージ接続に拡張することが考えられる。いわゆる宇宙方程式として知られているハイゼンベルク非線形方程式は試みられるべき対象の一つと考え，これを最後に紹介する。

§1. 内山理論.

ここでは，ゲージ理論の基礎である内山理論([5])を特別な場合に限って紹介する。この理論のアイデアを最も簡単な例で示すことにする。

数直線$\mathbb{R}$上の(複素数値)C^∞-関数全体の作る関数空間Hにおいて，元$\psi \in H$に対し複素共役な関数$\bar{\psi}$を対応させる'involution'がある。Hにゲージ変換として$U(1)$が作用する：

(1.1) $\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi$, $\quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\alpha}$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$。

微分作用素 $D = d/dx : H \longrightarrow H$ にラグランジュ・アクション

(1.2) $$\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi} D \psi \, dx$$

を考えるとき，α＝定数がゆえに，(1.1)の変換に関して不変である。次に，$\mathbb{R}$上の$U(1)$-値C^∞-関数

$$e^{i\alpha(x)}$$

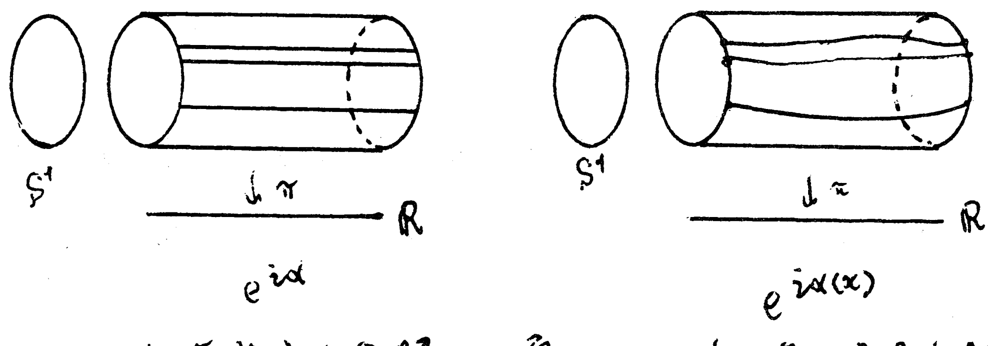
を考えて，(1.1)と同様な変換

(1.3) $\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi$, $\quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\alpha(x)}$

を(1.2)で実行してみると，

$$e^{-i\alpha(x)} D \, e^{i\alpha(x)} \neq D$$

であるから，不変ではなくなる。そこで，(1.2)において，Dを共変微分に置き換えることによって，不変たらしめるようにしてゲージ接続が必然的に導入される。



詳細については，原論文を参照して頂くことにするが，注目すべき点は，一般論に加え，"ゲージ"の原型であるフェイズ変換群に電磁場を，アイソトピック・スピン空間での回転群にYang-Mills場を，ローレンツ群に重力場を対応させて論じられていることである。

物理におけるゲージ理論は，未だ完成されていない。不完全な部分を引きずりながらも幾つかの点が改良された。その1つに質量問題がある。ヒッグス機構で解決しようとしている。そこでは場の量子論での定義と異なる真空の定義に変更しなくてはならなかったし，ヒッグス粒子の存在確認が問題として残ってしまった。それにもかかわらずこの理論の魅力は，(1) 自由なフェルミ粒子のラグランジァン密度 $\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi(x)$ で置き換え $\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ によって電磁ポテンシャル A_μ が導入されフェルミ粒子と電磁場の相互作用が説明できること，(2) μ 粒子の崩壊について，それまで不完全な four-point フェルミ理論があってこの point-interaction 的発想が修正でき，新たに W-ボソンが介在していることを説明できたこと，にある。

§2. K-P系の内山理論的解釈

ここでは我々は，K-P系のラグランジュ形式の対称性を考えることによりK-P系の解はゲージ接続であると解釈できる，このことの内容を簡単に説明しよう。詳しい事柄は我々の論文[2]をみて頂きたい。

$\mathbb{R}$上のスカラー場ψとそれに共役な$\bar{\psi}$を考える。普通の微分作用素 $D \equiv d/dx$ についてのラグランジュ・アクション

(2.1) $$\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi} D \psi \, dx$$

を考える。関数に作用する関数係数の作用素 S に対して，変換

(2.2) $$\psi \longrightarrow \psi' = S\psi \,(\equiv \psi_S), \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1} \,(\equiv \bar{\psi}^S)$$

を，佐藤先生［4］に従って定数係数の擬微分作用素

(2.3) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n D^n$$

で逆元をもつものから成る群を1つとり G_0 とし，この G_0 について適用する。$S \in G_0$ について変換(2.2)は(2.1)を不変にする。そこで関数係数の擬微分作用素

(2.4) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x) D^n$$

で逆元をもつものから成る群 G をとれば，G は G_0 を第1種ゲージ群にもつゲージ群となる。この様な G のとり方については［2］(p.1122)を参照して頂きたい。G のリー代数を $\mathfrak{g}$ とする。G-主束の接続を次で定める。

定義(2.5)。『写像 $\Omega : G \to \mathfrak{g}$ が G-接続であるとは，

(2.6) $$\phi^{-1}[D, \phi] = \phi^{-1}\Omega(W)\phi - \Omega(W'), \qquad W, W' \in G, \quad W = \phi W'$$

を満たすときをいう。ここで $[D, \phi] = D\phi - \phi D$ である。』

この条件は

(2.7) $$D - \Omega(W) = \phi(D - \Omega(W'))\phi^{-1}$$

といいかえてもよい。これよりラグランジュ・アクション

(2.8) $$\int_R \overline{\psi}^W (D - \Omega(W))\psi_W \, dx$$

は G-不変であることが分る。G-接続の簡単な例として (i) $\Omega(W) = D$，(ii) $\Omega(W) = [D, W]W^{-1}$ がある。もし Ω_1，Ω_2 が G-接続ならば，

(2.9) $$\Omega_1(W) - \Omega_2(W) = \phi(\Omega_1(W') - \Omega_2(W')\phi^{-1}$$

という関係式が成り立つ。従って $\{\Omega(W)\}$ を G-接続とすれば

(2.10) $$\hat{\Omega} = W^{-1}([D, W]W^{-1} - \Omega(W))W$$

は、Wの選び方に依らない。これをΩの接続形式という。$\hat{\Omega}$が恒等的に零となるとき，平坦な接続という。

K.-P.系を対象とするときには，負巾の擬微分作用素を考えることが重要である。そのためにG_0の部分群として

(2.11) $$G_{0-} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^{-n} \;\middle|\; c_0 = 1 \right\}$$

を考える。この方え種ゲージ群は，

(2.12) $$G_- = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) D^{-n} \;\middle|\; w_0(x) = 1 \right\} (\subset G)$$

となる。これに対応するリー代数を

(2.13) $$\mathfrak{g}_- = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) D^{-n} \right\} (\subset \mathfrak{g})$$

とかく。同様にして

(2.14) $$G_+ = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) D^{n} \;\middle|\; w_0(x) \neq 0 \right\} (\subset G),$$
$$\mathfrak{g}_+ = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) D^{n} \right\} (\subset \mathfrak{g})$$

とおく。このとき，次の分解が成り立つことが分かる：

(2.15) $$G = G_+ \cdot G_- , \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_- .$$

以下，この分解に関して$X \in \mathfrak{g}$を$X = X_+ + X_-$ $(X_+ \in \mathfrak{g}_+, X_- \in \mathfrak{g}_-)$とする。$G_-$について$G_-$-接続を定めることができる。

定理(2.16) G_-についての平坦なG_--接続は，平坦なG-接続をG_-に制限して得られる：すなわち

(2.17) $$([D, W]W^{-1})_- , \qquad W \in G_-$$

がG_--平坦な接続を与える。□

以上の事柄をふまえてK.-P.系の内山理論的解釈の概要を示そう。よく知られている様にK.-P.系は，無限個の時間パラメタ

(2.18) $$t=(t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots)$$

に関する時間発展の連立方程式でDのスペクトル保存の変形とみなされるものである；

(2.19) $$W(t)=\sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) D^{-n} \qquad w_0(t)\equiv 1$$
$$L = W(t) D W^{-1}(t)$$

とおき

(2.20) $$\frac{\partial L}{\partial t_n}=[(L^n)_+, L] \qquad (n=1,2,\cdots)$$

をK.-P.系という。これ等についての詳しい事柄は本巻の別の記事をみて頂くことにしてここではこれ以上立入らない。我々の目標はこの解がゲージ接続とみなせることを示すことにある。このためにR上のパラメタt ((2.18)) をもつスカラー場$\psi(x,t)$と$\overline{\psi}(x,t)$を考え，(2.1)の場合と同様にして，ラグランジュ・アクション

(2.21) $$\mathcal{L}=\int \overline{\psi}\, d\psi\, dx$$

を考える。但し

(2.22) $$d=\sum_{n=1}^{\infty} D_n\, dt_n, \qquad D_n=\partial/\partial t_n$$

である。この対称性のゲージ群として (2.12) の G_- をとる。明らかにこの元による変換(2.2)で (2.21) は不変である。この第2種ゲージ群として

(2.23) $$\tilde{G}_-=\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_{-n}(x,t) D^{-n} \;\middle|\; u_0(x,t)\equiv 1 \right\}$$

をとる。なお、これに関連して前と同様に

$$(2.24)\qquad \begin{aligned}\tilde{G} &= \{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x,t) D^n \},\\ \tilde{G}_+ &= \{ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) D^n \mid u_0(x,t) \neq 0 \}\end{aligned}$$

とおき，これに対応するリー代数を $\tilde{\mathfrak{g}}$ $\tilde{\mathfrak{g}}$ $\tilde{\mathfrak{g}}$ とおく。このとき

$$(2.25)\qquad \tilde{G} = \tilde{G}_+ \cdot \tilde{G}_- , \qquad \tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_+ + \tilde{\mathfrak{g}}_-$$

が成り立つ。(参照 [2])。

定義 (2.26)。「写像 $\Omega : \tilde{G}_- \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ があって，R が $\tilde{G}_-$ の部分集合であるとする。集合 $\{\Omega(W) \mid W \in R\}$ が R-多重接続（単に R-接続）であるとは，

$$(2.27)\qquad \Omega(W) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n(W)\, dt_n$$

という形をもち，injective set-map $\rho : G_1 \to \tilde{G}_-$ s.t. $\rho(G_1) = R$ for $\exists$群 G_1，があって

$$(2.28)\qquad D_n - \Omega_n(W) = \phi\,(D_n - \Omega(W'))\,\phi^{-1} \quad \text{for } \forall W, W' \in R,\ W = \phi W',\ \phi \in \tilde{G}_-$$」

$\Omega(W)$ が $\tilde{G}$-接続であれば，ラグランジュ・アクション

$$(2.29)\qquad \mathcal{L} = \int_R \bar{\Psi}^W (d - \Omega(W)) \Psi_W \, dx \qquad W \in \tilde{G}$$

は，群 $\tilde{G}$ に関して不変である。我々の結論を次のように述べることができる。

定理。「G_- を初期条件にもつ K.-P. 系の解 $L(t) = W(t)\, d\, W(t)^{-1}$ となる $W(t)$ の全体を R^* とすると $(-L(t))_-$ は R^*-平坦な接続を定める。」

我々は $(-L(t))_-$ を K.-P. 接続と呼ぶ。R^* 自身群をなさないが我々の意味の接続はなしている。解全体はゲージ場をなしていると考えてよいだろう。

§3. 非線形ハイゼンベルク方程式.

この節では非線形ハイゼンベルク方程式が,内山理論を用いて得られるというロジチェフの仕事[3]を紹介する。これはミンコフスキー時空で考えられているが,一般の曲った時空での拡張はヘル及びダッタ[1]を参照して下さい。

ミンコフスキー時空における電子の方程式で質量を零とおいたもの,即ちニュートリノの方程式を考える。ロジチェフ[3]の記法に従って,ラグランジュ・アクション

$$\mathcal{L} = \int \frac{1}{2i}\left(\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\mu \psi - \overline{\partial_\mu \psi}\,\gamma_\mu \psi\right) d^4 x \tag{3.1}$$

をとることにする。これは,相対論的に不変性をもっている。すなわち,$O(1,3)^{\uparrow}_{+}$ について不変になっている。この意味するところは,$O(1,3)^{\uparrow}_{+}$ の ψ への表現

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S(g)\psi(x) \tag{3.2}$$

について (3.1) が不変になっていることに他ならない。ここで $S(g)$ は $O(1,3)^{\uparrow}_{+}$ の $\mathrm{Spin}\,O(1,3)^{\uparrow}_{+}$ への表現である。従って第2種ゲージ群 $\widetilde{O(1,3)^{\uparrow}_{+}} = G$ にうつると (3.1) は $g \in G$ について不変ではない。そこで G-主束の接続を考えることになるがこれはミンコフスキー距離に関する距離接続を考えることになる。よく知られている様に「ねじれ」が無ければ平担な接続しかないが,我々は「ねじれ」をもった距離接続を考える。ここにロジチェフのアイデアがある。一般の距離(不定値距離でもかまわない)の距離接続の係数を $\Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu}$ とするとき

(3.3) $$\Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} = \left\{ {\mu \atop \sigma\lambda} \right\} + C_{\sigma\lambda}^{\mu}$$

と表わされる，ここで$\left\{ {\mu \atop \sigma\lambda} \right\}$はクリストッフェル接続の係数であり，ねじれは無い。$C_{\sigma\lambda}^{\mu}$がねじれから生じる接続係数である。我々は平坦なミンコフスキー空間を考えているから$\left\{ {\mu \atop \sigma\lambda} \right\}=0$となり，我々の共変微分は

(3.4) $$\nabla_\sigma A^\mu = \partial_\sigma A^\mu + \sum C_{\sigma\lambda}^{\mu} A^\lambda$$

となる。接続が与えられると，スピノルに自動的に接続が定義され

(3.5) $$\nabla_\sigma \psi = \partial_\sigma \psi - \frac{1}{4} C_{\sigma\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \psi$$

とかける。そこで§1の内山理論の一般的枠組を応用しよう。この時，第2種ゲージ群について不変なラグランジュ・アクションは(3.1)で$\partial_\mu \longrightarrow \nabla_\mu$に置き換えたものであり，これを$\tilde{\mathcal{L}}$とかく。接続から定まる曲率のスカラー曲率を$R$とすると

(3.6) $$R = C_{\alpha\beta\varepsilon} C_{\alpha\varepsilon\beta}$$

とかける。第2種ゲージ群について不変なより一般なラグランジュ・アクションは

(3.7) $$\tilde{\mathcal{L}} = \int (L - \mathcal{B} R)\, dv$$

但し， $$L = \frac{1}{2i}(\bar{\psi}\gamma_\mu \nabla_\mu \psi - \overline{\nabla_\mu \psi}\, \gamma_\mu \psi),$$

とかける。このオイラー方程式を求める。変分はψ, $\bar{\psi}$, $C_{\alpha\beta\gamma}$を独立の変数と考えて実行すると

(3.8) $$\sum \gamma_\mu \nabla_\mu \psi = 0\,,$$
$$C_{\alpha\beta\varepsilon} = \frac{1}{8i\mathcal{B}} \bar{\psi} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\varepsilon \psi$$

となり，これより

$$\Sigma \gamma_\mu \partial_\mu \psi + i\lambda_0^2 (\bar{\psi}\gamma_\alpha\gamma_5\psi)\gamma_\alpha\gamma_5\psi = 0 \tag{3.9}$$

となり，いわゆる非線形ハイゼンベルク方程式を得る。

我々は以下の事柄に注意しよう。まず我々の考えた接続のクリストッフェル部分は零であり，従って測地線は直線である。従って平坦に近いものであり，積分可能系に近いものであることが分る。このねじれ部分はテトラッドを考えたために生じたものであり，この方程式は，テトラッド空間における平坦な方程式，或いは，平坦な場の方程式をテトラッドでかいたために生じる非線形方程式と考えられないであろうか。そこで我々は§2で述べたK.-P.系の思想をここに持込んで特殊解，内部対称性等を考えることができないものかと考えたくなる。

References

[1] Hehl, F. W. and Datta, B. K., Nonlinear Spinor Equation and Asymmetric Connection in General Relativity, J. of Math. Physics, 12, (1971), 1334-1339.

[2] Kanemaki, S., Królikowski, W. and Suzuki, O., A Gauge theory for Kadomtsev-Petviashvili System, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 22, (1986), 1119-1128.

[3] Rodichev, V.I., Twisted space and Nonlinear field equations, Soviet Physics JETP, 13, (1961), 1029–1031.

[4] Sato, M., Soliton equations and Grassmann manifolds, lectures delivered at Nagoya Univ., 1982.

[5] Uchiyama, R., Invariant theoretical interpretation of interaction, Phys. Rev., 101, (1956), 1597–1607.