数理解析研究所講究録
第 650 巻 1988 年 78-86

相互作用戸田方程式と線形方程式
（付：直接法に於ける或る現象）

静　大　理　　米　山　　徹（Yoneyama, Tohru）

Part Ⅰ　KdV 方程式

§1 KdV 方程式 と 線形方程式

KdV 方程式の形を

$$d u+6 u \partial u+\partial^3 u=0$$

とする．但し　$d \equiv \partial / \partial t$，$\partial \equiv \partial / \partial x$

Int KdV 方程式の形は

$$d u_i+6 u \partial u_i+\partial^3 u_i = 0$$

N-soliton solution;　$u=\Sigma^N{}_{i=1} u_i$（文献１）

既に知られている（文献２）形から

$\phi^T =(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N)$，$B_{ij} = \phi_i \phi_j /(\kappa_i+\kappa_j)$

とすると 行列 $M = I/(I+B)$ を使って，$g \equiv M\phi$

が

$$u_i \propto g_i{}^2=(g g^T)_{ii}$$

を満たす．尚　$u_i = 4 \kappa_i g_i{}^2$，$u = \Sigma u_i$（文献２）

x，t の scale 変換 をして線形項が残る様にする；実数 a で $x = aX, t = a^3 T$ とすると，

$$d = a^{-3} d',$$

$$\partial = a^{-1} \partial',$$

$$\partial^3 = a^{-3} \partial'^3$$

であるから

$$a^{-3} d' u'+6a^{-1} u \partial' u'+a^{-3} \partial'^3 u' = 0$$

即ち

$$d' u'+6a^2 u' \partial' u'+\partial'^3 u' = 0$$

これは $u \to a^2 u'$ と書換えたと思ってもよい．実はこれ

は $u \sim 0$ の所を考えていることに相当する. 今後 X, T は使わない.

よって $a \to 0$ ($u \to 0$) で線形微分方程式

$$du + \partial^3 u = 0$$

文献

1 T. Yoneyama: J. Phys. Soc. Jpn. 54 (1985) 1081.

2 M. Wadati and K. Sawada: J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980) 312.

§2 Int KdV 方程式と線形方程式

これに対応する相互作用ソリトン方程式は

$$du_i + \partial^3 u_i = 0$$

or $$(d + \partial^3) u_i = 0$$

2成分逆散乱法の量 f_i, g_i の満たす式

$$(\partial - \kappa_i) f_i = u g_i,$$

$$(\partial + \kappa_i) g_i = -f_i$$

及び $dg = -A(t, x, \kappa) g + C(t, x, \kappa) f$, $df = A(t, x, \kappa) f + B(t, x, \kappa) g$, 但し

$$A = -(4\kappa^3 + 2\kappa u + u_x)$$

$$B = -(4\kappa^2 u + 2\kappa u_x + 2u^2 + u_{xx})$$

$$C = 4\kappa^2 + 2u$$

よって

$$dg = -2(2\kappa^2 + u)(\partial g) + u_x g$$

とも書けるが，これらの関係から

$u_i = \alpha_i g_i^2$, (α_i:const.)（文献1）.

$u \to 0$ の時 $u_i = \alpha_i \phi_i^2$, ($g_i \to \phi_i$) となるが

$$du_i / \alpha_i = 2\phi_i d\phi_i,$$

$$\partial^3 u_i / \alpha_i$$

$$= 2\phi_i \partial^3 \phi_i + 6(\partial \phi_i)(\partial^2 \phi_i)$$

$$\partial^2 g_i = (-u + \kappa_i^2) g_i$$

$$\partial^2 \phi_i = \kappa_i^2 \phi_i$$

$$\partial^3 u_i / \alpha_i = 8\kappa_i^3 \phi_i^2$$

$$\therefore \ d\phi_i = -4\kappa_i^3 \phi_i$$

よって

$$\phi_i = \exp(\kappa_i x - 4\kappa_i^3 t + c_i)$$

と広田の直接法などで出る exp の中の形が出た.

これは $u \to 0$ の所でソリトンの「シッポ」を捕まえた事になる.

Int KdV 方程式とは

$(d + 6u\partial + \partial^3) g g^T$ の対角要素が 0 となることである.

§3 $\phi_i \to g_i$ の変換

$g \equiv M\phi$ と置いて M を求める事はこの研究会迄には出来なかった. [しかし, その後考えた所によると, 何とか出せる見通しはついている. ('87年12月現在)]

既に知られている文献2の形から

$$M = I/(I+B)$$

となることは分かっている. 尚

$$g = M\phi,$$

$$u_i = 4\kappa_i g_i^2,$$

$$u = \Sigma u_i$$

であり, また

$$\partial^2 g \doteqdot (k^2-u)g$$

Part II Toda 方程式

§4 Toda 方程式 と 線形方程式

Toda 方程式;

$$d\,[dV(n)/(1+V(n))] = \Delta^2 V(n),$$

但し $d \equiv \partial/\partial t$, Δ は差分演算子

Int Toda 方程式;

$$d[dV_i(n)/(1+V(n))] = \Delta^2 V_i(n)$$

N-soliton solution; $u = \Sigma^N{}_{i=1} u_i$

既に知られている（文献3）形から

$$P = I/(I+B),$$

$$V_i(n) = a(n)\,f_i(n)f_i(n+1),$$

$$V(n) = \Sigma V_i(n)$$

文献

3 T. Yoneyama: J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 753.

§5 Int Toda 方程式 と 線形方程式

KdV の時と同様に $V(n) \to 0$ の時の線形方程式を考えると

$$d^2 V_i(n) = \Delta^2 V_i(n)$$

or $$(d^2 - \Delta^2)\,V_i(n) = 0$$

逆散乱法（Flaschka）で $V(n)=0$ とすると

$$\phi_i(n-1) + \phi_i(n+1) = 2\lambda_i \phi_i(n)$$

$$= (z_i^{-1} + z_i^{1})\phi_i(n)$$

$\phi_i(n+1) = z_i^{-1}\phi_i(n)$ とすると

$$\phi_i(n) = \exp(-\alpha_i n)$$

次に $\phi_i(n)$ の t-dependence を求める.

$$d\phi_i = \tfrac{1}{2}\,[\phi_i(n-1) - \phi_i(n+1)]$$

$$= (\sinh\alpha_i)\,\phi_i(n)$$

$$\phi_i(t) = \exp(\sinh\alpha_i\, t) \equiv \exp(\beta_i\, t)$$

よって

$$\phi_i(t, n) = \exp(\beta_i t - \alpha_i n + c_i)$$

§6 $\phi_i(n) \to V_i(n)$ の 変換

$f \equiv P\phi$ と置いて P を求める事はこの研究会迄には出来なかった．しかし既に知られている文献3の形から

$$P = I/(I+B)$$

となることは分かっている．尚

$$f = P\phi,$$

$$V_i(n) = a(n) f_i(n) f_i(n+1),$$

$$V(n) = \Sigma V_i(n)$$

である．

Part Ⅲ 直接法

§7 直接法に於ける或る現象

Int KdV 方程式の線形の形

$$(d + \partial^3) g_i^2 = 0$$

と広田の直接法の形

$$D_x (D_t + D_x^3) F \cdot F = 0$$

との類似が目につく．そこで

$$\partial (d + \partial^3) g_i^2$$

と　$D_x(D_t+D_x^3)\,g_i\cdot g_i$

との差を出して見る.

$$D_x=(\partial-\partial'),\quad D_t=(d-d')$$

であるから

$$D_xD_t\,g_i\cdot g_i=2g(d\partial g)-2(dg)(\partial g)$$

$$D_x^4\,g_i\cdot g_i=2g(\partial^4g)-8(\partial g)(\partial^3g)+6(\partial^2g)^2$$

となり，又

$$\partial d\,(g_i^2)=2d\,[g_i(\partial g_i)]=2g_i(d\partial g_i)+2(dg_i)(\partial g_i)$$

$$\partial^4\,(g_i^2)=2g_i(\partial^4g_i)+8(\partial g_i)(\partial^3g_i)+6(\partial^2g_i)^2$$

であるから

$$\begin{aligned}D_x(D_t+D_x^3)\,g_i\cdot g_i-\partial(d+\partial^3)\,g_i^2&=-4(dg_i)(\partial g_i)-16(\partial g_i)(\partial^3g_i)\\&=12(\partial g_i)[u_xg_i+2u(\partial g_i)]\\&=12\,[u_xg_i(\partial g_i)+2u(\partial g_i)^2]\end{aligned}$$

これに対して

$$\begin{aligned}\partial\,[6u(\partial g_i^2)]&=12\partial(ug_i\partial g_i)\\&=12\,[u_xg_i(\partial g_i)+u(\partial g_i)^2+ug_i(\partial^2g_i)]\end{aligned}$$

となるが　$u(\partial g_i)^2\neq ug_i(\partial^2g_i)$ なので

差は 0 では ナイ． 即ち

$$D_x(D_t+D_x^3)g_i \cdot g_i$$
$$\neq \partial(d + 6u\partial + \partial^3)g_i^2 = 0$$

双線形方程式は exact に $F = \det(I+B)$ が満しているので，g_i に期待しても無理であろう．但し次の関係が注目される．

$$g = (I+B)^{-1}\phi$$
$$= [\det(I+B)]^{-1}(\widetilde{I+B})\phi$$
$$= F^{-1}(\widetilde{I+B})\phi$$

ここで $\widetilde{A}$ は A の随伴行列式である．

［当日ロビーで広田先生に教えていただいたことを基に，式をきちんと書いてみると ナント

$$D_x[D_t + 6uD_x + D_x^3]\, g_i \cdot g_i = 0$$

という，双<u>非線形</u>方程式とでもいうような奇妙な形となる．但し ［ ］の前の D_x は u に作用しないものとする．］

以上は KdV 方程式についてであるが Toda 方程式についてもこれから考えたい．

以上