数理解析研究所講究録
第654巻 1988年 209-215

ある種の関数空間について

早大教育　和田淳蔵 (Junzo Wada)

§1　序

Xをコンパクト Hausdorff 空間とする。AがX上の関数空間（関数環）であるとは、AがC(X)の閉である部分空間（部分多元環）で1を含みXの点を分離するものをいう。ここでC(X)はX上の複素連続関数全体のBanach環（ノルムは一様ノルム）である。関数環において成り立つ多くの定理は一般には関数空間において成立しないことは勿論である。ここではある条件をみたす関数空間が、関数環の性質をどの程度みたすかを考える。これから述べていく道筋には山口進也氏のアイデアに負う所が多いことを附記しておきたい。

§2　Bishop の分解定理

関数環において、Bishopの分解定理はよく知られている。ここではそれを関数空間Aの場合に一般化することを試みる。

Eをコンパクト Hausdorff 空間Xの部分集合としたとき

$$A(E) = \{f \in C(X) : fg \in A|_E \quad (\forall g \in A|_E)\}$$

$$A_R(E) = \{f \in C_R(X) : fg \in A|_E \quad (\forall g \in A|_E)\}$$

とおく。ここで $A|E$ は A の E における制限，$C_R(X)$ は X 上の実数値連続関数全体を表す。

そのとき X 上の関数空間 A において

$$1 \in A_R(E) \subset A(E) \subset A|_E, \quad A_R(E) = A(E) \cap C_R(E)$$

そして $A(E)$, $A_R(E)$ は algebra となる。

E を X の部分集合とするとき，E が A の antisymmetric set であるとは，$A_R(E)$ の任意の元が定数関数となることをいう。

X の任意の点 x を含む A の antisymmetric set すべての集合和は maximal antisymmetric set となり，そのような A の maximal antisymmetric set が X を分割する。X を分割する A の maximal antisymmetric set の族を $\mathcal{K}(A)$ とすれば，関数空間 A における Bishop の分解定理は次のように得られる。A が関数環のときはこの定理はよく知られている Bishop の分解定理となる（[1], [6]）。

<u>定理 2.1</u>　上に述べられた $\mathcal{K}(A)$ は次をみたす。

(i)　任意の $K \in \mathcal{K}(A)$ は A の BEP－集合である。

(ii)　任意の $f \in C(X)$ が $f|_K \in A|_K$ $(K \in \mathcal{K}(A))$ となれば

$f \in A$となる。

ここでXの閉部分集合EがAのBEP-集合であるとは、任意の$g \in A|E$と$E \cap F = \phi$となるXの任意の閉集合Fと$\varepsilon > 0$に対して、ある$f \in A$が$g(x) = f(x)$ $(x \in E)$, $|f(x)| < \varepsilon$ $(x \in F)$, $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)| = \|g\| = \max_{x \in E} |g(x)|$のように存在することをいう。$E$が$A$のBEP-集合であることは次のことと同等である：$\mu \in A^{\perp}$となる$X$の任意の測度$\mu$に対して$\mu_E \in A^{\perp}$となる。ここで測度$\nu$が$\nu \in A^{\perp}$であるとは、任意の$h \in A$で$\int h\,d\nu = 0$となることである(cf. [4])。

定理2.1の証明は関数環におけるBishopの分解定理の証明と類似しているが、少し複雑である（[8]を参照のこと）。

次にAをX上の関数空間とし、3つの条件を考える。

条件A。Aの任意の尖集合は$A(X)$の尖集合である。

条件B。任意の$K \in \mathfrak{K}(A)$に対して$A|K$の尖集合は$A(K)$の尖集合である。

条件C。任意の$K \in \mathfrak{K}(A)$に対して$A|K$の尖集合は$A_R(K)$の尖集合である。

ここでY上の関数空間Bに対して、Yの閉集合FがBの尖集合であるとは、$f \in B$が存在して$f(x) = 1$ $(x \in F)$, $|f(x)| < 1$ $(x \in Y \setminus F)$となることである。実数値連続関数からなる実関数空間においても尖集合は同様にして定義できる。

ここで次が成り立つ。

1° 条件A ⇒ 条件B, 条件C ⇒ 条件B。

2° Aが条件Cをみたせば $A = C(X)$。

3° Aが条件Bをみたし、Aが自己随伴なら $A = C(X)$。

この2°より次のEllisの定理([3])を得る。

系 2.2 (Ellis) Aの任意の尖集合が $A_R(X)$ の尖集合であれば $A = C(X)$ となる。

§3 条件Aをみたす関数空間

ここでは条件Aをみたす関数空間を考える。それはすべての関数環を含む空間のクラスである。ここにおいて関数環で成立するある定理が成り立つことを述べる。

Aをコンパクト Hausdorff 空間X上の関数空間で条件Aをみたすとする。まずそのような関数空間の例をあげる。

例 (1) すべての関数環は条件Aをみたす。

(2) Bを $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ 上のディスク環とするとき $A = \bar{z}^n B$ は条件Aをみたす (nは自然数)

さらに一般に

(3) X上の関数環Bが次をみたすとする；(*) Bの零集合はBの尖集合である。ここでFがBの零集合とは $F = \{x \in X : f(x) = 0\}$ (fはBのある元)。

そのとき φ を $\varphi \in B$, $|\varphi| = 1$ としたとき、

$A = \overline{\varphi}B$ は条件 A をみたす。Γ 上のディスク環は

(*) をみたす。

(4) $A = \overline{z}B + \overline{\varphi}B$ は条件Aをみたす $\left(\varphi = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}\ (|a|<1),\ B \text{ は (2) の } B\right)$。

条件 A をみたす関数空間の簡単な性質をあげると

1° X 上の関数空間 A が条件 A をみたし、F ($\subset X$) が A の BEP－集合であれば、$A|_F$ は条件 A をみたす。

2° A, B をそれぞれ X, Y 上の関数空間でともに条件 A をみたせば、直和 $A \oplus B$ は条件 A をみたす。

ここで条件 A をみたす関数空間が、関数環でよく知られている次の定理をみたすことを証明する (cf. [5], [7], [2])。

<u>定理3.1</u>. A をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数空間で条件 A をみたすとする。X が A の補間集合の列 $\{F_n\}$ で $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ となれば $A = C(X)$ となる。ここで X の閉集合 F が A の補間集合であるとは、$A|F = C(F)$ となることである。

略証。A が条件 A をみたすとき、任意の $K \in \mathcal{K}(A)$ に対して $A|_{\partial(A|K)}$ の尖集合は $A(K)|_{\partial(A|K)}$ の尖集合であり，$A(K)|_{\partial(A|K)}$ は antisymmetric algebra となる。ここで $\partial(A|K)$ は $A|K$ の Shilov 境界を表す。そして $A|_{\partial(A|K)}$ は essential となる．すなわち $\partial(A|K)$ の閉集合 E に対して、$f \in C(\partial(A|K))$ が $f(E)$

$=0$ ならば $f \in A|\partial(A|K)$ となるとする。そのような E は $\partial(A|K)$ に等しい。つぎに $A(K)$ の尖集合は $A|K$ の BEP－集合となり、これより $P_{A(K)} = \{x \in K : \{x\}$ は $A(K)$ の BEP－集合$\}$ とおけば、$\partial(A|K) = \overline{P_{A(K)}}$ となる。

このことより次が証明される（上の $A|\partial(A|K)$ が essential と $\partial(A|K) = \overline{P_{A(K)}}$ より）

定理 3.2. A が条件 A をみたし、任意の $K \in \mathfrak{K}(A)$ に対して、$\partial(A|K)$ の中に空でない開集合 V が存在して $A|\overline{V} = C(\overline{V})$ であれば $A = C(X)$ となる。

この定理より定理 3.1 が証明される。なんとなれば、任意の $K \in \mathfrak{K}(A)$ に対して

$$\partial(A|K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\partial(A|K) \cap F_n)$$

となるから、Baire の定理より、ある n_0 で $\partial(A|K)$ の中の空でない開集合 $V \subset F_{n_0}$ が $\overline{V} \subset F_{n_0}$ かつ $A|F_{n_0} = C(F_{n_0})$ となる。ゆえに $A|\overline{V} = C(\overline{V})$。定理 3.2 より $A = C(X)$ となる。

このほかにも、いくつかの関数環における定理が、条件 A をみたす関数空間で考えることができる。

参照文献

[1] E. Bishop : A generalization of the Stone-Weierstrass theorem, Pacific J. Math., 11 (1961) 777-783

[2] R. B. Burckel : Characterizations of C(X) among its subalgebras, Marcel Dekker, New York 1972.

[3] A. J. Ellis : Some approximation results for function spaces, Indag. Math., 13 (1980) 125-130.

[4] T. W. Gamelin : Restrictions of subspaces of C(X), Trans. Amer. Math. Soc., 112 (1964) 278-286.

[5] T. W. Gamelin and D. R. Wilken : Closed partitions of maximal ideal spaces, Ill. J. Math., 13 (1969) 789-795.

[6] I. Glicksberg : Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962) 415-435.

[7] H. Ishikawa, J. Tomiyama and J. Wada : On the local behavior of function algebras, Tôhoku Math. J. 22 (1970) 48-55.

[8] 和田淳蔵 : 関数空間における Bishop 分解とその応用, 早大教育学部「学術研究」に掲載予定.