数理解析研究所講究録
第658巻 1988年 63-72

Kummer理論の関数体でのanalogy

愛知教育大　岡田章三　(Shozo Okada)

$k=\mathbb{F}_q(t)$, $A=\mathbb{F}_q[t]$とし，∞をtのpoleとなる素点とする。k_∞をkの∞での完備化とし，Ωをk_∞の代数閉包の完備化とする。

1. まずCarlitz [1], Hayes [8]に従って，ΩにElliptic A-moduleと呼ばれる次のようなA-moduleの構造を導入する。

$u\in\Omega$に対して
$$u^t=u^q+tu$$
$$u^\alpha=\alpha u \qquad \alpha\in\mathbb{F}_q^\times$$
によりtと$\mathbb{F}_q^\times$の作用を定義するとそれらは互いに可換だから自然な作用の積と値の和によってAのすべての元がΩに作用しΩはA-moduleとなる。この作用を多項式を使って$u^M=\rho_M(u)$とかく。つまり例えば$M=\alpha_d t^d+\cdots+\alpha_0$とすると
$$\rho_M(u)=\alpha_d u^{q^d}+\cdots+Mu\in A[u]$$

となる。

次にΩからΩへの解析関数 $e_L(z)=\sum_{k\geq 0}\frac{z^{q^k}}{D_k}$，ここで $D_0=1$，$D_k=(t^{q^k}-t)D_{k-1}^{q}$，を考える。すると$^{\exists}\tilde{\pi}\in\Omega$を使って$L=\tilde{\pi}A$と書くことができる一種のLatticeによって，

$$e_L(z)=z\prod_{\alpha\in L}{}'\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)$$

と書くことができ

$$e_L(Mz)=\rho_M(e_L(z)) \quad \text{for } {}^{\forall}M\in A$$

を満たす。これは関数体における一種の"虚数乗法"とみることができる。

2．Aのζ-関数 $\zeta(s)=\sum_{\substack{a\in A\\ a;\text{monic}}}a^{-s}$ については

i)（Goss [6]）kが負の整数なら$\zeta(k)\in A$であり，Bernoulli数のように帰納的に求めることができる。即ち，

$$\zeta(-i)=1-\sum_{\substack{f=0\\(q-1)|(i-f)}}^{i-1}\binom{i}{f}t^f\zeta(-f)$$

となる。特に，$(q-1)|k$ ならば $\zeta(k)=0$。

ii)（Carlitz [2]）kが正の整数なら

$$\zeta(k)=\begin{cases}0 & \text{if } (q-1)\nmid k\\ \dfrac{B_k}{\Gamma_k}\tilde{\pi}^k & \text{if } (q-1)|k\end{cases}$$

ここで $\Gamma_k = \prod_i D_i^{a_i}$ if $k = \sum_i a_i q^i$,

$$\frac{z}{e_L(z)} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{\Gamma_k} z^k \quad 。$$

が成り立つ。ζ-関数の他にもΓ-関数，Gauss 和，Gross-Koblitz の定理，Brummer-Stark 予想などが研究，証明されている。

3．"円分体" の "類数" 公式 (Galovich-Rosen [4])

$M \in A$ に対して，M-分点を $\Lambda_M = \{\lambda \in \Omega \mid \rho_M(\lambda) = 0\}$ と置いて，k の "M-分体" を $K_M = k(\Lambda_M)$ とする。すると古典的な代数体の円分体と同様に

- K_M/k はアーベル拡大で
- その Galois 群 G は $(A/(M))^\times$ に同型である。

$$\begin{array}{ccc} G & \simeq & (A/(M))^\times \\ \Psi & & \Psi \\ \sigma_a & \longleftrightarrow & a \bmod. M \end{array}$$

ここで σ_a は $\lambda \longmapsto \lambda^a = \rho_a(\lambda)$ for $\lambda \in \Lambda_M$

ということが成り立つ。

$K_M^+ = K_M \cap k_\infty$ と置くと，これは最大 "実" 部分体に相当する。即ち，∞ は K_M^+/k で完全分解し，K_M/K_M^+ で完全分岐する。

今 $h(K)$ を体 K の degree 0 の divisor の類の数

$$\begin{tikzcd}
K_M \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \{1\} \arrow[d, dash] \\
K_M^+ \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{F}_q^\times \arrow[d, dash] \\
k \arrow[r, dash] & (A/(M))^\times
\end{tikzcd}$$

を表わすとする。又，相対類数 h_- を定義するために，A の M を法とする Dirichlet 指標 χ について，

$$\begin{cases} \chi \text{ が even} \iff \chi(\mathbb{F}_q^\times) = 1 \\ \chi \text{ が odd} \iff \chi(\mathbb{F}_q^\times) \neq 1 \end{cases}$$

と定義する。そして h_- を

$$h_- = \prod_{\chi:\mathrm{odd}} \sum_{a:\mathrm{monic}} \chi(a)$$

と置くと，次が成り立つ。

(Galovich-Rosen)

$$h(K_M) = h_-\, h(K_M^+), \quad h(\mathcal{O}_{K_M}) = h_-\, h(\mathcal{O}_{K_M^+})$$

ここで $h(\mathcal{O}_{K_M})$，$h(\mathcal{O}_{K_M^+})$ はそれぞれ K_M, K_M^+ の A 上の整閉 (integral closure) $\mathcal{O}_{K_M}$, $\mathcal{O}_{K_M^+}$ の類数を表わす。

さらに，E を $\mathcal{O}_{K_M}$ の（従って $\mathcal{O}_{K_M^+}$ の）単数群，$\mathcal{E}$ を円単数群，即ち $\mathbb{F}_q^\times$ と $\lambda^{\sigma_a}/\lambda = P_a(\lambda)/\lambda$ たちで生成される E の部分群とする。このとき，やはり古典的場合と同様に，(Galovich-Rosen)　$M = P^m$（素巾）のとき

$$h(\mathcal{O}_{K_M^+}) = [E : \mathcal{E}]$$

が成り立つ。

4. 古典的Kummer理論について

Kummerは Kummer criterion, 即ち h を p-分体の類数とするとき

$$p \mid h \iff p \mid B_n \quad \text{for } 1 \leqslant {}^{\exists}n \leqslant p-1, \quad n\text{は偶数},$$

を証明するのに h を相対類数 h_- と最大実部分体の類数 h_+ に分けて,

$$p \mid h_+ \implies p \mid B_n \quad \text{for } 1 \leqslant {}^{\exists}n \leqslant p-1, \quad n\text{は偶数},$$

という命題を示した。それは以下のような方法による。

まず p-分体の単数群 E と円単数群 $\mathcal{E}$ をGalois群の作用によって各偶指標 χ の固有空間 E_χ, $\mathcal{E}_\chi$ にそれぞれ形式的に分解する。すると $h_+ = [E : \mathcal{E}]$ であるから,

$$p \mid h_+ \implies p \mid [E_\chi : \mathcal{E}_\chi] \quad \text{for } {}^{\exists}\chi \text{: even}.$$

$\mathcal{E}_\chi$ は形式上 $(\zeta-1)^{\sum_\sigma \bar{\chi}(\sigma)\sigma}$, ただし $\sum$ はGalois群の上をわたる, によって生成されるから

$$p \mid [E_\chi : \mathcal{E}_\chi] \implies (\zeta-1)^{\sum_\sigma \bar{\chi}(\sigma)\sigma} = \varepsilon^p \quad \text{for } {}^{\exists}\varepsilon \in E.$$

次に p-分体の $\mathfrak{P} = (\zeta-1)$ での完備化の単数群 U につ

いて，写像 $\wp_n : U \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $(n=1,2,\cdots,p-2)$ を次のように定義する。${}^{\forall}u \in U$ に対して $u=f(\zeta-1)$ となる $f(x) \in \mathbb{Z}[[x]]$ を選び，

$$\wp_n(u) = \left(\frac{d}{dz}\right)^n \log f(e^z-1)\Big|_{z=0} \mod. p$$

と定義する。すると $\wp_n$ は f の取り方によらずに定まり，準同型写像となる。この写像を $\mathcal{E}_\chi$ の生成元に施して

$$\begin{aligned}\wp_n\left((\zeta-1)^{\sum_\sigma \overline{\chi}(\sigma)\sigma}\right) &= \sum_a \overline{\chi}(\sigma_a) a^n \frac{B_n}{n} \\ &\equiv \begin{cases} -\dfrac{B_n}{n} \mod. p & \text{if } \chi=\omega^n \\ 0 & \text{その他} \end{cases},\end{aligned}$$

ここで σ_a は $\zeta \mapsto \zeta^a$ なる Galois 群の元，ω はいわゆる Teichmüller 指標である。$\wp_n$ は準同型写像であるから $\wp_n(\varepsilon^p) = p\wp_n(\varepsilon) \equiv 0 \mod. p$ となる。結局，

$$p \mid [E_\chi : \mathcal{E}_\chi],\ \chi=\omega^n \Rightarrow p \mid B_n.$$

これを用いて前述の命題が示される。

5．有理関数体での Kummer theory の analogy

P を A の既約多項式，$K=K_P$ を k の P-分体，$K^+=K_P^+$ をその最大"実"部分体とし，$h_+=h(\mathcal{O}_{K^+})$ とする。又，p を k の標数，従って q は p の巾とする。

以下はKummerの方法に従って次の定理を証明する。

定理　E, $\mathcal{E}$ をKの単数群，円単数群とすると

$$p \mid h_+,\ 即ち\ p \mid [E:\mathcal{E}] \Rightarrow P \mid B_n \quad \text{for} \quad \underset{(q-1)\mid n}{1 \leq {}^{\exists}n \leq q^d-2}$$

ここでdはPの degree。

まず古典的場合と同様にE, $\mathcal{E}$をそれぞれGalois群の作用によって固有空間に分解する。各偶指標χに対して，それぞれの固有空間をE_χ, $\mathcal{E}_\chi$とする。

λをP-分点Λ_Pのうち0でない元として，固定しておく。すると$\mathcal{E}_\chi$の生成元を$\lambda^{\sum \bar{\chi}(\sigma)\sigma}$とすることができる。

$\mathfrak{P}=(\lambda)$がPの上にあるKでの素idealで，$\mathfrak{P}$はK/kで完全分岐する。Kの$\mathfrak{P}$での完備化の単数群Uの上にKummerの写像に従って写像$\Phi_n : U \to (A/PA)$ $(n=1,2,\cdots,q^d-2)$を以下のように定める。$u \in U$に対して $u=f(\lambda)$となる$f(x) \in A[[x]]$を選び

$$\frac{\frac{d}{dz} f(e_L(z))}{f(e_L(z))} = \frac{f'(e_L(z))}{f(e_L(z))} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\Gamma_n} z^n$$

と展開されるとするとGoss[7]によりa_nはP-integralであることが示される。このa_nを用いて，

$\Phi_n(u) = a_{n-1} \mod . P$ と定義する。するとElliptic module の理論によって $P_P(u)/u$ が λの最小多項式であり，

$$P_P(u) \equiv u^{q^d} \mod . P \;, \qquad P_P'(u) = P$$

であるから，Φ_n は mod. P で f の取り方によらないことがわかる。又，対数微分であるから Φ_n は準同型写像である。そしてこの写像を $\mathcal{E}_\chi$ に施して，

$$\Phi_n\left(\lambda^{\sum \bar{\chi}(\sigma)\sigma}\right) = \sum_a \bar{\chi}(\sigma_a)\, a^n B_n \frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma_n}$$

$$\equiv \begin{cases} -B_n \dfrac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma_n} \mod . P & \text{if } \chi = \omega^n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

という結果を得る。$\Phi_n(\varepsilon^p) = p\,\Phi_n(\varepsilon) = 0$ となるのも古典的場合と同じであるから，

$$p \mid [E_\chi : \mathcal{E}_\chi],\ \chi = \omega^n \Rightarrow p \mid B_n$$

が導びかれる。よって，χ が even 即ち $\chi(\mathbb{F}_q^\times) = 1$ となるのは $\chi = \omega^n$ とするとき $(q-1) \mid n$ となることを考慮して定理を得る。

参考文献

[1] L. Carlitz, A class of polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. 43.(1938), 167-182.

[2] L. Carlitz, On certain functions connected with polynomials in a Galois field, Duke Math. J. 1.(1935), 137-168.

[3] V. G. Drinfeld, Elliptic modules, Math. USSR Sb. 23.(1974), 561-592.

[4] S. Galovich and M. Rosen, The class number of cyclotomic function fields, J. Number Theory 13.(1981), 363-375.

[5] S. Galovich and M. Rosen, Units and Class Groups in Cyclotomic function fields, J. Number Theory 14.(1982), 156-184.

[6] D. Goss, v-adic zeta functions, L-series and measures for function fields, Inv. Math. 55.(1979), 107-119.

[7] D. Goss, Von Staudt for $\mathbb{F}_q[t]$, Duke Math. J. 45.(1978), 885-910.

[8] D. Hayes, Explicit class field theory

for rational function fields, Trans. Amer. Math. Soc. 189 (1974), 77-91.

[9] D. Hayes, Explicit class field theory in global function fields, in "Studies in Algebra and Number Theory" (G.-C. Rota, Ed.), Academic Press, New York, 1979.

[10] S. Lang, "Cyclotomic Fields," Springer-Verlag, New York, 1978.