数理解析研究所講究録
第662巻 1988年 105-113

ある調和写像の正則性について

東大理　小野　薫（Kaoru Ono）

§1．　序

Kähler多様体間の正則写像は調和写像であることが知られている。([L])　この逆については次のことが示されている。

A)（Eells－Wood [E－W]）

X，Yを閉リーマン面とし、$f: X \longrightarrow Y$ を（X，Y上のあるKähler計量に関する）調和写像とする。このときもし、

(＊)　　$e(X) + |\deg(f) \cdot e(Y)| > 0$

（ここに、$e(X)$，$e(Y)$ はX，YのEuler数、$\deg(f)$ は f の写像度を表わす。）

が成り立つならば、f は正則又は反正則写像である。

B)（Siu [S－1]）

M，Nをcompact Kähler多様体とし、更にNは、Siuの意味でstrongly negative curvatureをもつとする。$f: M \longrightarrow N$ を調和写像で、M上のある点でのdifferential df のrankが4

以上であるものとすれば、fは正則又は反正則である。

ここでは、次の定理を証明する。

Theorem 1.

Mをm次元 compact Kähler 多様体で、第1 Chern類 $c_1(M)$ が negative なものとし、Nを閉リーマン面で hyperbolic なものとする。　もしも、調和写像 $f: M \longrightarrow N$ が次の条件

$$(**) \qquad m \cdot | f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M] | > | c_1(M)^m [M] |$$

を満たすとすれば、fは正則又は反正則である。

この定理は、前出の Eells - Wood による結果 A) の一般化になっている。Siu による結果 B) は differential に関する条件がいつも満たされないため、そのまま適用することはできない。しかし [S-1] の中で用いられた Weitzenböck formula を使って示される Lemma ([S-2]) が証明の中で使われる。

Theorem 1 の応用として次のことが証明できる。

Theorem 2.

M, Nを、上述の通りとする。このとき、任意の連続写像 $f: M \longrightarrow N$ に対して、次の不等式が成り立つ。

$$| f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M] | \leqq m \cdot | c_1(M)^m [M] | .$$

これは、閉リーマン面間の連続写像に関する Kneser の結果の一般化と見ることができる。

§ 2. Theorem 1. の証明。

証明のために、semi-stable vector bundle, Einstein-Hermitian vector bundle の定義と基本的な性質を復習する。

M を m 次元 compact Kähler 多様体，Φ を M 上の Kähler form とする。

<u>Definition (2.1).</u>

M 上の正則 vector bundle E が、Φ-semi stable とは、任意の coherent subsheaf $\mathcal{S}$ で、$0 < \operatorname{rank}\mathcal{S} < \operatorname{rank} E$ であるものに対して、

$$\int_M \frac{c_1(\mathcal{S})}{\operatorname{rank}\mathcal{S}} \wedge \Phi^{m-1} \leqq \int_M \frac{c_1(E)}{\operatorname{rank} E} \wedge \Phi^{m-1}$$

が満たされることである。

<u>Definition (2.2).</u>

(E, h, ∇) を M 上の Hermitian vector bundle（即、E は M 上の正則 vector bundle，h は E 上の Hermitian metric，∇ は Hermitian connection）とする。(E, h, ∇) が Einstein-Hermitian vector bundle とは、Ricci curvature K（即、curvature を M 上の Kähler metric に関して縮約したもの）が、M 上の関数 φ を用いて、$K = \varphi \cdot Id_E$ と書けるもののことである。

（注意）上で φ の代りに定数としても E に対する条件とし

ては同値である。

<u>Lemma (2,3).</u>

1) 任意の Hermitian line bundle は、Einstein-Hermitian vector bundle である。

2) 2つの Einstein-Hermitian vector bundles の tensor 積は、Einstein-Hermitian vector bundle である。

3) Einstein-Hermitian vector bundle の dual は、Einstein-Hermitian vector bundle である。

4) Einstein-Hermitian vector bundle は Φ-semi stable である。

5) (M,Φ) を Einstein-Kähler 多様体とすると、その tangent bundle TM は、Einstein-Hermitian vector bundle となる。

以上のことについては、[K] を参照されたい。

$f: M \longrightarrow N$ を Kähler 多様体間の調和写像とすると、その differential の複素化 $d^{\mathbb{C}}f$ は次の4つに分解する。

$$\partial f: T'M \longrightarrow T'N \qquad \bar{\partial} f: T''M \longrightarrow T'N$$
$$\partial \bar{f}: T'M \longrightarrow T''N \qquad \bar{\partial} \bar{f}: T''M \longrightarrow T''N$$

ここに $T'M$, $T''M$ 等は $(1,0)$-tangent bundle, $(0,1)$-tangent bundle を表わす。

<u>Lemma (2.4). ([S-2])</u>

Mを compact Kähler 多様体，Nを hyperbolic なリーマン面とする。このとき、調和写像 $f: M \longrightarrow N$ に対して、f^*TN は正則 line bundle となり、∂f は $T^*M \otimes f^*TN$ の正則な section となる。（ここで TM, TN を $T'M$, $T'N$ と同一視している。）

<u>Proof of Theorem 1.</u>

Lemma (2.4) により、∂f は $T^*M \otimes f^*TN$ の正則な section である。f が反正則でなければ ∂f は恒等的には 0 ではなく、従って任意の開集合上恒等的には 0 ではない。従って、∂f の生成する $\mathcal{O}(T^*M \otimes f^*TN)$ の subsheaf は M の構造層 $\mathcal{O}_M$ と同型である。これを $\mathcal{S}$ と書くことにする。

一方、M の第 1 Chern 類が negative であるから、Aubin-Yau の定理によって、M 上には Einstein-Kähler metric が存在する。Lemma (2.3) 3), 5) から、T^*M は、（上述の M上の Einstein-Kähler metric に関して）Einstein-Hermitian vector bundle である。f^*TN は正則 line bundle であるから、（上述の M上の Einstein-Kähler metric に関して）Einstein-Hermitian vector bundle である。Lemma (2.3) 2), 4) から $T^*M \otimes f^*TN$ は Φ-semi stable（ここで Φ は上述の M上の

Einstein-Kähler metric の Kähler form) となる。Φ-semi stable vector bundle の定義と $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(T^*M \otimes f^*TN)$ から、

i) $0 \leqq \{m \cdot f^*c_1(N) - c_1(M)\} \cdot \{-c_1(M)\}^{m-1}[M]$

が得られる。

N の複素構造を逆にしたものを $\overline{N}$ と書くことにする。$f : M \longrightarrow N$ が正則でないとすると、$f : M \longrightarrow \overline{N}$ は反正則ではなく、従って先の議論により、

ii) $0 \leqq \{-m \cdot f^*c_1(N) - c_1(M)\} \cdot \{-c_1(M)\}^{m-1}[M]$

が得られる。

f が、正則でも反正則でもないとすると、i), ii) から、

$$m \cdot |f^*c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1}[M]| \leqq |c_1(M)^m[M]|$$

となるが、一方、仮定から、

$$m \cdot |f^*c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1}[M]| > |c_1(M)^m[M]|$$

であるからこれは矛盾である。従って f は正則又は反正則である。（終）

§3. 正則写像の energy の評価.

smooth な写像 $f : M \longrightarrow N$ に対して energy $E(f)$ を次式で定義する。

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M \|df\|^2 \, dv_M$$

Proposition (3. 1).

M を compact Kähler 多様体で、その Ricci curvature が下から $\frac{k}{\dim_{\mathbb{R}} M}$ (k は負の定数) で抑えられているものとし、N を non-positively curved Kähler 多様体で、その holomorphic sectional curvature が上から (負の定数) K で抑えられているものとする。このとき正則写像 $f : M \longrightarrow N$ の energy は、

$$E(f) \leqq \frac{|k| \cdot \mathrm{vol}(M)}{2\,|K|}$$

を満たす。

証明には、次の Weitzenböck formula が用いられる。

(Weitzenböck formula for harmonic maps, [E-L], [E-S])

$$\frac{1}{2} \Delta \|df\|^2 = -\|\nabla df\|^2 + \sum_{s,t} \langle R^N(df(e_s), df(e_t))df(e_t), df(e_s)\rangle - \sum_s \langle df(\mathrm{Ric}^M(e_s)), df(e_s)\rangle$$

ここに $\{e_s\}$ は TM の orthonormal frame, R^N は N の curvature tensor, Ric^M は M の Ricci curvature tensor を線型写像 $TM \longrightarrow TM$ と見たものを表わす。

§4. Theorem 2. の証明。

f が $m \cdot |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1}[M]| \leqq |c_1(M)^m [M]|$ を満たしているときは何も示さないでよいから、

$$m \cdot |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1}[M]| > |c_1(M)^m [M]|$$

であるとしよう。 Eells-Sampson [E-S] により、f と homotopic な harmonic map が存在することがわかるので、f は harmonic map であるとしてよい。 すると Theorem 1. から f は正則又は反正則となる。 f が正則として証明すれば十分である。

正則写像 $f : M \longrightarrow N$ に Proposition (3. 1) を適用すると

$$E(f) \leqq \frac{|k| \cdot vol(M)}{2 \cdot |K|} .$$

ここで、$K = -1$, $k = -2m$ (M 上の Kähler form ω_N が Ricci form の -1 倍となるようにとればよい。) を代入して、

$$E(f) \leqq \frac{m}{(2\pi)^m} \cdot \frac{(2\pi)^m}{m!} \cdot |c_1(M)^m [M]| .$$

一方、

$$\frac{1}{m!} |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1}[M]| = \frac{E(f)}{(2\pi)^m} .$$

従って、

$$|f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1}[M]| \leqq m \cdot |c_1(M)^m [M]|$$

を得る。　　（終）

REFERENCES.

[E-L] J. Eells and L. Lemaire, Selected Topics in Harmonic Maps, CBMS Regional Conf., 1981

[E-S] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. Joun. Math. 86 (1964), 109-160

[E-W] J. Eells and J. C. Wood, Restrictions on harmonic maps of surfaces, Topology 15 (1976),263-266

[K] S. Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Iwanami Shoten and Princeton University Press 1987

[L] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et variétés kählériennes, Symp. Math. III. (Bologna) 1970, 341-402

[O] K. Ono, On the holomorphicity of harmonic maps from compact Kähler manifolds to hyperbolic Riemann surfaces, Preprint, 1986

[S-1] Y. T. Siu, The complex analyticity of harmonic maps and strong rigidity of compact Kähler manifolds, Ann. Math. 112 (1980), 73-111

[S-2] Y. T. Siu, Some Recent Results in Complex Manifold Theory related to Vanishing Theorems for semi-positive case, Springer Lecture Notes in Math. 1111 (1985), 169-192