数理解析研究所講究録
第 663 巻 1988 年 62-76

差分方程式と微分方程式

福原満洲雄 (Masuo Hukuhara)

1. 序論

線形差分方程式の解の漸近展開については，Poincaré 以来，不確定特異型線形微分方程式と類似な結果が得られているが，必ずしも理解し易くはなっていない．また，単に類似性に注目するだけでは物足りない．

例えば，Mellin 変換——積分変数を変更するだけで Laplace 変換になるから，これを Laplace 変換という著者もいる——によって差分方程式の解と微分方程式の解とが対応することも既知であるが，それを利用して解の性質をどこまで追求できるのか，文献に暗いのでよく分らない．もっと後学のため，というのは必ずしも後進のためというのではなく，自分をも含めて，さらに微分方程式の理論を発展させるために重要になると思われる知識を広め，かつ高めるために，差分方程式の理論をもっと近づき易いものとして建設しておくべきであると思う．

高階代数的微分方程式の中で，その一般解が動く分岐点をもたないものを求めるという問題設定が良いか悪いかということではなく，Painlevé を初めとする後続の学者の努力はそれなりに高く評価されるべきであろうことはいうまでもない。しかし最初から，Γ関数が，代数的微分方程式の解にならない――このことは吉江琢児先生の東大での講義でも説明されており，周知の事実であった――ということのために，このような関数の研究が対象から外されていたように感じを受けたが，このことに自分は多少の疑問を抱いた。

よく知られているように，それが満たす関係式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

は簡単な差分方程式の一例である。それが何故に微分方程式の解である特殊関数の解析的研究に不可欠となるのか，その理由を解明すべきであったと思う。例えば，Gauss の微分方程式の解の接続公式の中にこのΓ関数が現れるが，その理由はΓ関数が簡単な差分方程式の解だからである。

一方，微分方程式の一般解が動く分岐点をもたないという条件から微分方程式を決定することは多くの困難を伴うのに反して，有理関数を係数とする差分方程式が有理型関数解をもつことが大した困難なしに証明される。しかも，そのような関数が線形微分方程式の解の接続公式の中に現れる，とい

う事実を見逃してはなるまい。

また，モノドロミ不変の線形微分方程式と動く分岐点をもたない非線形微分方程式との関係が R. Fuchs 等によって注意された。もし接続公式が求まれば，それからモノドロミ不変の条件も書き下せる。差分方程式について知られた事実を微分方程式に応用することによって未知の事実が解明されることがあってもよいのではないか。少くとも現在は，このような方向での研究は初期の段階と思われるから，ここで深く立入ることはできないので，単に問題提起に止めておく。

2. 正則型，確定特異型，不確定特異型

連立差分方程式は，行列記号を使って，

$$y(x+1)=A(x)y(x)$$

のように書かれることが多い。$A(x)$ は ∞ を極あるいは正則点とする $n\times n$ 行列である。

$$y(x)=\Gamma(x)^m z(x)$$

とおけば，それは

$$z(x+1)=x^{-m}A(x)z(x)$$

に変形されるから，$A(x)$ の ∞ における極の位数などは大した意味をもたない。差分記号

$$\Delta y(x)=y(x+1)-y(x)$$

を使って，差分方程式を

$$x \cdot \Delta y(x) = A(x)\, y(x)$$

のように書く方がよい。ここで $A(x)$ は，∞ において $x^{1/q}$（q は正の整数）の関数として，正則または有理型とする。微分方程式の場合には，必要なら $x^{1/q}$ を改めて独立変数にとって，いつでも $q=1$ の場合に帰着させることができるが，差分方程式の場合にはそうはいかない。

そこで，$A(x)$ は $x^{1/q}$（q は或る正の整数）の関数として ∞ を正則点または極とし，そのべキ級数展開を

(2)
$$A(x) = \sum_{\nu=\sigma}^{\infty} x^{-\nu/q} A_\nu$$

とする。(1) は $\sigma > 0$ なら正則型，$\sigma = 0$ なら確定特異型，$\sigma < 0$ なら見掛上不確定特異型である。見掛上というのは，有理関数を係数とする線形変換で例外的に確定特異型に変形されることがあるからである。そうでないとき真性特異型というべきであるが，便宜的に'見掛上''真性'を省略して単に不確定特異型という。

形式的べキ級数

(3)
$$P(x) = P_0 + x^{-1/q} P_1 + \cdots + x^{-\nu/q} P_\nu + \cdots\cdots$$

を係数とする線形変換

(4)
$$y = P(x)\, z$$

で (1) をできるだけ簡単にする操作は微分方程式の場合と

全く同様で，説明を要しない．ここで q' は正の整数で，正則型，確定特異型の場合には $q'=q$ でよいが，不確定特異型の場合は $q'=q$ととれるとは限らない．

線形変換 (4) の逆変換

$$z = P^{-1}(x)\,y$$

も考えるから，$\det P(x) \neq 0$ を仮定するのは当然であるが，$\det P_0 \neq 0$ とは限らない．

3. 標準型

前述のようにして，(1)をできるだけ簡単にした差分方程式を (1) の**標準型**という．(1) が正則型か，確定特異型，不確定特異型かに従って，その標準型は次のようになる．

$$(5)_0 \qquad \Delta z(x) = 0,$$

$$(5)_1 \qquad x \cdot \Delta z(x) = (\Lambda + E)\,z(x),$$

$$(5)_2 \qquad x \cdot \Delta z(x) = (\Lambda(x) + E)\,z(x).$$

ここで

$$(6)_1 \qquad \Lambda + E = (\mu_1 I_1 + E_1) \oplus \cdots \oplus (\mu_m I_m + E_m),$$

$$(6)_2 \qquad \Lambda(x) + E = (\mu_1(x) I_1 + E_1) \oplus \cdots \oplus (\mu_m(x) I_m + E_m);$$

I_j は単位行列，E_j はシフト行列の直和，その次元は何れも n_j $(n_1 + \cdots + n_m = n)$，$\mu_j(x)$ は $x^{1/q'}$ の多項式で，$j \neq k$ のとき $\mu_j(x) \not\equiv \mu_k(x) \pmod 1$ である．1次元のシフト行列は零行列を意味する．

標準型の差分方程式の解を（4）に入れることにより(1)の形式解を得る。$(5)_0$ については説明を要しない。$(5)_1$ は $(5)_2$ において $\Lambda(x)$ が定数になった場合とみなせるから、$(5)_2$ について考える。

$(5)_2$ は各 j 毎に1組の連立差分方程式になっているから、j を省略して、

(7) $$x\,.\Delta z(x) = (\mu(x) I + E)\, z(x)$$

において E がシフト行列の直和であるとする。ところで、E を構成する一つのシフト行列に関係のある $z_j(x)$ だけ集めると、それらだけで1組の差分方程式となるから、(7) において E がシフト行列、即ち対角線のすぐ上だけが1で、他の要素がすべて 0、という場合を考えればよい。

E の次元を n とし、(7)を成分の式に書直せば、

(8) $$\begin{cases} x\,.\Delta y_j(x) = \mu(x)\, y_j(x) + y_{j+1}(x) & (j < n) \\ x\,.\Delta y_n(x) = \mu(x)\, y_n(x) \end{cases}$$

となる。この最後の式を満たす関数 $f(x)$ をとれば、

(9) $$x f(x+1) = (\mu(x) + x)\, f(x).$$

この $f(x)$ は和分によって求められる。そこで

(10) $$\begin{cases} y_j(x) = f(x)\, u_j(x) & (j < n) \\ y_n(x) = f(x)\, u_n(x) \end{cases}$$

とおけば、

$$(11) \quad \begin{cases} (\mu(x)+x)\Delta u_j(x) = u_{j+1}(x) & (j<n) \\ \Delta u_n(x) = 0 \end{cases}$$

となるから，$\mu_{n-1}(x), \cdots, \mu_1(x)$ の順にそれらは和分を行うことによって求まる。

4. Mellin 変換

Mellin 変換によって，微分方程式の解と差分方程式の解との対応がはっきり分るのは確定特異型の場合である。

$$(11) \qquad A(x)y(x+1) = B(x)y(x)$$

において，$A(x)$，$B(x)$ が共に m 次の多項式で，$n\times n$ 行列であるとする。従って

$$(12) \qquad A(x) = \sum_{k=0}^{m} x^k A_k, \quad B(x) = \sum_{k=0}^{m} x^k B_k$$

と書ける。Mellin 変換は

$$(13) \qquad y(x) = \int_L t^{x-1}\eta(t)\,dt$$

で与えられる。

積分の道 L は，部分積分を行って

$$(14) \qquad x^k y(x) = (-1)^k \int_L t^{x-1}\vartheta^k \eta(t)\,dt$$

が成立つようにとる。ϑ は微分作用子 $t\cdot d/dt$ を意味する。従って，(11) に対応する微分方程式は

(15) $$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\{A_k\vartheta^k[t\eta(t)]-B_k\vartheta^k\eta(t)\}=0$$

と書ける。

(15)において最高階の導関数 $\eta^{(m)}(t)$ の係数は $t^m(tA_m-B_m)$ であるから，その特異点 $(\neq\infty)$ は t に関する方程式

(16) $$t^m\det(tA_m-B_m)=0$$

の根である。今後，特殊な条件が成立つ場合を除いて考えることにし，予め定係数の線形変換を行って，

(17) $$A_m=I,\quad B_m=\Lambda=\mathrm{diag}[\lambda_1,\cdots,\lambda_m],$$

$0,\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ は相異るとする。それらが(15)の特異点である。

(15)は，$\eta(t)$ が n ベクトルであるから，$\vartheta^k\eta(t)$ $(k=0,1,\cdots,m-1)$ の成分に関する mn 階の連立線型微分方程式である。

一般に，N 連立1階線形微分方程式が確定特異点 λ において $N-1$ 個の正則な解をもち，その λ における値の行列の階数が $N-1$ で，残る一つの解が非整数 κ を指数とするとき，λ を単純な確定特異点，κ をそこにおける特性指数，κ を指数とする解を λ における主要解という。

この定義によれば，$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ は(15)の単純な確定特異点であり，λ_j における特性指数を κ_j とすれば，$A_{m-1}-$

$\lambda_j^{-1}B_{m-1}$ の j 番目の対角線要素が κ_j+m である．

(15) には，その単純な確定特異点において主要解が存在する．そのベキ級数展開から，Mellin 変換によって，それらに対応する (11) の解の漸近行動を知ることができる．

5．Mellin 積分と Riemann-Liouville 積分

Mellin 変換 (13) を Fuch 型微分方程式に適用するとき，L は $\eta(t)$ の単純な確定特異点λをやはり確定特異点である 0 または ∞ —— そこでは正則解が存在しないとする —— を両端とする曲線であるが，簡単のため L は 0, 1 を両端とする線分とする．このとき，1 は単純な確定特異点 —— そこにおける特性指数を κ —— とし，この κ を明示するため，主要解を

(16) $$f_\kappa(t)=(1-t)^\kappa f(t)$$

と書く．従って，$f(t)$ は 0, 1 を両端とする線分上で，0 を除けば正則，0 はその確定特異点である．

$f(t)$ の 1 における Taylor 展開を

(17) $$f(t)=f_0+(1-t)f_1+\cdots\cdots+(1-t)^\nu f_\nu+\cdots\cdots$$

と書き，記号

$$(y)_\nu=y(y+1)\cdots(y+\nu-1)$$

を使うことにより，少くとも形式的には，$f_\kappa(t)$ の Mellin 積分

(19) $$\varphi_K(x)=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^1 t^{x-1}f_K(t)\,dt$$

と $\Gamma(x+K+1)/\Gamma(K+1)$ との積は，$x+K$ の逆階乗級数として

(20) $$\frac{\Gamma(x+K+1)}{\Gamma(K+1)}\varphi_K(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(K+1)_\nu}{(x+K+1)_\nu}f_\nu$$

のように表される。

一般に，a からの R-L 積分は

(21) $$I_a^{\rho}f_K(x)=\frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_a^x(x-t)^{\rho-1}f_K(t)$$

で定義される。これは ρ の整関数である。

a を 1，x を 0，ρ を x とし，積分の上限と下限を入れ換えると，符号は反対になるが，本質的には Mellin 積分となる。このことから，$f(x)$ の正則点で $\varphi(x)$ も正則，確定特異点では $\varphi(x)$ も確定特異点をもつことが分る。

逆階乗級数は $\mathrm{Re}\,x$ が収束座標より大きい範囲——これが収束半平面である——で正則であり，そこで漸近展開になっている。x を σx で置換えたりすることにより，収束半平面の境界線である直線が虚軸と交わるようにもできるし，漸近展開が有効な範囲を広げることも可能である。

$f(t)$ の 1 における Taylor 展開の特異度—— Hadamard が導入した Taylor 級数の Ordre ——と $\varphi(x)$ を表す逆階

乗級数の収束座標との間にも顕著な関係がある。

このように，差分方程式の場合には，解の性質を知る上で，逆階乗級数展開が適していることを物語る。

6. Euler 変換

超幾何型微分方程式

(22) $$(x-\Lambda)\,dy/dx = Ay$$

においては，A は $n\times n$ 行列，Λ は対角行列

(23) $$\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$$

で，何れも定数行列である。これに Euler 変換

(24) $$z(x) = D^{\rho} y(x)$$

を行うということは，(22) に同種の微分方程式

(25) $$(x-\Lambda)\,dz/dx = (A-\rho)z$$

を対応させることである。$\rho=\nu$ が正の整数なら，D^{ν} は ν 回微分子となる。$\rho=-\nu$ が負の整数なら，$D^{-\nu}$ —— これを I^{ρ} とも書く —— ν 回積分子である。

この作用子に関して基本公式

$$D^{\alpha}D^{\beta} = D^{\alpha+\beta}$$

が成立つことはよく知られている。もちろん，D^{0} は恒等写像子である。

Painlevé が彼の名で呼ばれる微分方程式の型を決定したとき，元の方程式にはない助変数を導入したが，その方法は

巧妙であった。ここでの問題はそれとは性格が異なるが、超幾何型微分方程式の解の性質を知るため新しい助変数を導入するとしたら、Euler 変換子 D^p が含む p を助変数とみなすのがよかろう。実際に p が正の整数なら、モノドロミ群は変化しない。一般には p の任意の値に対してモノドロミ群がどう変化するか、さらに一般化して、解の接続公式が p と共にどう変化するかを知ることにより、接続係数が p の如何なる関数かを知ることができないか。大域的問題をこのように設定するのも一つの案であろう。

そこで、(22) の解と (24) の解との対応を明らかにせねばならない。

$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ は互に異なるとすれば、(22), (24) の何れにおいても有限な特異点は単純である。λ_j における (22), (24) の主要解を $\eta_j(x)$, $\zeta_j(x)$ とすれば、それらの対応関係は

(26) $$\eta_j(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{\lambda_j}^{x} (x-t)^{-p-1} \zeta_j(t)\,dt,$$

(27) $$\zeta_j(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{\lambda_j}^{x} (x-t)^{p-1} \eta_j(t)\,dt$$

で与えられる。

このような積分に関する結果を見易くするため

$$f_\alpha(x) = x^\alpha f(x)$$

$f(x)$ は $x=0$ で 0 とならない正則関数とし，そのMaclaurin展開を

$$f(x)=f_0+xf_1+\cdots+x^\nu f_\nu+\cdots$$

とする．その R.-L 積分

$$I_0^p f_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1} f(t)\,dt$$

は $x=0$ で正則な関数

$$F_\alpha(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \frac{(\alpha+1)_\nu}{(p+\alpha+1)_\nu} f_\nu$$

と $\Gamma(\alpha+1)/\Gamma(p+\alpha+1)$ との積となる．この係数が $p+\alpha$ の逆階乗という特徴をもっていることが重要である．

$\mathcal{E}$ を $f(x)$ の 0 を中心とする星状正則域 ―― 0, x を結ぶ閉線分上で $f(x)$ が正則であるような x の集合 ―― とすれば，$F_\alpha(x)$ も $\mathcal{E}$ で正則である．この他にも注目すべき関係が見出される．

7. 接続行列が満たす差分方程式

$x=\lambda_j$ における (24) の主要解を $\varphi_j(x,p)$ で表し，それらで作られる行列 ―― 標準基本解行列という ―― を

$$(28)\qquad \Phi(x,p)=[\varphi_1(x,p),\ldots,\varphi_n(x,p)]$$

とする．

一つの特異点，例えば λ_n，における局所標準基本解行列

を

(29) $$\Psi(x,\rho)=[\psi_1(x,\rho),\ldots,\psi_n(x,\rho)]$$

とする．ここで $\psi_n(x,\rho)=\varphi_n(x,\rho)$ で，$\psi_1(x,\rho),\ldots,\psi_{n-1}(x,\rho)$ は λ_n における正則解で，λ_n における値 $\psi_j(\lambda_n,\rho)$ は第 j 成分だけが 1，第 n 成分を除いて他の成分は 0 という条件できまる．$\Psi(x,\rho)$ に対して $\Phi(x,\rho)$ を大域標準基本解行列という．$\Phi(x,\rho)$ と $\Psi(x,\rho)$ の間には線形関係

(30) $$\Phi(x,\rho)=\Psi(x,\rho)C(\rho)$$

が成立つ．この接続係数 $C(\rho)$ を知ることによって，λ_n をまわる回路に沿って解析接続したとき，$\Phi(x,\rho)$ がどんな変化をするかが分る．

ところが，$C(\rho)$ は線形関係式

(31) $$C(\rho-1)(A+\rho)=B(\rho)C(\rho)$$

を満たす．ここで

(32) $$\begin{cases} A=\mathrm{diag}[a_{11},\ldots,a_{nn}] \\ b_{jk}(\rho)=\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_n-\lambda_k}\left\{a_{kk}+\rho-\dfrac{a_{kn}a_{nk}}{\rho+a_{nn}}\right\} & (j=k) \\ \dfrac{1}{\lambda_n-\lambda_j}\left\{a_{jk}-\dfrac{a_{jn}a_{nk}}{\rho+a_{nn}}\right\} & (j\neq k) \end{cases} \end{cases}$$

である．さらに

(33) $$C(\rho)=D(\rho)\Gamma(A+\rho+1)$$

とおけば，$D(p)$ の各列が $u(p)$ に関する差分方程式

(34) $$u(p-1)=B(p)u(p)$$

の解となる．これを (11) のように書けば，左辺の係数は1次式，右辺の係数は2次式となって，そこで述べた一般論がそのまま適用できるわけではないが，これは特殊な差分方程式として研究の対象となり得るであろう．

$p+a_{nn}$ を両辺に掛けて，分母を払い，左辺の係数の行列式を0とおけば，$p=-a_{nn}$ が n 重根，右辺の係数の行列式を0とおけば，その根は定数行列 A の固有値の符号を変えたものである．

複素関数論において，有理型関数に関してどの程度の成果が得られているのかよく知らないが，ここに現れる有理型関数解は，その位数が1であり，その特異点の分布も分っているのである．

しかし，解というのはベクトル値関数である．また，接続行列を考えるなら，それは行列値関数である．そのとき，零点に対応する点を正常な正則点として扱うのは適切でない．そこには複素関数論的立場から新たな理論を展開する必要があると思われる．

以上，雑駁な話に終止したが，その中から将来新しい何物かが生れ出ることを期待したいものである．