数理解析研究所講究録
第674巻 1988年 10-19

# Orbits in the Maximal Ideal Space of $H^\infty(D)$

神奈川大・工　泉池敬司 (Keiji Izuchi)

単位開円板 $D$ 上の $H^\infty$ の maximal ideal space $M(H^\infty)$ 上の点 $x$ を回転させることによって orbit $O(x)$ が得られる。$O(x)$ は一般に closed ではないので $M(H^\infty)$ での closure $\overline{O(x)}$ を取る。$D$ 内の点の orbit は同半径の円周になるが，それ以外の点 $x$ に対して，$\overline{O(x)}$ はどのようになっているかを調べるのがここでの目標である。特に $H^\infty$ の Shilov 境界 $X = M(L^\infty)$ との関係を見たい。

## §0 定義

$H^\infty$ は境界関数を考えることによって，$L^\infty(\partial D)$ の closed subalgebra と考えられる。corona 定理により $D$ は $M(H^\infty)$ に dense にうめ込まれている。$X = M(L^\infty)$ は $H^\infty$ の Shilov 境界としてうめ込まれる。$\lambda \in \partial D$ と $f \in H^\infty$ に対して $f_\lambda(e^{i\theta}) = f(\lambda e^{i\theta})$ と定義する。$x \in M(H^\infty)$ に対して $H^\infty \ni f \longrightarrow f_\lambda(x)$

は non-zero complex homomorphism となるから，これを表す点を $x_\lambda$ と表す。$x_\lambda$ は点 $x$ を $M(H^\infty)$ の中で左に $\lambda$ だけ回転して得られる点と考えることができる。$O(x)=\{x_\lambda\,;\,\lambda\in\partial D\}$ は点 $x$ の orbit と呼ばれる。$x\in D$ の時は $O(x)=\{y\in D\,;\,|y|=|x|\}$ となりおもしろ味はない。しかし $x\in M(H^\infty)\setminus D$ の時，$O(x)$ は $M(H^\infty)$ での closed subset にはならない（Hoffman [2, p. 165]）。よって orbit を解析的に考えるために，今後は $M(H^\infty)$ での closure $\overline{O(x)}$ を考える。

$E\subset M(H^\infty)$，$\lambda\in\partial D$ に対して，$E_\lambda=\{x_\lambda\,;\,x\in E\}$ とする。当然 $(\overline{O(x)})_\lambda=\overline{O(x)}$ である。$\partial D$ 上の normalized Lebesgue measur を $dm=d\theta/2\pi$ とする。$m$ は $X$ の measure $\hat{m}$ に持ち上げることができる。

$$\int_X \hat{f}\,d\hat{m}=\int_{\partial D} f\,dm \qquad \forall f\in L^\infty$$

$$\pi:\ M(H^\infty)\setminus D\ni x\longrightarrow \hat{z}(x)\in\partial D$$

は fiber projection と呼ばれる。ここで $z$ は $D$ 上の identity 関数であり，$\hat{f}$ は $f$ の Gelfand 変換である。

$$QC=(H^\infty+C)\cap\overline{(H^\infty+C)},\qquad QA=H^\infty\cap\overline{(H^\infty+C)}$$

とする。$M(H^\infty+C)=M(H^\infty)\setminus D$ であるから $QC$ で分離されない点を同一視することによって次の自然な写像が得られる。

$$p:\ M(H^\infty)\setminus D\longrightarrow M(QC).$$

## §1 $x \in X = M(L^\infty)$ の時

$x \in X$ とすると $\overline{O(x)} \subset X$ となる。

命題1. $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 0$ 又は $1$ $(\forall x \in X)$。

証明. $\hat{m}(\overline{O(x)}) > 0$ と仮定する。$\overline{O(x)}$ の $X$ での内点の集合を $E$ とすると, $E$ は $X$ で open かつ closed である。よって Borel 集合 $F \subset \partial D$ で $\widehat{\chi_F} = \chi_E$ なるものがある。

$m(F_\lambda \cap F) = \hat{m}(E_\lambda \cap E) = \hat{m}(E) = \hat{m}(\overline{O(x)}) > 0$

が任意の $\lambda \in \partial D$ に対して成立する。$m$ のエルゴード性より $m(F) = 1$ である。よって $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 1$。

$\hat{m}(\overline{O(x)}) = 1$ ということは, $\overline{O(x)} = X$ と同じであることを注意しておく。

定理1. $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 0$ となる点 $x \in X = M(L^\infty)$ が存在する。

証明. $G$ を $\partial D$ で open-dense であり, かつ $m(G) < 1$ とする。$m(\bigcap_{i=1}^{n} G_{\lambda_i}) \neq 0$ である。$E = \{y \in X ; \widehat{\chi_G}(y) = 1\}$ とすると, $E$ は $X$ で open-closed であり, $E \neq X$ である。

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_{\lambda_i} = \{y \in X ; \widehat{\chi_{\bigcap_i G_{\lambda_i}}}(y) = 1\} \neq \phi$$

より $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \partial D}$ は有限交叉性をもつ。よって

$F \equiv \bigcap \{E_\lambda ; \lambda \in \partial D\} \neq \phi$ である。$F$ は回転で不変な closed subset だから命題1と同様に $\hat{m}$-measure 0 である。

$x \in F$ と取ればよい。

定理2. $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 1$ となる点 $x \in X$ が存在する。

証明は定理3及び5より従う。$x \in X$ が $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 0$ となるか又 $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 1$ となるかの判定法はむつかしいように見える。$X$ の任意の open subset $U$ に対して、必ず $U$ の中の点 $x$ で $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 1$ となるものが存在する。しかし $\hat{m}(\overline{O(y)}) = 0$ となるような $y \in U$ がいつでも存在するかは今の所わからない。$m(\overline{O(x)}) = 0$ の時、$\overline{O(x)}$ がいつでも non-trivial な support set を含むかどうかわからない。

定理1は $z^n H^\infty$ 以外に rotation 不変な $H^\infty$ の closed ideal が存在することに使える（Gorkin [1]）。

§2. $x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ の時.

$x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ の時、$\overline{O(x)}$ は $X$ と交わらないように想像されるが、実はかなり多くの $x$ に対して $\overline{O(x)} \cap X \neq \phi$ となる。ぜひ解決しなくてはならない問題として次がある。

問題1. $\overline{O(x)} \cap X = \phi$ となる $x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ は存在するか？

上の問題に関係する事として次がある。

$$\overline{\{x_{\lambda_n};n=1,2,\cdots\}}\cap X=\phi \qquad {}^{\forall}\!x\in M(H^\infty)\setminus(X\cup D)$$

定理3. $\hat{m}(\overline{O(x)}\cap X)=1$ ( $\overline{O(x)}\cap X=X$ と同じ) となる $x\in M(H^\infty)\setminus(X\cup D)$ が存在する。

証明. $\{z_n\}\subset D$ を interpolating sequence で $z_n>0$ かつ $z_n\to 1$ とする。$x$ として $\{z_n\}$ の $M(H^\infty)$ での cluster point の1つとする。

[1] $\overline{O(x)}\cap X\neq\phi$ である。

(∵) $\overline{O(x)}\cap X=\phi$ と仮定する。$I=0$ on $\overline{O(x)}$ となる inner $I$ が取れる。

$$\varlimsup_{r\to 1}|I(re^{i\theta})|=1 \qquad \text{a.e. } d\theta$$

である。しかし各 $e^{i\theta}$ に対して, $x_{e^{i\theta}}\in\overline{\{re^{i\theta};0<r<1\}}$ であるから $I$ の取り方から

$$\varliminf_{r\to 1}|I(re^{i\theta})|=0 \qquad {}^{\forall}e^{i\theta}$$

となり矛盾が生ずる。

[2] $\hat{m}(\overline{O(x)}\cap X)=1$ である。

(∵) $E=\overline{O(x)}\cap X$ とし, $E\subsetneqq X$ と仮定する。$E_\lambda=E$ $({}^{\forall}\lambda\in\partial D)$ より $\hat{m}(E)=0$ である。よって nontrivial peaking function $f\in H^\infty$ で $f=1$ on $E$ なるものが取れる。$g\equiv 1-f$ とし, $A\equiv\{y\in\overline{O(x)};|g(y)|\geq\|g\|/2\}$ とする。$g=0$ on $E$ より $A\cap X=\phi$ である。又 $A$ は

$M(H^\infty)\setminus D$ の closed subset だから $I=0$ on $A$ となる inner $I$ が存在する。

(#) $\qquad |Ig| \leq \|g\|/2$ on $\overline{O(x)}$

である。[1] と同様に

$$\varliminf_{r\to 1} |(Ig)(re^{i\theta})| = |g(e^{i\theta})| \quad a.e.\, d\theta$$

であり，又 (#) から

$$\varliminf_{r\to 1} |(Ig)(re^{i\theta})| \leq \|g\|/2 \quad \forall e^{i\theta}$$

である。これは矛盾である。

定理4. $\hat{m}(\overline{O(x)}\cap X)=0$ となる $x\in M(H^\infty)\setminus(X\cup D)$ が存在する。

証明. $y\in M(H^\infty)\setminus(X\cup D)$ を任意に取る。$\{\lambda_i\}\subset\partial D$ を dense にとる。$Y\equiv\overline{\{y\lambda_i\,;\, i=1,2,\ldots\}}$ とする。前に注意したように $Y\cap X=\phi$ であり，かつ $\pi(Y)=\partial D$ である。後の議論は定理1の証明とほぼ同じく進められる。

$G$ を $\partial D$ で open-dense であり，$m(G)<1$ とする。

$$\tilde{\chi}_G(x)\equiv\int_X \hat{\chi}_G\, d\mu_x \qquad \forall x\in M(H^\infty)$$

と定義すると $\tilde{\chi}_G$ は $M(H^\infty)$ 上の連続関数となる。ここで $\mu_x$ は $X$ 上の点 $x$ の表現測度である。

$$E\equiv\{x\in Y\,;\,\tilde{\chi}_G(x)<1\}$$

とすると，$E$ は $Y$ の open subset であり，$\pi(E)=\partial D\setminus G$ で

ある。$E^{\lambda} \equiv \{x \in Y ; \widetilde{\chi_{G_\lambda}}(x) < 1\}$ とすると，$E^{\lambda}$ も $Y$ で open であり $\pi(E^{\lambda}) = \partial D \setminus G_\lambda$ である。$\bigcap_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} \neq \phi$ であるから $\bigcup_{i=1}^{n} E^{\lambda_i} \neq Y$ である（$\forall \{\lambda_i\}_1^n$）。よって $\bigcup \{E^{\lambda} ; \lambda \in \partial D\} \neq Y$ である。$x \in Y \setminus \bigcup \{E^{\lambda} ; \lambda \in \partial D\}$ をとる。

$F$ を定理1の証明にでてくる $X$ の closed subset とすると，$\mathrm{supp}\,\mu_x \subset F$ である。$f \in H^\infty$ を non-trivial peaking function で $f \equiv 1$ on $F$ とすると，$f(x_\lambda) = 1$（$\forall \lambda \in \partial D$）である。よって $f = 1$ on $\overline{O(x)}$ となり $\overline{O(x)} \cap X \neq X$ である。

上の $x$ に対して，$\overline{O(x)} \cap X \neq \phi$ かどうかはわからない。$\overline{O(x)}$ が $X$ と接するかどうかを決めるには，$H^\infty$ のより深い結果が必要のように思われる。

定理5．$x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ とする。次は同値である。

1) $\overline{O(x)} \cap X = X$.

2) $\overline{O(y)} = X \quad \forall y \in \mathrm{supp}\,\mu_x$.

3) $\overline{O(y)} = X$ となる $y \in \mathrm{supp}\,\mu_x$ がある。

証明．1) $\Rightarrow$ 2)　$y \in \mathrm{supp}\,\mu_x$ で $\overline{O(y)} \neq X$ と仮定する。$\hat{m}(\overline{O(y)}) = 0$ であるから，$\hat{\hat{m}}(p(\overline{O(y)})) = 0$ である，ここで $\hat{\hat{m}}$ は $m$ を $M(QC)$ へ持ち上げた測度を表わす。Wolff 定理［3］より，$f \in QA$ で $f \neq 0$，$f = 0$ on $\overline{O(y)}$ なるものが取れる。

すると $f=0$ on $\overline{O(x)}$ となり，1) より $f\equiv 0$ となり矛盾が生ずる。

2) $\Rightarrow$ 3) あたりまえ。

3) $\Rightarrow$ 1) $\overline{O(x)}\cap X\neq X$ と仮定する。定理3の証明方法をもう少し精密に行なうと，$f\in H^\infty$ で $f=0$ on $\overline{O(x)}$，$f\not\equiv 0$ が存在することがわかる。Wolff 定理より $h\in QA$ で $h=0$ on $\overline{O(x)}$ がある。よって $h=0$ on $\cup\{(\mathrm{supp}\,\mu_x)_\lambda ; \lambda\in\partial D\}$ となり条件 3) に矛盾する。

系. $x, y\in M(H^\infty)\setminus(X\cup D)$ とする。$\mathrm{supp}\,\mu_x\supset\mathrm{supp}\,\mu_y$ とする。その時，$\overline{O(x)}\cap X=X \Leftrightarrow \overline{O(y)}\cap X=X$.

注 1) $U$ open subset of $M(H^\infty)\setminus D$

$\Rightarrow U\not\subset\overline{O(x)}\quad \forall x\in M(H^\infty)\setminus D$.

2) $\overline{O(x)}\neq M(H^\infty)\setminus D\quad \forall x\in M(H^\infty)\setminus D$

問題2. $U$ open subset of $M(H^\infty)\setminus D$

$\Rightarrow \overline{O(x)}\cap X=X$ なる $x\in U$ が存在する？

§3 Douglas algebras

$E\subset M(H^\infty)\setminus D$ に対して，$O(E)=\cup\{E_\lambda ; \lambda\in\partial D\}$ とする。

定理6. $I$ を連続でない inner とし，$Z(I)=\{x\in M(H^\infty)\setminus D;\ I(x)=0\}$ とする。$\Rightarrow \overline{O(Z(I))}\supset X$

証明. $I$ は interpolating Blaschke product でその零点 $\{z_n\}$ は $z_n \to 1$ と仮定してよい。

[1] $\overline{O(Z(I))} \cap X \neq \phi$ である。

(∵) $\overline{O(Z(I))} \cap X = \phi$ と仮定する。$J = 0$ on $\overline{O(Z(I))}$ なる inner $J$ が取れる。各 $\lambda \in \partial D$ に対して $|J(\lambda z_n)| \leq \frac{1}{2}$ ($\forall n \geq k$) となる最小の $k$ を $n(\lambda)$ で表す。$P_N \equiv \{\lambda \in \partial D ; n(\lambda) \leq N\}$ とする。$P_N$ は $\partial D$ の closed subset である。$\bigcup_1^\infty P_N = \partial D$ であるから、ある $P_N$ は $\partial D$ の open を含む。その open の所で $|I|$ は radial limit が 1 とはならない。矛盾

[2] $\overline{O(Z(I))} \cap X = X$ である。

(∵) $\overline{O(Z(I))} \cap X \neq X$ と仮定する。$f \in H^\infty$ で $f = 0$ on $\overline{O(Z(I))}$ かつ $f \neq 0$ が取れる。$J$ の変わりに $f$ に対して [1] と同じ方針で矛盾を導ける。

系. $B$ を rotation invariant Douglas algebra で $H^\infty + C \subsetneq B$ とする。$\Rightarrow$ $B \neq [H^\infty, \bar{I}_n ; n = 1, 2, \cdots]$, ここで $\{I_n\}$ は inner の列, $[\cdot]$ は生成される Douglas algebra を表す。

系. $I$ を inner とする。$\Rightarrow$ $H^\infty + C = \cap \{[H^\infty, \bar{I}_\lambda] ; \lambda \in \partial D\}$.

問題3. $[H^\infty, \bar{I}_\lambda ; \lambda \in \partial D] = L^\infty$ となる inner $I$ が存在するか?

注) supp $I$ が m-measure 0 の時は上の等号が成立しない。等号が成立することの同値な条件は

$$\bigcup \{ \{x \in M(H^\infty) \setminus D ; |I(x)| < 1\}_\lambda ; \lambda \in \partial D \} = M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$$

である。

問題4. $I$ を連続でない inner とする。その時, $x \in Z(I)$ で $\overline{O(x)} \cap X = X$ なる $x$ が存在するか?

注) $I$ が定理3の $\{z_n\}$ より作られる Blaschke product の時は, すべての $x$ について上の事が成立する。又定理4の証明から, $\pi(Z(I)) = \partial D$ をみたす inner $I$ に対しては, $x \in Z(I)$ で $\overline{O(x)} \cap X \neq X$ なる $x$ が存在する。

問題2 が OK ならば問題4 も OK である。$U = \{|I| < 1\}$ として定理5の系を使えばよい。

## 参考文献


1. P. Gorkin, Rotation invariant ideals in subalgebras of $L^\infty$, PAMS, 95 (1985), 32-36.
2. K. Hoffman, Banach spaces of analytic functions (本), 1962.
3. K. Izuchi, Countably generated Douglas algebras, TAMS. 299 (1987), 171-192.
4. T. Wolff, Two algebras of bounded functions, Duke M. 49 (1982), 321-328.