数理解析研究所講究録
第674巻 1988年 134-144

測度作用素環における単調完備性とその応用

新潟大・理 渡辺恵一 (Keiichi Watanabe)

1. 半有限von Neumann環に対する非可換積分論はもとより、Haagerupの定義した一般のvon Neumann環に対する非可換L^p空間までが、トレースに関する可測作用素の理論に立脚している。von Neumann環の自己共役元から成る有界単調列はstrong operator topologyで収束するが、この単調完備性と呼ぶべき性質を、可測作用素環とその測度位相について考えてみる。可測作用素環では、列の測度収束を仮定して述べられる多くの命題があるが、これらを単調列に適用しようとするとき、単調列が測度収束することの簡単な判定条件を知ることは有用と思われる。ここでは τ-compact と呼ばれる可測作用素の十分広いクラスで単調完備性が成りたつことを示し、系として非可換L^p空間でその成立を得る。また、簡単な応用として非可換L^p空間にある同値関係を導入し、von Neumann環の中心のL^p空間が非可換L^p空間の商空間であることを示す。

最後に、この研究会後、日合先生、中村先生に Ω-number

を用いた定理1の美しい別証明を教えて頂きましたことを感謝致します。

2. τ-compactクラスの単調完備性.

Nを半有限 von Neumann環, τをN上の忠実正規半有限なトレースとする。Nに付属する, 稠密定義域をもつ閉作用素aに対し, aがτ-可測 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ ${}^\forall\delta>0\ {}^\exists p$; Nの射影, $\|ap\|<\infty$, $\tau(1-p)\leq\delta$, と定義する。Segalはトレースではかるかわりに, pが strong operator topology で1に近いことを定義に用いたが, 上のNelsonによる定義の方がうまく働くため, 最近はこれが定着したようである。τ-可測作用素の全体を$\widetilde{N}$とかく。$\widetilde{N}$は閉包をとることによる和, 積, *-演算に関して*-環となる。0における近傍系を$\{N(\varepsilon,\delta)\ ;\ \varepsilon,\delta>0\}$,

$$N(\varepsilon,\delta)=\left\{\begin{array}{l}a\in\widetilde{N}\ ;\ N\text{の射影}\ p\ \text{が存在して}\\ \qquad\qquad \|ap\|\leq\varepsilon,\quad \tau(1-p)\leq\delta\end{array}\right\}$$

と与えることにより, $\widetilde{N}$は完備Hausdorff位相*-環となる。この位相を測度位相とよぶ。

$a\in\widetilde{N}$がτ-compactであるとは, $\tau(E_{(\lambda,\infty)}(|a|))<\infty$, ${}^\forall\lambda>0$ がみたされるときをいう。ここで$E_{(\lambda,\infty)}(|a|)$は区間$(\lambda,\infty)$に対応する$|a|$のスペクトル射影である。このことは$a$が$L^1(N,\tau)$の測度位相の閉包に属すること, または

a の一般化された s-number $\mu_t(a) \to 0$ $(t \to \infty)$ と同値である（s-number の定義等については [3] 参照）。特に、τ が有限トレースなら可測作用素は全て τ-compact である。ここでの主な結果は次の通りである。

定理 1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\widetilde{N}_+$ の増加列とする。ある τ-compact な $a \in \widetilde{N}_+$ が存在して $a_n \leq a$ $({}^\forall n \in \mathbb{N})$ をみたすならば、ある $a_\infty \in \widetilde{N}_+$ が一意に存在して、a_n は a_∞ に測度収束する。

証明は、strong operator topology でのレゾルベントの収束からスペクトル射影の収束を導く定理によって、$\{a_n\}$ の測度収束を引き出す。そのためには [2, Theorem 4.32] の証明と似た議論を2度繰り返せばよい。はじめに、τ-compact の条件なしで成立する補題をあげ、$\widetilde{N}_+$ の単調列が測度収束するかもしれない元をさがす。

補題 2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\widetilde{N}_+$ の増加列とする。ある $a \in \widetilde{N}_+$ が存在して $a_n \leq a$ $({}^\forall n \in \mathbb{N})$ をみたすならば、ある $a_\infty \in \widetilde{N}_+$ が一意に存在して $\|a_n^{\frac{1}{2}}\xi\| \uparrow \|a_\infty^{\frac{1}{2}}\xi\|$, $\xi \in \mathcal{D}(a_\infty^{\frac{1}{2}})$ をみたす。

証明. q_nをa_nが定める quadratic form とする。即ち、

$$q_n(\xi) = \begin{cases} \|a_n^{\frac{1}{2}}\xi\|^2, & \xi \in \mathcal{D}(a_n^{\frac{1}{2}}) \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$q_n(\xi)$の極限を$q_\infty(\xi)$とかくと、q_∞はまた quadratic form である。このとき$\mathcal{D}(q_\infty) \supset \mathcal{D}(a^{\frac{1}{2}})$, $\mathcal{D}(a^{\frac{1}{2}})$は τ-dense subspace だから、$q_\infty$は densely defined. 各$q_n$は下半連続だから、$q_\infty$もそうである。よってある正の自己共役作用素$a_\infty$が存在して$q_\infty$は$a_\infty$の定める quadratic form となっている。すなわち、

$\mathcal{D}(q_\infty) = \mathcal{D}(a_\infty^{\frac{1}{2}})$, $\|a_n^{\frac{1}{2}}\xi\| \uparrow \|a_\infty^{\frac{1}{2}}\xi\|$, $\xi \in \mathcal{D}(a_\infty^{\frac{1}{2}})$.

$R_n = (a_n+1)^{-1}$とかくと、$R_n \geq R_{n+1} \geq R_\infty$が成りたつ。各$R_n \in \mathcal{N}$だから、ある$S \in \mathcal{N}$が存在して$R_n \downarrow S$ (strong), $R_n \geq S \geq R_\infty$をみたす。Spectral theory より、$\mathcal{N}$に付属する正の自己共役作用素a'が$S = (a'+1)^{-1}$の様に存在する。a'の定める quadratic form をq'とかくと、$q_n \leq q' \leq q_\infty$だから結局$q' = q_\infty$, つまり$a' = a_\infty$となり、$a_\infty$は$\mathcal{N}$に付属する。また$a_\infty \leq a$より$a_\infty$はτ-可測でなければならない。 q.e.d.

定理1の証明. a_∞を補題2より得られるものとする。$\{a_\infty - a_n\}_{n=1}^{\infty}$は$\widetilde{\mathcal{N}}_+$の減少列である。補題2の証明と同じ議論で、ある$a' \in \widetilde{\mathcal{N}}_+$が $\|(a_\infty - a_n)^{\frac{1}{2}}\xi\| \downarrow \|a'^{\frac{1}{2}}\xi\|$,

$\xi \in \mathcal{D}(a_\infty^{\frac{1}{2}})$ の様に存在する。 $a_\infty = a_n + (a_\infty - a_n)$ で，正の可測作用素の和は quadratic form sum であるから（[7, Chapter II, Lemma 8]），

$$\|a_\infty^{\frac{1}{2}}\xi\|^2 = \|a_n^{\frac{1}{2}}\xi\|^2 + \|(a_\infty - a_n)^{\frac{1}{2}}\xi\|^2, \quad \xi \in \mathcal{D}(a_\infty^{\frac{1}{2}})$$

が成立している。補題2より $\|a_n^{\frac{1}{2}}\xi\|^2 \uparrow \|a_\infty^{\frac{1}{2}}\xi\|^2$ だから，実は $\|a'^{\frac{1}{2}}\xi\| = 0$, $\xi \in \mathcal{D}(a_\infty^{\frac{1}{2}})$. a' の可測性より $a' = 0$ を得る。従ってレゾルベントの収束は $(a_\infty - a_n + 1)^{-1} \uparrow 1$, strongly. よく知られているように，このとき $(a_\infty - a_n + z)^{-1} \to z^{-1}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ が成立する。[2, Theorem 4.28] により，$E_{(\lambda,\infty)}(a_\infty - a_n) \to E_{(\lambda,\infty)}(0) = 0$, strongly, $\forall \lambda > 0$ が導かれる。$E_{(\lambda,\infty)}(a_\infty - a_n) \precsim E_{(\lambda,\infty)}(a)$ であるから，a が τ-compact という仮定より，

$$\tau(E_{(\lambda,\infty)}(a_\infty - a_n)) \leq \tau(E_{(\lambda,\infty)}(a)) < \infty, \quad \forall \lambda > 0.$$

よって τ の σw-下半連続性により $\tau(E_{(\lambda,\infty)}(a_\infty - a_n)) \to 0$, $(n \to \infty)$. これは $a_n \to a_\infty$（測度位相）を示す。実際，$\forall \varepsilon > 0$ $\forall \delta > 0$ に対し，$\exists n_0$; $\tau(E_{(\varepsilon,\infty)}(a_\infty - a_n)) \leq \delta$ $(\forall n \geq n_0)$ がとれる。このとき $e_n \equiv E_{[0,\varepsilon]}(a_\infty - a_n)$ とおくと，$\|(a_\infty - a_n)e_n\| \leq \varepsilon$, かつ $\tau(1 - e_n) \leq \delta$ となり，これは $a_\infty - a_n \in N(\varepsilon, \delta)$ $(\forall n \geq n_0)$ を示すことである。

q.e.d

$a \in \tilde{N}$ に対し、$\|a\|_p^p = \int_0^\infty \mu_t(a)^p dt$ が成りたつ（[3, Corollary 2.8]）。従って非可換 L^p 空間 $L^p(N, \tau)$ は τ-compact 作用素のクラスに含まれている。定理1と [3, Theorem 3.6] を結びつけると、次を得る。

系3.　$0 < p < \infty$ とする。$L^p(N, \tau)_+$ の増加列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して、ある $a \in L^p(N, \tau)_+$ が存在して $a_n \leq a$ $(^\forall n \in \mathbb{N})$ をみたすならば、ある $a_\infty \in L^p(N, \tau)_+$ が一意に存在して、$\|a_n - a_\infty\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ をみたす。

次に、M を半有限と限らない一般の von Neumann 環とし、Haagerup の非可換 L^p 空間 $L^p(M)$ を考える。M とそのモジュラー自己同型群による接合積のトレースに関する s-number と $L^p(M)$ のノルムについて、$\mu_t(a) = t^{-\frac{1}{p}} \|a\|_p$, $a \in L^p(M)$ が知られている（[3, Lemma 4.8]）。従って $L^p(M)$ は τ-compact なクラスに含まれている。

系4.　$0 < p < \infty$ とする。$L^p(M)_+$ の増加列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して、ある $a \in L^p(M)_+$ が存在して $a_n \leq a$ $(^\forall n \in \mathbb{N})$ をみたすならば、ある $a_\infty \in L^p(M)_+$ が一意に存在して、$\|a_n - a_\infty\|_p \to 0$ が成りたつ。

証明．　定理1により $\exists^1 a_\infty$：可測作用素，$a_n \to a_\infty$（測度位相）である。Haagerup の L^p 空間は測度位相で閉だから，$a_\infty \in L^p(M)$．さらに L^p-norm 位相は測度位相の相対位相に一致しているから（[7, Chapter II, Proposition 26]），$\| a_n - a_\infty \|_p \to 0$ が成りたつ。　q.e.d.

（注意）　局所可測作用素と局所測度収束の位相に対しては，σ-compact 性の条件無しに定理1に相当する結果が成りたつ（[8, Theorem 3.5]）。しかし，測度収束と局所測度収束には微妙な相違がある。実際，有界作用素で上からおさえられた増加列で測度収束しないものの簡単な例がある。

数列空間 ℓ^2 の canonical な基底 $e_n = (0,\cdots,0,\overset{n}{1},0,\cdots)$ に関する行列で ℓ^2 上の有界作用素の増加列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次の様に定義する。

$$a_n = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

E_n は n 次の単位行列。

このとき $\{a_n\}$ は恒等作用素でおさえられているから，局所測度収束する。しかし測度収束しないことをみるのは容易である。

3．非可換 L^p 空間のある同値関係について。

C^*-環とその norm 位相に関して[5]が示した可算無限

Asymmetric Riesz 分解性，[1] が導入した同値関係を非可換 L^p 空間に対して展開することを考える。von Neumann 環 M に対し Haagerup の L^p 空間を $L^p(M)$ で表わす。

命題 5. $0<p<\infty$ とする。$L^{2p}(M)$ の列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ が

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^* x_i = \sum_{j=1}^{\infty} y_j y_j^* \quad (= a \text{ とおく}) \text{ をみたす}$$

$\Rightarrow$ $L^{2p}(M)$ の二重列 $\{z_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ が存在して次が成りたつ。

$$x_i x_i^* = \sum_j z_{ij} z_{ij}^*, \quad y_j^* y_j = \sum_i z_{ij}^* z_{ij}.$$

（但し，無限和は L^p-(quasi-)norm 収束）

証明は標準的で，$x_i^* x_i \leq a$ より $u_i a^{\frac{1}{2}} = x_i$ をみたす積分の元 u_i が実は M の中にとれることに注意すればよい。

いま，$L^p(M)_+$ の 2 元 x, y に対し，

$$x \sim y \iff \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{2p}(M);\ x = \sum z_n^* z_n,\ y = \sum z_n z_n^*$$

なる関係を定義する。同値関係であることは，推移的であることのみいえばよい。$x\sim y$, $y \sim z$ とし，$L^{2p}(M)$ の列 $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ によって

$$x = \sum x_i x_i^*, \quad \sum x_i^* x_i = y = \sum y_j y_j^*, \quad \sum y_j^* y_j = z$$

と書けているとき，命題 5 を y に用いて，$L^{2p}(M)$ の二重列 $\{z_{ij}\}$ が

$$x = \sum_i \left(\sum_j z_{ij} z_{ij}^*\right), \quad z = \sum_j \left(\sum_i z_{ij}^* z_{ij}\right)$$

をみたすようにとれる。正の元から成る二重列の累次和が存在するとき，どのように加えても和が一致することは単調完備性より導かれる。即ち，

命題 6. $1 \leq p < \infty$ とする。$x = \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} z_{ij} z_{ij}^*)$，
$\mathbb{K} ; \mathbb{N} \ni n \longrightarrow (i(n), j(n)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，任意の全単射
$\Longrightarrow \| \sum_{n=1}^{N} z_{\mathbb{K}(n)} z_{\mathbb{K}(n)}^* - x \|_p \to 0 \ (N \to \infty)$.

特に $x = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\mathbb{K}(n)} z_{\mathbb{K}(n)}^* \sim \sum_{n=1}^{\infty} z_{\mathbb{K}(n)}^* z_{\mathbb{K}(n)} = z$。

この同値関係の簡単な応用として，有限なトレース τ をもつ von Neumann 環 N の中心の L^p 空間が $L^p(N, \tau)$ の商空間となることを示す。

$L^p_0 \equiv \overline{\mathrm{span}}\{ a-b ; a, b \in L^p(N, \tau)_+, a \sim b \}$

なる $L^p(N, \tau)$ の閉部分空間を考える。このとき，

$(L^p/L^p_0)^* \cong (L^p_0)^{\perp} = \{ \varphi \in (L^p)^* ; \varphi(a) = 0, a \in L^p_0 \}$.

は等距離同型である。ところが $\varphi \in (L^p)^*$ に対して，$\varphi \in (L^p_0)^{\perp}$ $\Longleftrightarrow \varphi(x^* x) = \varphi(x x^*)$，$x \in L^{2p}(N, \tau)$ であるから，φ は M 上のトレースを定める。従って $(L^p)^* \cong L^q$ の等距離同型で $\varphi = \tau(a \cdot)$，$a \in L^q(N, \tau)$ と書いたとき，a は $\mathfrak{Z}(N)$ に付属する。即ち，$1 \leq p < \infty$ に対して

$(L^p/L^p_0)^* \cong L^q(\mathfrak{Z}(N), \tau)$

故に(p=1ならpredualの一意性によって),

$$L^p(N,\tau)/L^p_0 \cong L^p(\mathfrak{Z}(N),\tau) \quad \text{等距離同型}.$$

4. 日合先生, 中村先生に教えて頂いた証明は次の通りです。[3, Lemma 2.5] は s-number のごく基本的な性質なので, これを自由に用いることにします。

定理1の別証明. $\forall \varepsilon>0$ をとり固定する。$\forall \delta>0$ に対し, $e = E_{(\delta,\infty)}(a)$ とおくと a が τ-compact という仮定より, $\tau(e)<\infty$ である。このとき, $\mu_\varepsilon(a_m-a_n)$

$$\begin{aligned}
&\le \mu_{\varepsilon/3}(e(a_m-a_n)e) + \mu_{\varepsilon/3}(e^\perp(a_m-a_n)e) + \mu_{\varepsilon/3}((a_m-a_n)e^\perp) \\
&\le \mu_{\varepsilon/3}(e(a_m-a_n)e) + 2\mu_{\varepsilon/3}((a_m-a_n)e^\perp) \\
&\le \mu_{\varepsilon/3}(e(a_m-a_n)e) + 2\mu_{\varepsilon/6}(a_me^\perp) + 2\mu_{\varepsilon/6}(a_ne^\perp) \\
&\le \mu_{\varepsilon/3}(e(a_m-a_n)e) + 2\mu_{\varepsilon/6}(a_m^{\frac12})\|a_m^{\frac12}e^\perp\| + 2\mu_{\varepsilon/6}(a_n^{\frac12})\|a_n^{\frac12}e^\perp\| \\
&\le \mu_{\varepsilon/3}(e(a_m-a_n)e) + 4\mu_{\varepsilon/6}(a)^{\frac12}\cdot\delta^{\frac12}
\end{aligned}$$

ここで $\|a_n^{\frac12}e^\perp\| = \|e^\perp a_n e^\perp\|^{\frac12} \le \|e^\perp a e^\perp\|^{\frac12} \le \delta^{\frac12}$

を用いた。$\tau(e)<\infty$ により,

$0 \le ea_1e \le ea_2e \le \cdots \le eae \in L^1(N,\tau)$ である。ゆえに

正の実数より $\{\tau(ea_ne)\}$ は収束し,

$$\|e(a_m-a_n)e\|_1 = \tau(ea_me) - \tau(ea_ne) \to 0 \quad (m\ge n\to\infty).$$

これより $\mu_{\varepsilon/3}(e(a_m-a_n)e) \to 0$ であるから, 結局

$$\forall\varepsilon>0,\quad \mu_\varepsilon(a_m-a_n) \to 0 \quad (m,n\to\infty).$$

これは$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が測度位相でCauchy列であることを示す([3, Lemma 3.1]参照)。$\tilde{N}$は完備だから$a_\infty \in \tilde{N}$があって$a_n \to a_\infty$. 明らかに$0 \le a_n \le a_\infty \le a$である。 q.e.d.

References

1. J.Cuntz and G.K.Pedersen, Equivalence and Traces on C^*-algebras, J.Funct.Anal.,33(1979),135-164.
2. E.B.Davis, One-parameter semigrours, Academic Press, 1980.
3. T.Fack and H.Kosaki, Generalized s-numbers of τ-measurable operators, Pacific J. Math.,Vol.123,No.2(1986),269-300.
4. U.Haagerup, L^p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra, Colloq. Internat. CNRS,NO.274, 1979, 175-184.
5. R.Kadison and G.K.Pedersen, Equivalence in operator algebra, Math.Scand.,27(1970),205-222.
6. E.Nelson, Notes on non-commutative integration, J.Funct.Anal., 31(1979),139-149.
7. M.Terp, L^p-spaces associated with von Neumann algebras, Notes, Copenhagen Univ.,1981.
8. F.J.Yeadon, Convergence of measurable operators, Math.Proc.Camb. Phil.Soc.,74(1973),257-268.
9. K.Watanabe, Equivalence on non-commutative L^p-spaces, preprint.
10. __________, A note on monotone order completeness of measure topology associated with von Neumann algebras, preprint.