数理解析研究所講究録
第676巻 1988年 238-250

凸関数による近似について

佐賀大教育 北原 和明 (Kazuaki Kitahara)

1. 導入.

まずここで取り扱う関数空間及び近似関数の導入を行なっておく.

<u>定義及び記号</u> (1) BV[0, 1] (略して BVと書く) を[0, 1]上有界変動な実数値関数全体で, 各 $f \in BV$ について, ノルムとして,

$$\|f\|_V = |f(0)| + v(f)$$

が導入されているとする. ただし $v(f)$ は f の全変動を示す.

(2) 区間 I 上の実数値関数 $g(x)$ が I の相異なる任意の $(n+1)$ 個の点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, について次なる $(n+1)$ 次の行列 (a_{ij})

$$a_{ij} = \begin{cases} x_{j-1}^{i-1} & 1 \leqq i \leqq n, \quad 1 \leqq j \leqq n+1 \\ g(x_{j-1}) & i = n+1, \quad 1 \leqq j \leqq n+1 \end{cases}$$

の行列式の値が 0 以上となる時に $g(x)$ は n-凸関数であるとい

う．　そこでn-凸関数の全体，連続なn-凸関数の全体及び連続微分可能なn-凸関数の全体をそれぞれ

$$K^{(n)}(I), \quad K_c^{(n)}(I), \quad K_{c'}^{(n)}(I)$$

と書くことにする．　特に考えている区間がはっきりしている時は、区間の部分を省略する．（定義及び記号終り）

この定義から，1-凸関数はIで単調増加する関数であり，2-凸関数は従来の凸関数となる．　またx^nの係数が正であるn次の多項式は，n-凸関数となる．　n-凸関数全体のもつ性質は，Karlin and Studden [3] でよく調べられているが，最近これらの関数による近似問題が扱われている．（[1]，[2]，[7] 等参照）　ここでは，n-凸関数による最良近似解の存在について考えてみようと思う．　まず次の問題を出発点としよう．

<u>問題 1.</u>　各 $n \in N$，各 $f \in BV$ について

$$\|f-\hat{f}\|_v = \inf\{\|f-g\|_v \mid g \in K^{(n)}\}$$

となる $\hat{f} \in K^{(n)}$ つまり f のn-凸関数による最良近似解が存在するか？（問題終り）

Hellyの選出定理を用いると次の答を直ちに得る．

<u>定理 1.1.</u>　任意の与えられた $f \in BV$ について，n-凸関数による最良近似解は存在する．

<u>証明.</u>　与えられた $f \in BV$ について，n-凸関数から成

る関数列 $\{f_m\}$ ($\subset K^{(n)}$) として

$$\lim_{m\to\infty} \| f - f_m \|_V = \inf\{\| f - g \|_V \mid g \in K^{(n)}\}$$

を考える．各 f_m について

$$\| f_m \|_V \leqq \| f - f_m \|_V + \| f \|_V$$

より $\{f_m\}$ はノルム $\|\cdot\|_V$ に関して一様有界である．よって Hellyの選出定理より $\{f_m\}$ の中で各点収束する部分列が存在する．その列を改めて $\{f_m\}$ として，その極限関数を

$$\tilde{f}(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) \qquad x \in [0, 1]$$

とおく．すると $\tilde{f}(x)$ は n-凸関数の定義から $K^{(n)}$ に属し，また $\|\cdot\|_V$ の性質より

$$\| f - \tilde{f} \|_V = \lim_{m\to\infty} \| f - f_m \|_V$$

となるので，$\tilde{f}$ は求める n-凸関数である．（証明終り）

上記の定理より最良近似解の存在が確認できたので，以後，各 $f \in BV$ に対する $K^{(n)}$ の関数による最良近似解の全体を $S^{(n)}(f)$ で表わすことにする．次のセクションでは，定理の結果を基にして，最良近似解の存在についてもう少し考えてみることにする．

2. n-凸関数による近似

セクション1での結果をふまえて，さらに次の2つの問題を考えてみる．

問題2．与えられた $f \in BV$ が連続ならば，$S^{(n)}(f)$ は連

続関数から成っているといえるか？

<u>問題3.</u>　与えられた $f \in BV$ が連続微分可能ならば，$S^{(n)}(f)$ は連続微分可能な関数から成っているといえるか？

（問題終り）

これらの問題を考える上で，$n=1$ の場合，$n=2$ の場合及び $n \geq 3$ の場合それぞれにおいて様子が変ってくるので，3つに分けて考えることにする．

〈$n=1$ の場合〉

単調増加関数で近似を行なった場合，最良近似解について次の結果が得られる．

<u>定理2.1.</u>　与えられた $f \in BV$ について，$K^{(1)}$ の関数による最良近似解 $\hat{f}$ は単一で $\hat{f}(x) = f(0) + p_f(x)$ となる．ただし $p_f(x)$ は $f(x)$ の正変分関数とする．

<u>証明.</u>　$p_f(x)$，$n_f(x)$ を $f(x)$ の正変分・負変分関数とすると，$f(x) = f(0) + p_f(x) - n_f(x)$ となる．まず単調増加関数 $\hat{f}(x) = f(0) + p_f(x)$ において，

$$\|f - \hat{f}\|_V = n_f(1) = \inf\{\|f-g\|_V \mid g \in K^{(1)}\} \quad (1)$$

が成立することを見る．前半については，明らかであろう．また任意の $g \in K^{(1)}$ について

$$n_{f-g}(y) - n_{f-g}(x) \geq n_f(y) - n_f(x) \quad (2)$$

$$0 \leq x \leq y \leq 1$$

となるので，特に $x=0$，$y=1$ とすると，後半の等式が成立することがわかる。 単一性については，$h(x)$ を任意の最良近似解とすると，(2) より $p_{f-h}(x)\equiv 0$ かつ $n_{f-h}(x)\equiv n_f(x)$ が出てくる。 すなはち $h(x)=p_f(x)+f(0)$ である。

（証明終り）

一般に $f\in BV$ が連続（連続微分可能）であるならば，その正変分関数 $p_f(x)$ も連続（連続微分可能）となることから上記の結果を使うと $n=1$ の場合の問題2，3に対する答えを与えることができる。

<u>定理 2.2.</u> $f\in BV$ に対する $K^{(1)}$ による最良近似解 $\tilde{f}$ について次の事柄が成立する。

(1) f が連続ならば $\tilde{f}$ も連続である。

(2) f が連続微分可能ならば $\tilde{f}$ も連続微分可能である。

〈$n=2$ の場合〉

従来の凸関数による近似も凸関数のもっている有用な性質を用いると問題2，3に答えることができる。

<u>定理 2.3.</u> $f\in BV$ に対する $K^{(2)}$ による最良近似解の集合 $S^{(2)}(f)$ について次の事柄が成立する。

(1) f が連続ならば $S^{(2)}(f)\subset C[0,1]$ である。

(2) f が連続微分可能ならば $S^{(2)}(f)\subset C^1[0,1]$ である。

<u>証明.</u> まず (1) について考えてみる。 任意の $\tilde{f}\in S^{(2)}(f)$

について，凸関数の一般的性質より，$\hat{f}$は$(0,1)$で連続である．よって端点での連続性を確めればよい． もし$\hat{f}(0) \neq \lim_{x \to 0+0} \hat{f}(x)$ならば新たに

$$g(x) = \begin{cases} \hat{f}(x) & x \in (0,1] \\ \lim_{x \to 0+0} \hat{f}(x) & x = 0 \end{cases}$$

とおくとfが連続なので$v(f-\hat{f}) > v(f-g)$となるがこれは$\hat{f}$が最良近似解であることに反する． よって$\hat{f}(x)$は$x=0$で連続である． $x=1$における$\hat{f}$の連続性についても同様である．

次に(2)について考えてみる． 連続微分可能な関数fに対する任意の最良近似解を$\hat{f}$とする． 凸関数の表現として，適当な$(0,1)$における単調増加関数$\varphi(x)$が存在して

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(c) + \int_c^x \varphi(t)\,dt \qquad c, x \in (0,1)$$

と書ける． 今の場合，$\hat{f}$の最良近似性から，$\varphi(x)$は有界であるから$\hat{f}$の表現として

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(0) + \int_0^x \varphi(t)\,dt, \quad \lim_{x \to +0} \varphi(x) = \varphi(0), \lim_{x \to 1-0} \varphi(x) = \varphi(1)$$

と書ける． 示せばよいことは，$\varphi(x)$の連続性であるから仮に$\varphi(x)$は$x_0 \in (0,1)$で不連続，つまり

$$\lim_{x \to x_0-0} \varphi(x) < \lim_{x \to x_0+0} \varphi(x)$$

とする． ここでx_0の近傍で$f'(x)$と$\varphi(x)$との位置関係がいくつか考えられるがここでは

$$\lim_{x \to x_0-0} \varphi(x) = \varphi(x_0-0) < f'(x_0) < \varphi(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} \varphi(x)$$

の場合を考える。　正数 ρ

$$\rho = \min\{\varphi(x_0+0) - f'(x_0),\ f'(x_0) - \varphi(x_0-0)\}$$

について，$f'(x)$ の連続性から，適当な δ が存在して

$$|f'(x) - f'(x_0)| < \rho/5 \qquad x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

となる．　そこで十分小さい $(\delta>)\ \varepsilon\ (>0)$ について，次なる単調増加な関数 $\psi(x)$ を考える：

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in [0,\ x_0-\delta),\ x \in (x_0+\delta,\ 1] \\ L(z_1, z_2, z_3, z_4 : x) & x \in [x_0-\delta,\ x_0+\delta]. \end{cases}$$

ここで $L(z_1, z_2, z_3, z_4 : x)$ は頂点 $z_1 = (x_0-\delta,\ \varphi(x_0-\delta))$, $z_2 = (x_0-\delta+\varepsilon,\ f'(x_0) - \rho/5)$, $z_3 = (x_0+\delta-\varepsilon,\ f'(x_0) + \rho/5)$, $z_4 = (x_0+\delta,\ \varphi(x_0+\delta))$ を結んでできる折れ線とする．　$\psi(x)$ の作り方から，凸関数 $g(x) = \hat{f}(0) + \int_0^x \psi(t)\,dt$ において

$$v(f-\hat{f}) = \int_0^1 |f'-\varphi|\,dx > v(f-g) = \int_0^1 |f'-\psi|\,dx$$

つまり $\|f-\hat{f}\|_V > \|f-g\|_V$ となり $\hat{f}$ の最良近似性に反することになる．　よって $\varphi(x_0+0) = \varphi(x_0-0)$ である．　$f'(x)$ と $\varphi(x)$ とのその他の位置関係の場合も同様に示される．（証明終り）

（注）$n=2$ の場合は $n=1$ の場合と違って最良近似解の単一性は必ずしも成立しない．（Kitahara [4] を参照されるとよい．）

〈$n \geqq 3$ の場合〉

最初に n-凸関数に関する有用な２つの結果を述べておく．

<u>定理 2.4.</u> (Karlin and Studden [3]) φ を n-凸関数 $(n \geqq 3)$ とするならば φ は $(0, 1)$ において，C^{n-2} 級の関数である．

<u>定理 2.5.</u> φ を n-凸関数とするならば，$(0, 1)$ の $(n+2)$ 個の点 $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$，$0 < x_1 < \cdots < x_{n+2} < 1$，で

$$\varepsilon \cdot (-1)^i \,(f(x_{i+1}) - f(x_i)) > 0 \qquad 1 \leqq i \leqq n+1$$

となるものは存在しない．ただし ε は 1 又は -1 とする．

<u>証明.</u> Zwick [6] の P. 190 の (11) の結果より明らかである。

まず問題2から考えてみる．与えられた $f \in BV \cap C[0,1]$ に対して，$\hat{f}$ を任意の f の最良近似解とすると定理2.4より $\hat{f}$ は $(0, 1)$ で連続である．また定理2.5から

$$\hat{f}(0+0) = \lim_{x \to 0+0} \hat{f}(x), \quad \hat{f}(1-0) = \lim_{x \to 1-0} \hat{f}(x)$$

が存在するので $n=2$ の場合の説明と同様にして，$x = 0, 1$ における連続性が導かれる．つまり $\hat{f}$ は $[0, 1]$ で連続となる．

続いて問題3について考える前に次の補題を用意する．

<u>補題.</u> g を区間 I 上で定義されている n-凸関数 $(n \geqq 3)$ とする．その時 g' は $\mathring{I}$ (I の内点集合) で $(n-1)$-凸関数である．

<u>証明.</u> 任意の $(n+1)$ 個の $\mathring{I}$ の点 $\{a_i\}_{i=0}^{n}$，$a_0 < \cdots < a_n$，について，次の等式が成立する．

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ g(a_0) & \cdots & g(a_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 - a_0 & \cdots & a_n - a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} - a_0^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} - a_{n-1}^{n-1} \\ g(a_0) & g(a_1) - g(a_0) & \cdots & g(a_n) - g(a_{n-1}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 - a_0 & \cdots & a_n - a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} - a_0^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} - a_{n-1}^{n-1} \\ g(a_1) - g(a_0) & \cdots & g(a_n) - g(a_{n-1}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \int_{I_1} 1\,dx & \cdots & \int_{I_n} 1\,dx \\ \int_{I_1} x\,dx & \cdots & \int_{I_n} x\,dx \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{I_1} x^{n-2}\,dx & \cdots & \int_{I_n} x^{n-2}\,dx \\ \int_{I_1} g'(x)\,dx & \cdots & \int_{I_n} g'(x)\,dx \end{vmatrix} \times (n-2)!$$

$$= S(I_1, \cdots, I_n; g)$$

ただし $I_j = [a_j, a_{j-1}]$, $1 \leqq j \leqq n$ とする. ところで Polya and Szego [5] の P.61 の問題68から

$$S(I_1, \cdots, I_n; g) = (n-2)! \int_{I_n} \cdots \int_{I_1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} \cdots & x_n^{n-2} \\ g'(x_1) & g'(x_2) \cdots & g'(x_n) \end{vmatrix} dx_1 \cdots dx_n$$

となるので, この結果から結論を得る. (証明終り)

与えられた $f \in BV \cap C^1[0,1]$ に対して, $\hat{f}$ を任意の f の最良近似解とすると定理2.4より, 点 c を $(0,1)$ の点として

$$\hat{f}(x) = \tilde{f}(c) + \int_c^x \tilde{f}'(t)\,dt \qquad x \in [0,1]$$

と表現できる. ところで補題より $\tilde{f}'(x)$ は $(0,1)$ で $(n-1)$-凸関数

なので定理2.5から$+\infty$, $-\infty$の場合も含めると$\tilde{f}'(0+0)$及び$\tilde{f}'(1-0)$が存在する。そこでもし$\tilde{f}'(x)$が$(0,1)$で有界ならば$x=0,1$において$\tilde{f}'(0)=\tilde{f}'(0+0)$, $\tilde{f}'(1)=\tilde{f}'(1-0)$となるようにとっておくと$\tilde{f}'(x)$は$[0,1]$で連続となるので$\tilde{f}$は$K_C^{(n)}$に属することになる。あとは$\tilde{f}'(x)$が$(0.1)$で有界でない場合であるが，実はこういった事が成立しないことを示そうと思う。そこで仮に

$$\lim_{x\to 1-0}\tilde{f}'(x)=+\infty \qquad (3)$$

となっているとする。($\lim_{x\to 1-0}\tilde{f}'(x)=-\infty$となることはない。)

定理2,4及び補題から，$\tilde{f}^{(n-2)}(x)$は$(0,1)$上の凸関数であって

$$\lim_{x\to 1-0}\tilde{f}^{(n-2)}(x)=+\infty \qquad (4)$$

となるはずである，というのは，$\lim_{x\to 1-0}\tilde{f}^{(n-2)}(x)<+\infty$とすると

$$\tilde{f}^{(k)}(x)=\tilde{f}^{(k)}(c)+\int_c^x \tilde{f}^{(k+1)}(t)\,dt \qquad x\in(0,1) \qquad (5)$$

$$0\leqq k\leqq n-3$$

より，(3)の式に反する結果が導かれるからである。よって(4)及び(5)から

$$\lim_{x\to 1-0}\tilde{f}^{(k)}(x)=+\infty \qquad 1\leqq k\leqq n-2 \quad (6)$$

を得る。(6)から次なる$(0,1)$の点a_kを各$\tilde{f}^{(k)}$, $1\leqq k\leqq n-2$, に対してとることができる：

$$\tilde{f}'(x)>\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| \qquad x\in[a_1,1)$$

$$\tilde{f}''(x)>0 \qquad x\in[a_2,1)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\tilde{f}^{(n-3)}(x) > 0 \qquad\qquad x \in [a_{n-3}, 1)$$

$$\tilde{f}^{(n-2)}(x) > 0 \text{ かつ } D^{-}\tilde{f}^{(n-2)}(a_{n-2}) > 0 \qquad\qquad x \in [a_{n-2}, 1).$$

そこで $a^* = \max\{a_1, \ldots, a_{n-2}\}$ として次なる $(0,1)$ 上の凸関数を考える：

$$g^{(n-2)}(x) = \begin{cases} \tilde{f}^{(n-2)}(x) & x \in (0, a^*) \\ D^{-}\tilde{f}^{(n-2)}(a^*) \cdot x + K & x \in [a^*, 1]. \end{cases}$$

ただし $K = -D^{-}\tilde{f}^{(n-2)}(a^*) \cdot a^* + \tilde{f}^{(n-2)}(a^*)$ なる定数とする。 すると $g^{(n-2)}$ は作り方から $(0,1)$ において $g^{(n-2)} \leqq \tilde{f}^{(n-2)}$ であって $x=1$ の適当な近傍で有界な凸関数となっている。 そこで

$$g^{(k)}(x) = \int_{a^*}^{x} g^{(k+1)}(t)\,dt + \tilde{f}^{(k)}(a^*)$$

$$0 \leqq k \leqq n-3$$

とすると，補題より $g^{(0)}(x)$ は $[0,1]$ 上の n-凸関数であって

$$g^{(1)}(x) \equiv \tilde{f}'(x) \qquad\qquad x \in (0, a^*]$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < g^{(1)}(x) \leqq \tilde{f}'(x) \qquad\qquad x \in [a^*, 1)$$

となっている． しかも $g^{(1)}(x)$ は $[a^*, 1)$ で有界なので

$$v(f - \tilde{f}) > v(f - g^{(0)})$$

となり

$$\| f - \tilde{f} \|_V > \| f - g^{(0)} \|_V$$

となるのであるがこれは $\tilde{f}$ の最良近似性に反する。 つまり

$$\lim_{x\to 1-0} \tilde{f}'(x) < +\infty$$

となる。 同様の論法で $x=0$ の近傍における $\tilde{f}'$ の有界性を確認することができる。

以上の内容及び $n=1, 2$ の場合の結果をまとめると次の定理を得たことになる。

定理2.6. 各 $n \in \mathbb{N}$, 与えられた $f \in BV$ について次の事柄が成立する：

(1) f が連続ならば，$S^{(n)}(f) \subset K_c^{(n)}$ である。

(2) f が連続微分可能ならば，$S^{(n)}(f) \subset K_{c^1}^{(n)}$ である。

参考文献

[1] R.B. Darst and S. Sahab, "Approximation of continuous and quasi-continuous functions by monotone functions", J. Approx. Theory 38 (1983), 9-27.

[2] R.Huotari, D.Legg, A.D. Meyerowitz and D. Townsend, "The natural best L^1-approximation by nondecreasing functions", J. Approx. Theory 52 (1988), 132-140.

[3] S. Karlin and W.J. Studden, Tchebycheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics, John Wilely &

Sons, New York - London - Sydney, 1966.

[4] K. Kitahara, "Approximation in the function space of bounded variation", in preparation.

[5] G. Polya and G. Szego, Problems and Theorems in Analysis I, Springer-Verlag, New York, 1972.

[6] D. Zwick, "Characterization of WT-spaces whose derivatives form a WT-space", J. Approx. Theory 38 (1983), 188-191.

[7] D. Zwick, "Existence of best n-convex approximations", Proc. A.M.S. 97 (1986), 273-276.