数理解析研究所講究録
第 696 巻 1989 年 70-76

拡大的同相写像の存在しない空間について

Univ. of Houston　加藤　久男 (Hisao Kato)
筑波大数学系　川村　一宏 (Kazuhiro Kawamura)

以下空間は全て continuum (= compact connected metric space) とする。Continuum X 上の homeomorphism $f: X \to X$ が expansive であるとは f が次の条件をみたすこととする。

(*) $c>0$ が存在して、任意の $x \neq y \in X$ に対し、ある $n \in \mathbb{Z}$ が $d(f^n(x), f^n(y)) > c$ であるようにとれる. 但し d は X 上の metric.

Expansive homeomorphism はその空間の可算ベースを決めるから、Expansive homeomorphism の存在は空間の位相的な性質を強く規定すると考えられる。そこで次の問題を考える。

問題：どのような空間の上に expansive homeomorphism が存在する（しない）のか？

ここでは連続体理論の中に現われる空間族について考えることにする。この問題に対して、最近加藤によっていくつか

の結果が得られている（[K_1], [K_2], [K_3]）．今回．expansive homeomorphism の存在しない、新しい空間族を得ることができた。

定義１． 1)．空間 X が $\underline{\theta\text{-continuum}}$ ($\underline{\theta n\text{-continuum}}$ resp.) であるとは、任意の subcontinuum $Y \subseteq X$ に対して、$X \setminus Y$ の component の数が有限個（高々 n 個 resp.）であることである。X の全ての subcontinuum が θ-continuum（θn-continuum resp.）であるとき、X を hereditary θ-continuum（hereditary θn-continuum resp.）という。

2)．空間 X が Suslinian であるとは、次の条件をみたす X の subcontinuum の collection は、常に高々可算であることである。

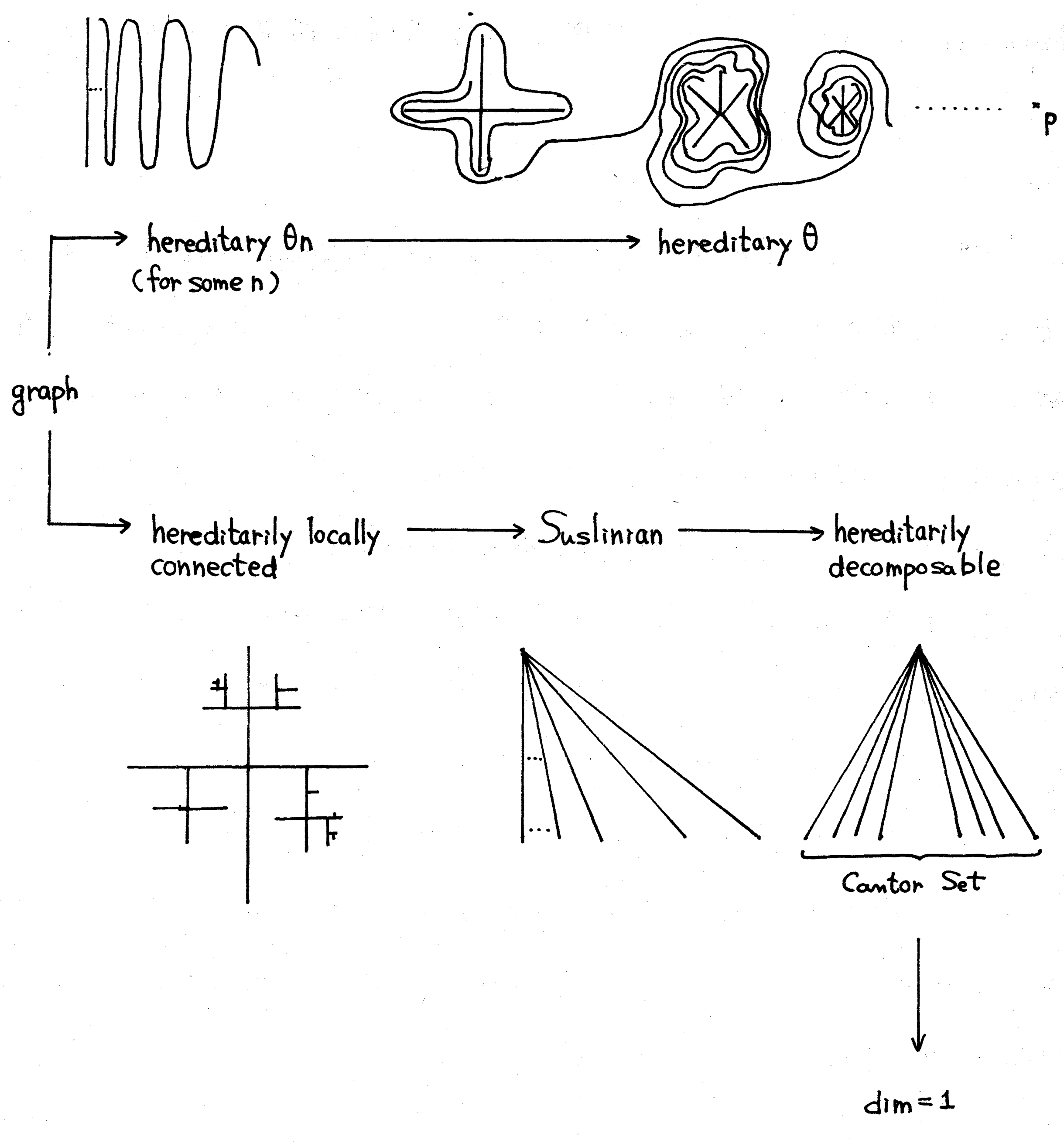
(i) 任意の $\mathfrak{F}$ の member は一点でない X の subcontinuum．

(ii) 任意の $K, L \in \mathfrak{F}$ に対し、$K \cap L = \phi$.

3)．空間 X が hereditarily decomposable であるとは，任意の X の subcontinuum Y に対して、ある subcontinua $A, B \subsetneqq Y$ があって、$Y = A \cup B$ とできることである。

これらの空間の間には、以下のような関係がある。いくつかの例と共に、diagram で示しておく．

例２．



最初の Main Theorem は以下のものである。

定理 3. Suslinian, hereditary θ-continuum は expansive homeomorphism を持たない。

定理3の証明には次が使われる。

定理4 ([G-V], [G], [V]). X は hereditarily decomposable θ-continuum とする。次をみたす map $m: X \twoheadrightarrow G$ が存在する。

(1) G は graph で、$m^{-1}(p)$ は continuum ($\forall p \in G$).

(2) 任意の $f: X \twoheadrightarrow X$ homeomorphism に対して、homeomorphism $h: G \twoheadrightarrow G$ が、$h \circ m = m \circ f$ となるように存在する。

補題5 ([M], [K_2]). $f: X \twoheadrightarrow X$ を expansive homeomorphism とする。次をみたす $\delta > 0$ が存在する。

任意の subcontinuum $A \subsetneqq X$ で一点でないものに対して $n_0 > 0$ が、次のいずれかをみたすようにとれる。

(*) $\forall n \geq n_0$ に対して、$\operatorname{diam} f^n(A) \geq \delta$ 又は

(**) $\forall n \geq n_0$ に対して、$\operatorname{diam} f^{-n}(A) \geq \delta$.

Suslinian, hereditary θ-continuum X 上に expansive homeomorphism $f: X \twoheadrightarrow X$ が存在したとする。適当な f-invariant subcontinuum M に対して定理4を使うと、map $m: M \twoheadrightarrow G$ と homeomorphism $h: G \twoheadrightarrow G$ が導びかれる。h の'動き'はわかり易いもので、特に h には periodic point が存在することが [K_2] の手法を使うことでわかる。補題5を使って m の fibre の動き方をみることで、矛盾が導びかれる。

定義6. (1) 空間 X が tree-like であるとは、X が tree の inverse limit として表わされることである。

(2) 平面 $\mathbb{R}^2$ に含まれる空間 X で、$\mathbb{R}^2 \setminus X$ が connected であるものを、non-separating plane continuum という。

上の2つのクラスは連続体理論の中で重要なものだから、これらの空間の上に expansive homeomorphism が存在するかどうかは興味ある問題である。これについて加藤は次の結果を得た。

定理7 [K4] Hereditarily decomposable, tree-like continuum は expansive homeomorphism を持たない。

証明には [K3], [K2] の手法を使う。一般の tree-like continuum についてはまだわかっていない。non-separating continuum については、expansive homeomorphism の存在については未解決だが、

命題8. Non-separating plane continuum 上には positively expansive open map は存在しない。

これは平出によって得られた「positively expansive open map の存在する空間にはある種の'local homogeneity'がある」という結果の証明

と見直すことで容易に得られる。

References

[G], E.E.Grace, Monotone decomposition of θ-continua, Trans. A.M.S. 275 (1983), p.287-295.

[G-V], E.E.Grace-E.J.Vought, Monotone decomposition of θn-continua, Trans. A.M.S. 263 (1981), p.261-270.

[K_1] H.Kato, The nonexistence of expansive homeomorphisms of 1-dimensional ANRs, to appear in Proc. A.M.S.

[K_2] ______, The nonexistence of expansive homeomorphisms of dendroids, preprint.

[K_3] ______, The nonexistence of expansive homeomorphisms of Peano continua in the plane, to appear in Top. and its Appl.

[K_4] ______, The nonexistence of expansive homeomorphisms of hereditarily decomposable tree-like continua, preprint.

[K-Ka] H.Kato-K.Kawamura, A class of continua which admit no expansive homeomorphisms, preprint.

[Ka] K.Kawamura, A direct proof that each Peano continuum with a free arc admits no expansive homeomorphisms, Tsukuba J. of Math. 12 (1988), p.521-524.

[M], R. Mané, Expansive homeomorphisms and topological dimension, Trans. A.M.S. 212 (1979), p. 313 - 319.

[V]. E.J. Vought, Monotone decomposition of continua, General Topology and Modern Analysis, (Proc. Conf. Univ. California, Riverside, Calif. 1980, hornoring F.B. Jones), Academic Press, New York, (1981), p. 105-113.