数理解析研究所講究録
第696巻 1989年 106-117

Anosov type の geodesic flow をもちfocal point をもたない多様体におけるVisibility Axiom

名大 理 鵜飼 徹夫 (Tetsuo Ukai)

1. はじめに

Mを単連結完備リーマン多様体で focal point をもたないものとする。(完備リーマン多様体M'が、focal point をもたないとは、任意の geodesic $\tau:R\to M'$がM'の1次元部分多様体として focal point をもたないことである。)

Mの次元をnとする。d(,)をM上の距離関数とする。SMをMの unit tangent bundleとする。任意のvector $v\in SM$に対しγ_vを$\gamma_v'(0)=v$をみたすMの uniqueな maximal geodesicとする。ただし$\gamma_v'(t)$はγ_vの時刻tにおける速度である。SM上のgeodesic flow $T_t:SM\to SM(t\in R)$ は、$v\in SM$ に対し、$T_tv:=\gamma_v'(t)$と定義される。geodesic flow によって定義されるSM上のvector field をV とする。

定義 1.1. SM上のgeodesic flow が<u>Anosov type</u>であるとは、次の条件がみたされることである。

$\forall v \in SM$に対し、vにおけるtangent space $(SM)_v$は次のように直和分解される。

$$(SM)_v = X_s^*(v) \oplus X_u^*(v) \oplus Z(v)$$

$(\dim X_s^*(v)>0,\ \dim X_u^*(v)>0,\ \dim Z(v)=1)$　ここに、$Z(v)$は$V(v)$によって生成されるvector spaceである。さらに、ある正の数a, b, cが存在し、次のi), ii)が成立する。

i)　$\forall \xi \in X_s^*(v)$に対し、$\| dT_t\xi \| \leqq a\| \xi \| e^{-ct}$　$(t \geqq 0)$

$\| dT_t\xi \| \geqq b\| \xi \| e^{-ct}$　$(t \leqq 0)$

ii)　$\forall \eta \in X_u^*(v)$に対し、$\| dT_t\eta \| \leqq a\| \eta \| e^{ct}$　$(t \leqq 0)$

$\| dT_t\eta \| \geqq b\| \eta \| e^{ct}$　$(t \geqq 0)$

ただし、$\| \cdot \|$はSM上の自然なRiemannian metricによるnormである。

M上の2つの unit speed geodesic c_1、c_2は、ある定数b_1が存在して$\forall t \geqq 0$に対し、$d(c_1(t), c_2(t)) \leqq b_1$となるとき<u>asymptotic</u> であると呼ばれる。asymptotic 関係は、同値関係であるので、$\{c \mid c$はM上のunit speed geodesic$\}$を、この関係で割ってできる集合を$M(\infty)$と書き、Mの境界と呼ぶ。asymptotic関係による同値類を<u>無限遠点</u>と呼ぶ。unit speed geodesic $c: R \to M$に対応する同値類のことを$c(\infty)$と書き、パラメーターを逆にしたgeodesic $t \to c(-t)$に対応する同値類のことを$c(-\infty)$と書く。

以上のような定義のもと、次の定理を得た。

<u>主定理</u>　Mを focal pointをもたない単連結完備リーマン多様体とする。Mの断面曲率Kは $K > -k^2$（kはある正の定数）をみたし、SM上の geodesic flow は Anosov type であるとする。そのとき、$\forall z, w \in M(\infty), z \neq w$ に対し、unit speed geodesic $\alpha : R \to M$ で $\alpha(-\infty) = z, \alpha(\infty) = w$ をみたすものが、parameter の translation による parameter の取替えを除いて unique に存在する。

この定理は、[9]の Theorem 4.3 の拡張になっている。

任意の $p \in M$ と任意の $x, y \in \overline{M} := M \cup M(\infty)$, $p \neq x$, $p \neq y$ に対し、

$\measuredangle_p(x, y) := \measuredangle(\gamma'_{px}(0), \gamma'_{py}(0))$ と定める。

ただし、γ_{px}, γ_{py} は、それぞれ p から x, p から y への unit speed geodesic である。

Mが次の条件をみたすとき、Mは <u>Visibility Axiom</u> をみたすという。

$\forall p \in M$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対して、ある $r(p, \varepsilon) \in R$ が存在し、geodesic segment $\gamma : [a, b] \to M$ が $d(p, \gamma([a, b])) \geqq r$ をみたすならば、$(\gamma(a), \gamma(b)) \leqq \varepsilon$ が成立する。

主定理より次の系を得る。

<u>系</u>　主定理の仮定のもとに、Mは Visibility Axiomをみたす。

主定理の証明の概略と系の証明は、§3で述べる。

1989年2月に京都大学数理解析研究所で開かれた研究集会「力学系の研究」の1カ月程後に、R.O.R. Rodriguez氏からの手紙により、筆者は、Mañé[6] が主定理よりも、より一般的な結果を得ていたことを知った。

Mañé の得たその結果は、主定理を含んでいる。

主定理の証明方法は、Mañé の証明方法と、少し異なる。

2. Lagrage tensor

$^{\forall}v \in SM$ に対し、$N\gamma_v := \bigcup_{t\in R} \{x \in M_{\gamma_v(t)};\ x \perp \gamma_v'(t)\}$ と定める。ただし、$M_{\gamma_v(t)}$ は $\gamma_v(t)$ における tangent speace である。$N\gamma_v$ は、geodesic $\gamma_v: R \to M$ の normal bundle である。

$N\gamma_v$ の smooth bundle endomorphism $R_v : N\gamma_v \to N\gamma_v$ を、$x \mapsto R(\gamma_v'(t), x)\gamma_v'(t)$ によって定義する。ただし、R はMの curvature tensor である。(X,Y,Zを M 上の vector field とする。$R(X,Y)Z$ は $R(X,Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ と定義される。)

定義 2.1. $^{\forall}v \in SM$ に対し、Yを $N\gamma_v$ の smooth bundle endomorphism とする。Yを $\gamma_v(t)$ 上の fiber に制限したものを $Y(t)$ と書く。次の条件がみたされるときに、Yは γ_v に沿う <u>Jacobi tensor</u> と呼ばれる。

1）あるt∈Rに対し、$\ker Y(t) \cap \ker Y'(t) = 0$

2）Yは、次の differential equation をみたす。

$$Y'' + R_v \cdot Y = 0$$

ただし、Y'は、γ_v' に関する covariant derivativeである。

任意の Jacobi tensor をγ_vに沿うすべての
parallel normal vector field に適用することにより、γ_v
に沿う
Jacobi field の (n-1) 次元空間が得られる。

γ_vに沿う2つの Jacobi tensor Y, Zに対し、
$W(Y,Z) := Y'^{*}Z - Y^{*}Z'$と定める。ただし、$Y^{*}$は、
Riemannian metric に関する adjoint である。W(Y, Z)は、
YとZの <u>Wronskian</u> と呼ばれる。

定義 2.2. $^\forall v \in SM$に対し、Yをγ_vに沿うJacobi tensorとする。Yが$W(Y,Y) \equiv 0$をみたすとき、Yは、γ_vに沿う<u>Lagrange tensor</u> と呼ばれる。

Aを、Lagrange tensor で、初期値$A(0) = 0$, $A'(0) = 1$によって与えられるものとする。任意の実数$t \neq 0$に対し、Aは
nonsingular である。任意の実数$s \neq 0$に対し、D_sを、
Lagrange tensor で、境界値$D_s(0) = 1$, $D_s(s) = 0$によって与えられるものとする。任意の実数$t \neq s$に対し、D_sは
nonsingular である。$s \to \infty$とするとき、D_sは、

Lagrange tensor Dに収束することが知られている。

Dは、 <u>stable Jacobi tensor</u> と呼ばれる。$^\forall t \in R$に対し、Dは nonsingular である。どのgeodesicに沿うかを示すために、$^\forall v \in SM$に対し A_v, D_vを、それぞれ、γ_vに沿うJacobi tensor A,Dとする。

補題 2.3. ([4], p.247) M を focal point をもたない単連結完備リーマン多様体とする。Mの断面曲率KはK$> -k^2$ (kはある正の定数)をみたすとする。$X := A^{-1}D$とし、$T := (1/k)\mathrm{arccoth}(2/k)$とする。そのとき、$^\forall t \geqq T$に対し、

$$(\!(A(t))\!) \geqq (4k\|X(t)\|)^{-1/2}$$

が成り立つ。ただし、

$(\!(A(t))\!) := \min\{\|A(t)x\| ; \|x\| = 1\}$ である。

次の命題の証明の中で、[4], p.245で用いられた方法を、用いる。

命題 2.4. Mをfocal point をもたない単連結完備リーマン多様体とする。Mの断面曲率KはK$> -k^2$(kはある正の定数)をみたし、SM上の geodesic flowは Anosov typeであるとする。そのとき、$^\forall v \in SM$, $^\forall t \geqq T = (1/k)\mathrm{arccoth}(2/k)$に対し、

$$(\!(A_v(t))\!) \geqq (8a^2 k(1+k^2)c)^{-1/2}(e^{ct} - 1)$$

が成り立つ。

証明の概略) SM上の geodesic flow が Anosov type なの

で、$^\forall v \in SM$ に対し、 tangent space $(SM)_v$ は、定義 1.1のように直和分解される。

$^\forall t \geqq 0$に対し、$\| D_v(t) \| \leqq a(1+k^2)^{1/2} e^{-ct}$ が成り立つ。ただし、a, cは Anosov condition の中の定数であり、

$\| D_v(t) \| := \max\{ \| D_v(t)x \| ; \| x \| = 1\}$である。

$^\forall t > 0$に対し、$A(t) = D(t) \int_0^t (D^* D)^{-1}(s)ds$ が成り立つ

（[4], p.245 参照）。

$X^{-1}(t) = (D^{-1}A)(t) = \int_0^t (D^* D)^{-1}$より、

$\| X(t) \|^{-1} = ⟪X^{-1}(t)⟫ \geqq \int_0^t ⟪(D^* D)^{-1}⟫ = \int_0^t \| D^* D \|^{-1} = \int_0^t \| D \|^{-2}$

$\geqq \int_0^t (a^2 (1+k^2))^{-1} e^{2cs} ds = (a^2 (1+k^2))^{-1} \int_0^t e^{2cs} ds$

$= (a^2 (1+k^2))^{-1} \left[(1/2c) e^{2cs}\right]_0^t = (2a^2 (1+k^2) c)^{-1} (e^{2ct} - 1)$が成り立つ。補題 2.3より、

$⟪A(t)⟫ \geqq (4k \| X(t) \|)^{-1/2} \geqq (8a^2 k(1+k^2)c)^{-1/2} (e^{2ct} - 1)^{1/2}$

を得る。$^\forall t \geqq 0$ に対し、$(e^{2ct} - 1) - (e^{ct} - 1)^2 = 2e^{ct} - 2 \geqq 0$であるから、この命題を得る。

3. 無限遠点と Visibility Axiom

$^\forall z, w \in M(\infty)$に対し、$\measuredangle(z, w) := \sup_{p \in M} \measuredangle_p(z, w)$,

$l(z, w) := \limsup_{t \to \infty} (1/t)\, d(\gamma_{qz}(t), \gamma_{qw}(t))$ と定義する。ただし、$q \in M$である。$l(z, w)$は点 $q \in M$のとり方によらない。

$^\forall z, w \in M(\infty)$ に対し、$l(z, w) \leqq 2$ である。

補題 3.1. ([8], p.25) $\forall z, w \in M(\infty)$に対し、

$$2\sin^2(\sphericalangle(z,w)/2) \leqq l(z,w) \leqq 2\sin(\sphericalangle(z,w)/2)$$

が成り立つ。

補題 3.2. ([8], p.27) z, wを、$M(\infty)$の点で、$\sphericalangle(z,w)=\pi$をみたすものとする。unit speed geodesic $c:R \to M$で、$c(-\infty)=z$, $c(\infty)=w$をみたすものは、存在しないとする。そのとき、ある点 $u \in M(\infty)$で、

$$\sphericalangle(z,u)=\sphericalangle(w,u)=\sphericalangle(z,w)/2=\pi/2$$

をみたすものが存在する。

単連結完備リーマン多様体で、断面曲率が非正であるものを、Hadamard 多様体と呼ぶ。Hadamard 多様体の場合と同様に、次の命題が成り立つ。([8]参照)。

命題 3.3. Mが Visibility Axiom をみたすことは、任意の $z, w \in M(\infty), z \neq w$に対し、ある unit speed geodesic $\alpha: R \to M$で、$\alpha(-\infty)=z$, $\alpha(\infty)=w$をみたすものが存在することと同値である。

主定理の証明の中で、[8], p.26で用いられた方法を、用いる。

主定理の証明の概略) $z, w \in M(\infty), z \neq w$で、unit speed geodesic $c:R \to M$で $c(-\infty)=z, c(\infty)=w$ をみたすものが存在しないものがあったとする。補題3.1と 3.2より、$l(z,w) <$

2としてよい。$p \in M$を fix する。$\gamma, \sigma : [0, \infty) \to M$ を、それぞれ、pからz, pからwへの unit speed geodesicとする。

$\rho(t)$ を、$\gamma(t)$ と $\sigma(t)$ を結ぶ geodesic sgmentと、p との距離とする。Mが focal point をもたないことより、任意のJacobi field $J(t)$で、$J(0)=0$をみたすものは、$t \geqq 0$で単調に増加する長さ$\|J(t)\|$をもつ。よって、pにおける極座標を用いることにより、

$$d(\gamma(t), \sigma(t)) \geqq d^S_{p,\rho(t)}(\gamma(\rho(t)), \sigma(\rho(t)))$$

を得る。ただし、$d^S_{p,\rho(t)}$は、sphere $S_{\rho(t)}(p) := \{q \in M;\ d(p,q) = \rho(t)\}$上の距離関数である。$\alpha_t : [0, d_0] \to M$を$\gamma(t)$から$\sigma(t)$へのgeodesic segmentとし、$d_1 \in [0, d_0]$を$d(p, \alpha_t(d_1)) = \rho(t)$をみたす数とする。

$L(\alpha_t|_{[0,d_1]}) \geqq L(\gamma|_{[\rho(t),t]})$と$L(\alpha_t|_{[d_1,d_0]}) \geqq L(\sigma|_{[\rho(t),t]})$ が成り立つ。ただし、$L(\ )$は曲線の長さである。よって、

$$d(\gamma(t), \sigma(t)) \geqq 2(t - \rho(t))$$

が成り立つ。よって、

$$(1/t)d(\gamma(t), \sigma(t))$$

$$\geqq (\rho(t)/t)(d^S_{p,\rho(t)}(\gamma(\rho(t)), \sigma(\rho(t)))/\rho(t))$$

$$\geqq (1/t)(t - (1/2)d(\gamma(t), \sigma(t)))$$

$$\times (d^S_{p,\rho(t)}(\gamma(\rho(t)), \sigma(\rho(t)))/\rho(t))$$

$$= (1 - (1/2)(1/t)d(\gamma(t), \sigma(t)))$$

$\times (d^S_{p,\rho(t)}(\gamma(\rho(t)), \sigma(\rho(t)))/\rho(t))$

が成り立つ。

unit speed geodesic $c:R \to M$ で $c(-\infty)=z$, $c(\infty)=w$ をみたすものが存在しないので、$\rho(t) \to \infty (t \to \infty)$である。よって、$l(z,w) < 2$ であることより、

(*) ある数列$\{t_i\}$で、$t_i \to \infty (i \to \infty)$をみたし、$(1/t_i)(d^S_{p,t_i}(\gamma(t_i), \sigma(t_i)))$が上に有界であるものが存在する。

$t > 0$を fix する。$\mu : [0, l_0] \to S_t(p)$を sphere $S_t(p) = \{q \in M;\ d(p,q) = t\}$の中の geodesic で、$\mu(0) = \gamma(t)$, $\mu(l_0) = \sigma(t)$をみたすものとする。

variation $a:[0, l_0] \times [0, \infty) \to M$を、$a(s,u) := \sigma_s(u)$と定義する。ただし、$\sigma_s : [0, \infty) \to M$は、geodesic で、$\sigma_s(0) = p$, $\sigma_s(t) = \mu(s)$をみたすものとする。$u \longmapsto \frac{\partial a}{\partial s}(s,u)$は nontrivial Jacobi field なので、$\frac{D}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial s}(s,0) \neq 0$である。ただし、$\frac{D}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial s}$はconvariant derivative である。

$v(s) := \frac{D}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial s}(s,0)$とすると

$\frac{\partial a}{\partial s}(s,u) = (A_{\sigma'_s(0)}(u))v(s)$が成り立つ。

よって、命題 2.4より、

$d^S_{p,t}(\gamma(t), \sigma(t)) = \int_0^{l_0} \| \frac{\partial a}{\partial s}(s,t) \| ds \geq$

$\int_0^{l_0} B(e^{ct} - 1) \| \frac{D}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial s}(s,0) \| ds = B(e^{ct} - 1) \int_0^{l_0} \| \frac{D}{\partial s}\frac{\partial a}{\partial u}(s,0) \| ds$

$\geqq B(e^{ct}-1)\measuredangle(\gamma'(0),\sigma'(0))$

を得る。ただし、$B:=(8a^2k(1+k^2)c)^{-1/2}$とした。

これは、(*)に矛盾する。ゆえに、$^{\forall}z, w\in M(\infty), z\neq w$に対し、

ある unit speed godesic $\alpha : R\to M$で、$\alpha(-\infty)=z, \alpha(\infty)=w$

をみたすものが存在する。このようなgodesic のuniqueness

は、flat strip theorem などを用いて証明される。

系の証明) 主定理と、命題 3.3より明らか。

References

1. Ballmann, W., Gromov, M. and Schroeder, V., Manifolds of nonpositive curvature, Birkhäuser, Boston, 1985.

2. Eberlein, P., When is a geodesic flow of Anosov type? I, J. Differential Geometry 8, 437-463(1973).

3. Eberlein, P., and O'Neill, B., Visibility manifolds, Pacific J. Math. 46, 45-110 (1973).

4. Eschenburg, J.H., Horospheres and the stable part of the geodesic flow, Math. Z. 153, 237-251 (1977).

5. Innami, N., Convexity in Riemannian manifolds without focal points, Advanced Studies in Pure

Math. 3, 311-332 (1984).

6. Mañé, R., On a Theorem of Klingenberg, In: Dynamical systems and bifurcation theory, Camacho, M.I., Pacifico, M.J. and Takens, F.(eds.), Pitman Research Notes in Math. Series 160, 319-345 (1987).
7. Milnor, J., Morse theory, Princeton University Press, Princeton, 1969.
8. Uesu, K., The Tits metric on the boundaries of focal points free manifolds and its application, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A, Vol. 42, 21-35 (1988).
9. Ukai, T., The Visibility Axiom on a Hadamard manifold whose geodesic flow is of Anosov type, Proc. Amer. Math. Soc. 104, 577-583 (1988).