数理解析研究所講究録
第696巻 1989年 130-143

Perron Frobenius 作用素と中心極限定理

三重大教育　石谷　寛

§1. 序

ここでは、Perron Frobenius作用素を用いた、力学系に対する中心極限定理の取扱いについて概説する。最初に問題のアウトラインについて述べる。今、$(X, \mathcal{B}, m)$ を確率空間とし、Tをその上の非特異変換（即ち、Tは可測であって、Aが $m(A)=0$ をみたすなら $m(T^{-1}A)=0$.）とするとき、次の問題を取扱う。

（問題）X上の関数fに対し、確率過程 $\{f(x), f(Tx), f(T^2x), \cdots\}$ がいつ中心極限定理をみたすか？　即ち、

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(T^kx)-f^*\right) \xrightarrow[(weakly)]{} \text{Gauss 分布}$$

が、どの様な条件の下に、どのような確率測度に関して成立するか？

この問題に対しては、それ本来の意味のほかに、以下の様な意味付けができるであろう。

最初に、mがT不変測度であるとするならば、エルゴード定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = f^*(x) \quad (m\text{-a.e.})$$

が知られている。ここで中心極限定理が

$$\lim_{n\to\infty} m\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(f(T^k x) - f^*(x)) < z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

の形で成立するならば、任意の $\alpha > 0$ に対し、$n \to \infty$ のとき

$$n^{1/2-\alpha}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)\right) - f^*(x)\right\} \longrightarrow 0 \quad (\text{in Probability})$$

が成立し、Ergodic theorem のある種の収束の order を与えていることになる。

更に、中心極限定理を確率過程のもつ "randomness" の一つの表現とみなし、$\{f(T^k x)\}$ を力学系の orbit $\{T^k x\}$ の観測結果だと解釈すれば、上の問題は、決定論的な力学系から種々の "randomness" が生じる事の一つの理由に関わるものであると言える。

古くから、この方向の研究は、さまざまな具体的変換についてなされているが、文献等については [2], [7] 等に詳しい。

§2. Perron Frobenius 作用素

非特異変換の次の意味での dual な作用素を Perron Frobenius 作用素（P.F. 作用素）と呼び、不変測度の存在、その regularity の証明、等に古くから用いられている。

定義1. $\mathcal{L}(=\mathcal{L}_m) : (L^1(m), \|\cdot\|_m) \longrightarrow (L^1(m), \|\cdot\|_m)$ を

$$\int_X (\mathcal{L} f)\cdot \bar{g}\, dm = \int_X f(x)\,\overline{g(Tx)}\, dm \qquad (\forall g \in L^\infty(m))$$

と定義し、これを(T, m)のPerron Frobenius作用素と呼ぶ。

このP.F.作用素の自明な性質としては、次のPropositionがある。(詳しくは[5],[2])

命題2. $\mathcal{L}$に対し次の性質が成立する。

(i) $\mathcal{L}$ は positive, linear operator.

(ii) $\mathcal{L}$ は積分を保つ: $\int_X \mathcal{L} f\, dm = \int_X f\, dm$.

(iii) $|\mathcal{L} f|(x) \leqq (\mathcal{L}|f|)(x)$ $(m\text{-a.e.})$, よって $\|\mathcal{L} f\|_m \leqq \|f\|_m$

(iv) $\mathcal{L}((g\circ T)\cdot f) = g\mathcal{L}(f)$

(v) $\mathcal{L} f = f$ は $f dm$ がT不変であることと必要十分である。

特に $m=\mu$ がT不変測度のとき.(以下、μは不変測度とする。)

定義3. $U: L^1(\mu)\to L^1(\mu)$ を$(Uf)(x) = f(Tx)$ で定め、Koopman作用素と呼ぶ。

この記号の下で、測度がT不変の時には上記の性質の他に、次が成立する.([5],[2])

命題4. μがT不変であるとき、$f\in L^1(\mu)$に対し

(i) $\mathcal{L}_\mu U f = f$,

(ii) $U\mathcal{L}_\mu f = E_\mu[f \mid T^{-1}\mathcal{B}]$

が成立する。

さらに絶対値が1の固有値については、次が成立する。

命題5. (T. Morita [5]) 次は同値である。

(i) $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ に対し、$\mathcal{L}_\mu f = \lambda f,\ f \in L^1(\mu)$。

(ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $Uf = \overline{\lambda} f$。

Markov過程の極限定理に関連して、古くから知られているように、このP. F. 作用素と極限定理は、Prop. 2の(ii)(iv)を用いて以下のように関連する。(詳しい文献、証明等は[2], [7].)

Fourier Transform Method: $\mathcal{L}$ の摂動作用素 $\mathcal{L}(\theta : f)$, $\theta \in R$ を $\mathcal{L}(\theta : f)(g) = \mathcal{L}(g \exp i\theta f)$ で定めると、

$$\mathcal{L}(\theta : f)^n(g) = \mathcal{L}^n(g \cdot \exp\{i\theta \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \cdot)\})$$

が、Prop. 2の(iv)をくり返し用いる事で得られ、(ii)に注意して、

$$\int_X \mathcal{L}(\theta : f)^n(g)\, dm = \int_X \exp\{i\theta \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k\}\, g\, dm$$

が導かれる。ここで、右辺は $\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ の測度 $g\,dm$ に関する特性関数であることに注意すれば、さまざまな極限定理が、$\mathcal{L}(\theta : f)^n$ の $n \to \infty$ における挙動、従って $\mathcal{L}(\theta : f)$ のスペクトル構造によって導かれる。

ところで、$\mathcal{L}$ 自身のスペクトル構造に関しては、高橋陽一郎氏により、次の興味深い結果が示されている。([8])

命題6. 区分的に滑らかな写像 $T : [0, 1] \to [0, 1]$ がontoであり、1 to 1でないとする。このとき $|z| < 1$ ならば、z

は$\mathcal{L}$の固有値であって、その重複度は1より大である。

この命題により、多くの場合には、$\mathcal{L}$を$L^1(m)$上で考える限り、スペクトルは単位円板そのものとなり、取扱い上の困難が生じる。従って、$L^1(m)$の中に、変換Tに応じた適当な空間をみつける必要性が生ずる。

§3. 一次元の変換、Lasota-Yorke Map について.

前節の方法がきれいに適用できるモデルとして、Lasota Yorke Map がある。この節では、$X=[0,1]$, $m=$ Lebesgue 測度、とする。この場合には、Perron Frobenius 作用素は、具体的に書き下せる。

命題 7. $T:[0,1]\to[0,1]$ が区分的に C^1であって、微分係数が$\neq 0$のとき、

$$(\mathcal{L}f)(x)=\sum_{y\in T^{-1}\{x\}}\left|\frac{1}{T'(y)}\right| f(y)$$

である。

定義 8. $T:[0,1]\to[0,1]$ が次の(i)(ii)(iii) をみたすとき Lasota Yorke Map と呼ぶ。

(i) 高々可算個の小区間への分割$\{I_j\}$があって、$T|_{\mathrm{Int}\,I_j}$ が I_jの閉包へのC^2-extension をもち、かつ、

$$\#\{j : T(\mathrm{Int}\,I_j)\subsetneq(0,1)\}<+\infty$$

が成立する。

(iii) 正整数 n_0 があって $\inf_x |(T^{n_0})'(x)| > 1$ である。

(iv) (Renyi's condition)

$$R(T) = \sup_j \sup_{x \in \mathrm{Int} I_j} \left| \frac{T''(x)}{(T'(x))^2} \right| < +\infty$$

をみたす。

このときには、前節の終りに議論したように、空間 $L^1(m)$ の上で $\mathcal{L}$ を考えるのではなく、

$$BV = \{ f \in L^1(m) : f \text{ は有界変動関数を version にもつ} \}$$

とし、その中に、本質的全変動

$$v(f) = \inf \{ \bigvee_0^1 \tilde{f} : \tilde{f} = f \quad m\text{-a.e.} \}$$

を考える。ここで $\bigvee_0^1 g$ は g の $[0,1]$ での全変動である。これを用いて、ノルムを

$$\| f \|_{BV} = v(f) + \| f \|_m$$

と定めると、$(BV, \| \cdot \|_{BV})$ は Banach 空間となり、かつ

$$\| f \cdot g \|_{BV} \leqq 2 \| f \|_{BV} \cdot \| g \|_{BV}$$

が成立する。この空間に $\mathcal{L}$ を制限することで、望ましいスペクトル構造が得られる。この空間上の関数に $\mathcal{L}$ をほどこしたときの全変動量の変化に関する評価式として、さまざまな式が得られているが、以下の形のものを述べておこう。

<u>命題9.</u> (T. Morita [6]) 簡単のため、定義8の $n_0 = 1$

とする。$f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}$ が S^1-valued の有界変動関数とすると

$$v(\mathcal{L}^n((\prod_{k=0}^{n-1} f_k \circ T^k) g) \leqq (2+\sum_{k=0}^{n-1} v(f_k))[C^n v(g) + 2(l_n^{-1} + R(T^n)) \|g\|_m]$$

が成立する。ここで $l_n = \min\{1, m(J_j) : J_j$ は T^n によって定まる自然な分割の元で $T(\mathrm{Int} J_j) \neq (0,1)$ をみたすもの$\}$, $C = 1/\inf_x |T'(x)|$.

この評価式を用いると、すぐに $\mathcal{L}(BV) \subset BV$ がわかり、さらに C. Ionescu Tulcea と G. Marinescu のエルゴード定理を適用すると次の結論に達する。([1], [2], [7])

命題10. T が Lasota Yorke Map なら、$f \in BV$ に対し、

$$\mathcal{L}^n f = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^n E_{\lambda_k} f + R^n f$$

がすべての正整数 n に対し成立する。ここで、$\lambda_1 = 1$ かつ λ_k は絶対値 1 の固有値で、E_{λ_k} は λ_k の固有空間への projection で、$\dim E_{\lambda_k}(BV) < +\infty$, $E_{\lambda_k} R = R E_{\lambda_k} = 0$, $E_{\lambda_k} E_{\lambda_j} = 0$ $(\lambda_k \neq \lambda_j)$ である。さらに $\|R^n f\|_{BV} \leqq C\rho^n \|f\|_{BV}$ が $C>0$, $0<\rho<1$ に対し成立する。

この分解を用いて、前節のプログラムを実行すると、混合型中心極限定理が得られる。(詳しくは [2], [7])。結論のみを紹介する。$M = \dim E_1(BV)$ とおくと、これは m に関し

絶対連続な ergodic measures の個数であり、それらの測度を $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_M$ とすると、$f \in BV$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \int \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) - E_{\mu_i}(f) \right)^2 d\mu_i = \sigma_i^2$$

が存在する。このとき Lasota Yorke Map に対し、次を得る。

<u>定理</u>（混合型中心極限定理）．f を有界変動関数、ν を $d\nu/dm \in BV$ である確率測度とすると、

$$\lim_{n\to\infty} \nu \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(T^k x) - f^*(x) \right) < z \right\} = \sum_{i=1}^{M} a_i F(0, \sigma_i^2 : z)$$

が右辺の連続点に対し、ある $a_i \geqq 0$ （$\sum a_i = 1$） に対し成立する。ここで、$F(b, \sigma^2 : z)$ は平均 b、分散 σ^2 の Gauss 分布の分布関数とする。さらに、すべての i に関し $\sigma_i^2 \neq 0$ ならば、

$$\sup_{z\in R} \left| \nu \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) < z \right\} - \sum_{i=1}^{M} a_i F(\sqrt{n} b_i, \sigma_i^2 : z) \right| \leqq C/\sqrt{n}$$

がすべての n に対し成立する。ここで $b_i = \int f d\mu_i$, $C > 0$。

この節の最後に、$\sigma_i^2 \neq 0$ となる具体的判定条件が盛田氏によって得られている事を注意しておこう。（[6]）例えば、定義 8 の (1) の分割 $\{I_i\}$ が可算分割であり、$M=1$ であるならば trivial でない関数 f に対し、$\sigma^2 \neq 0$ である、等の結果が得られているが、詳しくは [6] にゆずろう。

<u>§4. Constrictive transformation について</u>

§3 での議論の形式的構造を明らかにするために、抽象

的な変換について論ずる。最初に、Lasota-Li-Yorke のマルコフ作用素に関する議論から始めよう。詳しくは[3]、又は[4]を参照されたい。

<u>定義11</u>. $P: L^1(X,\mathcal{B},m) \longrightarrow L^1(X,\mathcal{B},m)$ が Markov 作用素であるとは、

(a) $Pf \geqq 0$ for $f \geqq 0$, $f \in L^1(X,\mathcal{B},m)$

かつ

(b) $\|Pf\|_m = \|f\|_m$ for $f \geqq 0$, $f \in L^1(X,\mathcal{B},m)$

のときである。

<u>定義12</u> Markov 作用素 P に対し、$L^1(X,\mathcal{B},m)$ のコンパクト部分集合 $\mathcal{F}$ が存在して すべての $f \geqq 0$, $f \in L^1(X,\mathcal{B},m)$ $\|f\|_m = 1$ をみたす関数に対し

$$\lim_{n\to\infty} d(P^n f, \mathcal{F}) = 0$$

をみたすとき、この作用素は constrictive であるという。

このような作用素に対し Lasota-Li-Yorke は、その漸近的周期性を示している。

<u>定理13</u>. (Lasota-Li-Yorke). P が constrictive Markov 作用素であるならば、非負値関数 $g_1, g_2, \cdots, g_r$ ($\|g_i\|_m = 1$) と、bounded linear functionals $a_1(f), a_2(f), \cdots, a_r(f)$ と、ある r 次の置換 α が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} \| P^n (f - \sum_{i=1}^{r} a_i(f) g_i) \|_m = 0$$

がすべての $f \in L^1(X, \mathcal{B}, m)$ に対し成立し、$g_i g_j = 0 \ (i \neq j)$

$P g_i = g_{\alpha(i)}$ である。

この結果に注目する。ここで $\{g_i\}$ の番号をとりなおして、

$$P g_{i,j} = g_{i,j+1} \quad (i = 1, 2, \cdots, M, \ j = 0, 1, \cdots, n(i)-1)$$

をみたすようにできる。ここで $g_{i,n(i)} = g_{i,0}$ とみなす。このような番号付けを行えば、絶対値1の固有値とその固有関数が次のように決定される。

<u>命題14.</u> constrictive Markov作用素 P に対し、

$$f_{i,j} = \frac{1}{n(i)} \sum_{k=0}^{n(i)-1} g_{i,k} \exp\{(2\pi j k / n(i)) \sqrt{-1}\}$$

とおくと、

$$P f_{i,j} = f_{i,j} \exp\{(-2\pi j / n(i)) \sqrt{-1}\}$$

であり、P の絶対値1の固有値 その固有関数は、この形のものに限る。

今後、一般のMarkov作用素ではなく、非特異変換 (T, m) のPerron Frobenius作用素に対して、議論する。

<u>定義15.</u> 非特異変換 (T, m) のPerron Frobenius 作用素 $\mathcal{L}$ がconstrictive であるとき、T を constrictive transformation

と呼ぶ。

変換Tが constrictive ならば、定理13 と命題14 より m に絶対連続な ergodic measures は $d\mu_i = f_{i,0}\, dm / n(i)$ $(i=1, 2, \cdots, M)$ のみであることがわかる。ここで既知の議論を総合すれば、次の形のエルゴード定理が示せる。

<u>定理16</u>. $f \in \bigcap_{i=1}^{M} L^1(X, \mathcal{B}, \mu_i)$ に対し、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = f^*(x) \quad (m\text{-a.e.})$$

が成立する。ここで、f と独立な分割 $\{A_i\}_{i=1}^{M}$ が存在して、A_i 上では $f^*(x) = \int f(x)\,d\mu_i$ $(m\text{-a.e.})$ である。

この定理の拡張として、混合型中心極限定理について論ずる。ここでは簡単のため、変換Tが not invertible であることを仮定する。$\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathcal{B}$ と書くとき、Gordin の定理を適用し、定理13 を用いれば、

<u>定理17</u>　T が (not invertible) constrictive transformation であり、関数 f がすべての i $(1 \leqq i \leqq M)$ に対し

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| E_{\mu_i}(f \mid T^{-k}\mathcal{B}) - E_{\mu_i}(f \mid \mathcal{B}_\infty) \|_{L^2(\mu_i)} < +\infty$$

をみたすならば、

$$\lim_{n\to\infty} \int \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} (f(T^k x) - f^*(x))\right)^2 d\mu_i = \sigma_i^2$$

が存在し、

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} (f(T^k x) - f^*(x)) < z\right\} = \sum_{i=1}^{M} a_i(\nu)\, F(0, \sigma_i^2 : z)$$

が右辺の連続点に対し、またすべての確率測度ν ($\nu \ll m$) とそれによって決まる $a_i \geqq 0$ ($\sum_{i=1}^{M} a_i = 1$) に対し成立する。

§2 の終りに議論したように、この変換Tに対し"適当なBanach 空間としては、自然に次のようなものが考えられる。$0<\rho<1$ に対し

$$V_\rho^{(i)} = \{ f \in L^1(\mu_i) ; (\sup_{k \geqq 0} \| E_{\mu_i}[f | T^{-k}\mathcal{B}] - E_{\mu_i}[f | \mathcal{B}_\infty] \|_{\mu_i} / \rho^k) < +\infty \}$$

と定め、その上の norm を

$$\|f\|_{\rho,(i)} = \|f\|_{\mu_i} + (\sup_{k \geqq 0} \| E_{\mu_i}[f | T^{-k}\mathcal{B}] - E_{\mu_i}[f | \mathcal{B}_\infty] \|_{\mu_i} / \rho^k)$$

とすると

<u>命題18</u> ($V_\rho^{(i)}, \|\cdot\|_{\rho,(i)}$) は Banach 空間であって、$f \in V_\rho^{(i)}$ に対し

$$\mathcal{L}_{\mu_i}^n f = \sum_{j=0}^{n(i)-1} \lambda_{i,j}^n E_{i,j} f + R^n f$$

がすべての n に対し成立する。ここで

$$\lambda_{i,j} = exp\{-(2\pi j / n(i)) \sqrt{-1}\}$$

$$E_{i,j} f = a(i,j,f) f_{i,j}$$

であり

$$E_{i,j} R = R E_{i,j} = 0$$

かつ

$$\| R^n f \|_{\rho,(i)} \leqq 2 \rho^n \|f\|_{\rho,(i)}$$

をみたす。

このスペクトル構造を用いて、§2 の議論を行えば、f に更に条件を付け加える事により、定理17の混合型中心極限定理の収束の order が $O(1/\sqrt{n})$ であることが示し得るが、ここでは省略する。最後に、constrictive transformation の具体例として、$\mathcal{B}_\infty$ が有限個の可測集合からなりたっているときには、constrictive であることを注意しよう。この case の特殊な場合として、(T, μ_i) が uniformly mixing であるなら（従って、Lasota-Yorke transformation の場合も）、広い class の関数が、$V_p^{(i)}$ に属す事を注意しておく。特に、Lasota-Yorke transformation の case では、有界変動関数や、Hölder 連続関数が $V_p^{(i)}$ に属すことが知られるが、ここでは省略する。

Reference

[1] C. Ionescu-Tulcea and G. Marinescu, Theorie ergodique pour des classes d'operations non completement continues, Ann. of Math. 52 (1950) 140-147.

[2] H. Ishitani, A central limit theorem of mixed type for a class of 1-dimensional transformations, Hiroshima Math. J. 16 (1986) 161-188.

[3] A. Lasota, T. Y. Li, and J. A. Yorke, Asympotic periodicity of the iterates of Markov operators, Trans. Amer. Math. Soc. 286 (1984), 751-764.

[4] A. Lasota and M. C. Mackey, Probabilistic properties of deterministic systems, Cambridge University Press 1985.

[5] T. Morita, Random iteration of one dimensional transformations, Osaka J. Math. 22 (1985), 489-518.

[6] T. Morita, A generalized local limit theorem for Lasota-Yorke transformations, (to appear in Osaka J. Math.)

[7] J. Rousseau-Egele, Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotone par morceaux, The Annals of Probability 1983, vol 11, 772-788.

[8] Y. Takahashi, Fredholm determinant of unimodal linear maps, Sci. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo 31 (1982) 62-87.