

可解格子模型とアフィン - リー環 *

神保 道夫 (京大理) 述
長谷川 浩司 (東北大理) 記

内容	頁
はしがき (神保)	2
構成について	3
Section 1 Yang-Baxter 方程式 (YBE)	
1.1 定義と解の例 0、1、2	4
1.2 問題 1	8
Section 2 面模型 (Face model)	
2.1 模型とは	9
2.2 模型の設定	12
2.3 基底状態と境界条件	14
Section 3 角転送行列 (Corner transfer matrix, CTM)	
3.1 CTM の定義	18
3.2.0 YBE の図形的表示、Face formulation	22
3.2.1-6 CTM に関する Baxter の主張	28
● 行転送行列の可換性 28 / 差法性 32 /	
CTM の形 34 / 初期条件 37 / 逆関係 37 /	
H の固有値 44 / 1 点函数の 1 次元状態和表示 46	
3.2.7 まとめ及び CTM 法についてのノート	47

* 神保道夫氏集中講義 (於 東京大学理学部, 1989年2月6日-9日) の記録

[目次]

3.3	目標及び問題 2	49
Section 4	$sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ とその表現	
4.1	定義など	
	• $sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$	53
	• 基本 weight と 最高 weight 表現	56
	• character と string function	60
4.2	Fock 表現	63
Section 5	Path basis	
5.1	Young 図形と path との対応	72
5.2	Lift の weight	77
5.3	path basis の構成と一次独立性	81
Section 6	1 点関数の計算	
6.1	1 次元状態和の string function による表示	89
6.2	modular 変換性の模型における意義	92
付録	1989年2月10日の東大金曜談話会の記録	
	「可解格子模型とアフィン - リー環」(神保:述)	
A.0	序. "可解格子模型 \leftrightarrow アフィン - リー環"	97
A.1	模型の説明	98
A.2	展開環の q - analog $U_q(g)$ と YBE	99
A.3	$q \rightarrow 0$ のときの $U_q(g)$ の表現論。 Robinson - Shensted 対応	103
A.4	1 点関数と path basis	107
参考文献		113

はしがき

統計物理における可解格子模型の研究が Onsager (1944) によって始められて以来 半世紀に近い。現在のところ 扱える対象は ほぼ 2 次元系のみであり、exact に求めることのできる物理量も 分配関数など二、三に限られる (例外は Onsager 自身の扱った Ising 模型である)。中でも著しいのは、1 点函数を得る一般的方法 — Corner transfer matrix method — を開発した Baxter の研究である。Baxter は この方法を eight vertex model、hard hexagon model 等に適用して、それらの 1 点函数が modular 函数で表示されることを見出した (1978-80)。その後数多くの可解模型が構成される過程で、これら modular 函数が アフィン - リー環の指標に関して生じるものと一致していることが注意された (Date et al., 1986-)。この事実の理論的説明が強く望まれる。この講義では、典型的な例をとりあげて 1 点函数とアフィン - リー環が結びつく事情を一通り紹介することを目標とした。

ここで扱う模型は 各 site ごとの state が無限個ある点で 物理的にはあまり現実的でないうらみがある。しかし、Ising model, hard hexagon model 等の 有限個の state をもつ模型も ほぼ並行に論ずることが出来、数学的にはここで扱う場合が より単純 かつ 基本的である。

ここに見られる通り、Corner transfer matrix method は、卓抜なアイデアである一方、数学的な基礎づけを欠いている。これを単に厳密性を欠く black box として素通りしてしまわず、その考え方の筋道を知ることが無意味ではないと考え、あえて やや詳しく紹介した。

長谷川浩司氏は、講義の不備を指摘され、更に 多大の労力を払って 整備したノートを作って下さった。1 点函数の臨界値 (6.2,17) は長谷川氏によるものである。あつくお礼申し上げる。

神保道夫 (京大理)

[構成]

構成について

§ 1 では Yang - Baxter 方程式を定義し、その解を 3 つ挙げる。このうち第 3 の解から定まる格子模型が本稿の主題であり、§ 2 で定義される。その 1 点函数と呼ばれる量を exact に求め、臨界挙動を知ることが我々の目標となる。§ 3 では、主として Yang - Baxter 方程式の下に 1 点函数の計算を 1 次元状態和に帰着させる強力な方法、Baxter の角転送行列法 (Corner transfer matrix method) を紹介する。ここの議論は数学的には厳密でないが、これを信ずる根拠となる計算機実験についても簡単に触れた (3.2.7)。

1 次元状態和は path と呼ばれるものをわたる無限和である。§ 5 で path と affine Lie 環のある表現の基底との 1 対 1 対応を確立する。その結果 § 6 では、1 次元状態和 及び 1 点函数 が表現空間の上の trace 即ち表現の指標 (と string function) で記述される。又指標の modular 変換性を用い 1 点函数の臨界挙動が計算される。§ 4 は §§ 5 - 6 の準備に充てられる。

付録の談話会の記録は、集中講義での模型の一般化の話が主であり、とくに展開環の q -類似 $U_q(\mathfrak{g})$ を用い Yang - Baxter 方程式の三角函数解を得ること、その解に付随した模型の 1 点函数 (1 次元状態和) を求める為の § 5 の方法の一般化、の概略が述べられる。また $q \rightarrow 0$ のときの $U_q(\mathfrak{g})$ の表現論と Robinson - Shensted 対応 との関係が述べられる。付録の図式 A.4,23) は本文の構成を理解するためにも参考になるものと思う。

なお講義では § 1 - § 2 が第 1 日、ほぼ § 3.2.6 迄が第 2 日、§ 5.2 迄が第 3 日、残りが第 4 日という配分であった。

講義の中では神保先生の一言の説明で納得出来たものも、文字ではうまく表すことができず、先生の自然な講義の再現をするまでには到底至らなかった。ひとえに記録者の非才によるものである。

質問に答えて頂き、原稿を校閲して下さいました神保先生、そしてこのような勉強の機会を与えて下さった土屋昭博先生に感謝する。

記録者 長谷川 浩司 (東北大理)

Section 1 Yang - Baxter 方程式

1 . 1 . 定義と解の例。

1.1.1 定義 (YBE)。 V を複素数体 \mathbb{C} 上の有限次元 vector space とする。
 $\text{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes V)$ 値関数 $R(u)$ ($u \in \mathbb{C}$) に対する次の方程式のことを Yang-Baxter 方程式 (YBE) という。

$$1) \quad R_{12}(u) R_{23}(u+v) R_{12}(v) = R_{23}(v) R_{12}(u+v) R_{23}(u)$$

ここで $R_{12}(u) := R(u) \otimes I \in \text{End}(V \otimes V \otimes V)$,

$R_{23}(u) := I \otimes R(u) \in \text{End}(V \otimes V \otimes V)$, etc.

であり、従って上の等式は $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$ におけるもの。 ■

1.1.2 注意。 ここでの $R(u)$ は文献によっては $\overset{V}{R}(u)$ と書かれている
 (むしろ、その方が多いかも知れない)。 ■

この講義で重要となる

$$R(u) = (x := \exp cu \text{ の多項式 }) \quad (c \neq 0)$$

のような YBE の解 (三角関数解 trigonometric solution と呼ばれる)
 については、 $R(u)$ のことを $R(x)$ ともかくことにする。

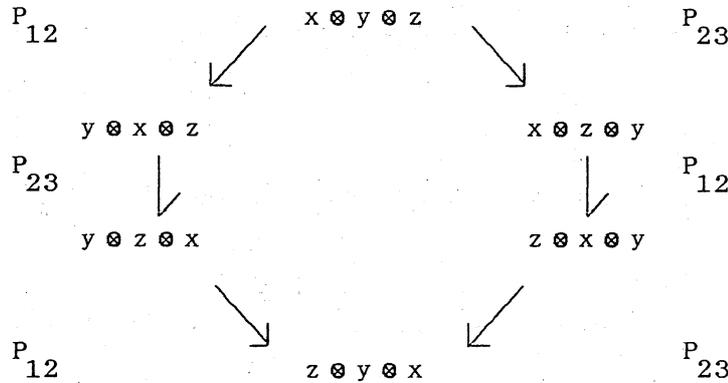
YBE の解の例を3つ挙げよう。

1.1.3 解の例, 0 (u について constant な解)

$$R(u) := P, \quad P(x \otimes y) := y \otimes x \in V \otimes V.$$

これが解であることは以下によりわかる。 $x, y, z \in V$ とする。

[1 . 1 / Y B E]



(P_{ij} は 1.1.1 と同様。) これは対称群 S_3 における関係式
 $(12)(23)(12) = (23)(12)(23)$ に他ならない。 ■

1.1.4 解の例、1 (やはり u について constant な解)

$q \in \mathbb{C}^\times$ 、また $\dim V = n$ として V を \mathbb{C}^n とみなし、 $E_{\mu\nu} \in \text{End } V$ を
 行列単位とする。このとき

$$0) \quad T := q \sum_{\mu} E_{\mu\mu} \otimes E_{\mu\mu} + q^{1/2} \sum_{\mu \neq \nu} E_{\mu\nu} \otimes E_{\nu\mu} + (q-1) \sum_{\mu < \nu} E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu}$$

とすると、 $R(x) := T$ は YBE を満たす。

T は次の性質 1) 2) 3) をもつ。

1) $q \rightarrow 1$ のとき、 $T \rightarrow \sum_{\mu, \nu} E_{\mu\nu} \otimes E_{\nu\mu} = P$.

2) $v_{\mu} := {}^t(0, \dots, 1, \dots, 0)$ を \mathbb{C}^n の通常の基とすると、

$$T(v_{\mu} \otimes v_{\mu}) = q v_{\mu} \otimes v_{\mu} ,$$

$$(T(v_{\mu} \otimes v_{\nu}), T(v_{\nu} \otimes v_{\mu}))$$

$$= (v_{\mu} \otimes v_{\nu}, v_{\nu} \otimes v_{\mu}) \begin{bmatrix} q-1 & q^{1/2} \\ q^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\mu < \nu) .$$

特に、 T の固有値は q と -1 の 2 つしかなく、

3) $(T-q)(T+1) = 0$.

解であることの確認も、2) を用いて 1.1.1.1) の両辺を $v_{\lambda} \otimes v_{\mu} \otimes v_{\nu}$ に

対し作用させてみれば良い (case checking) 。 ■

1.1.5 事実。 次の対応は Iwahori's Hecke algebra $H_m(q)$ の表現を与える :

$$0) \quad H_m(q) \ni g_i \longrightarrow \underbrace{1 \otimes \dots \otimes T}_{(i,i+1)} \otimes \dots \otimes 1 \in \text{End}(V^{\otimes m}),$$

($1 \leq i \leq m-1$)。

但し Iwahori's Hecke algebra $H_m(q)$ とは、次の基本関係式で定義される、 1 をもつ \mathbb{C} 上の algebra である。

生成元 : g_1, \dots, g_{m-1}

基本関係式 : 1) $(g_i + 1)(g_i - q) = 0$

2) $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$

3) $g_i g_j = g_j g_i$ ($|i-j| > 1$ のとき)

(2)3) を合わせて braid relation と呼ぶ) ■

この事実は Conformal Field Theory との関係においても基本的となる (その概略 : Vertex operators の monodromy による Braid 群の表現が Iwahori's Hecke algebra を factor し、さらに上で与えた表現の $q =$ (ある 1 のべき根) における部分表現と一致する — 詳細は文献 [6]) 。

1.1.6 解の例、2 (三角関数解 ; $x = e^{cu}$ について 1 次式のもの。)

$$R(x) := -T + xq T^{-1}$$

は、やはり Y B E の解である :

$$R_{12}(x) R_{23}(xy) R_{12}(y) = R_{23}(y) R_{12}(xy) R_{23}(x).$$

その確認 : 両辺は x の 2 次式だから、 $x=1, y^{-1}, 0$ で確かめれば良い。

[1 . 1 / Y B E]

- $x = 1$ のとき : $R(1) = \text{Const.} \times I$ に注意すると、

$$R_{23}(y) R_{12}(y) = R_{23}(y) R_{12}(y) \text{ となり、OK.}$$

- $x = y^{-1}$ のとき :

$$\text{左辺} = R_{12}(y^{-1}) R_{12}(y), \text{ 右辺} = R_{23}(y) R_{23}(y^{-1}).$$

これらは共に $(y - q)(y^{-1} - q)I$ に等しいことが計算で解る。

- $x = 0$ のとき : $(T - q)(T + 1) = 0$ を用いると、 $R(x) = (x - 1)T - x(q - 1)I$ とも書ける。したがって

$$T_{12} T_{23} ((y - 1)T_{12} - y(q - 1)I) = ((y - 1)T_{23} - y(q - 1)I) T_{12} T_{23}$$

なら良いが、これは T の braid relation より OK. ■

1.1.7 注意。(1) (解の例2) を explicit に書くと

$$1) \quad R(x) = (x - q) \sum_{\mu\mu} E_{\mu\mu} \otimes E_{\mu\mu} + (1 - q) \left(\sum_{\mu < \nu} + x \sum_{\mu > \nu} \right) E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu} \\ + q^{1/2} (x - 1) \sum_{\mu \neq \nu} E_{\mu\nu} \otimes E_{\nu\mu}$$

となり、非常に 0 が多い。又、任意の対角型の $h \in \text{End}(V)$ に対して

$$2) \quad [R(x), h \otimes h] = 0 \quad (\text{in } \text{End}(V \otimes V))$$

も成り立つ。これらは共に、 $R(x)$ が更に "quantum group" の対称性も持つことの反映である。実は $R(x)$ は殆ど "quantum group" の対称性で決ってしまうのだが、時間の関係でその話はしない(文献 [1] または § A.2 参照)。

(2) やはり (解の例2) について、(1) と同じ事だが) これは

$$1 \times 1 \text{ - block} \quad x - q$$

及び

$$2 \times 2 \text{ - block} \quad \begin{bmatrix} 1 - q & q^{1/2}(x - 1) \\ q^{1/2}(x - 1) & x(1 - q) \end{bmatrix}$$

から成る block diagonal な行列である。従って

3) $R(x) R(x^{-1}) = (x-q)(x-q^{-1}) \times I$
 であり、特に $x \neq q^{\pm 1}$ で $R(x)$ は可逆と分かる。 ■

1. 2. 問題 1。

YBE 1) の解 $R(u) \in \text{End}(V \otimes V)$ であって、任意の $g \in \text{GL}(V)$ に対して

$$(g \otimes g) R(u) (g \otimes g)^{-1} = R(u)$$

を満たすようなものを決定せよ (易)。

Section 2 面模型

これから我々が考えるのは、2次元格子上的統計物理（相転移）の模型である。ここで述べるように、我々は data

集合 \mathcal{S} 、函数 W 、及び "境界条件"

により定まる、面模型 Face model または I R F 模型 (= Interaction - Round - a - Face model) と呼ばれる格子模型を扱う。2.1 でその一般的定義を行い、2.2 で \mathcal{S} と W を、また 2.3 で境界条件を指定する。

2.1 模型とは。

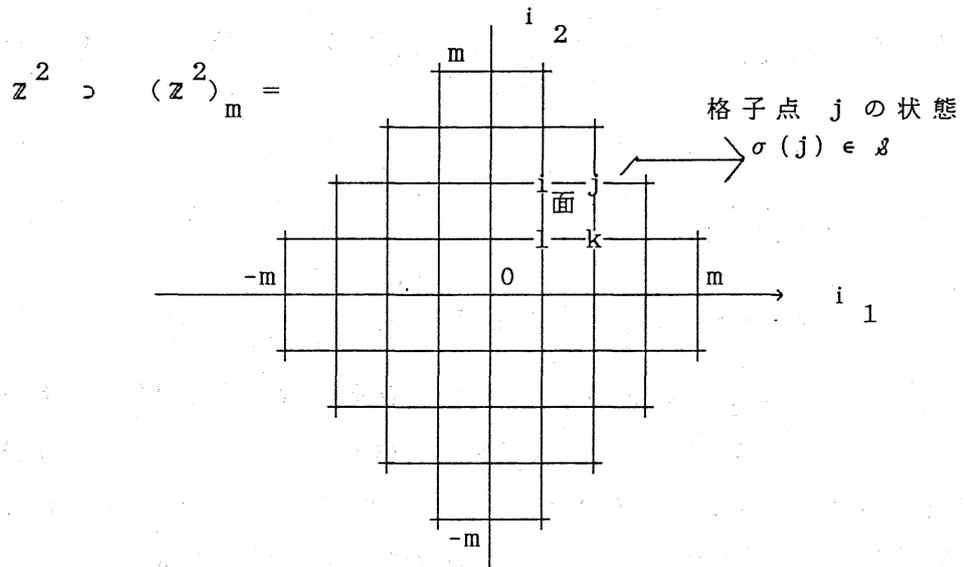
正方格子 \mathbb{Z}^2 を考え、各格子点 (site とも呼ぶ。) $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$ には "原子" があると考え。現実には様々な原子があるが、ここでは各原子は全て同一で、その 状態 (state) は与えられた離散集合 \mathcal{S} (set of states) の元を取り得るものとする (例えば、状態として "spin" が "上向き" か "下向き" かのみ考えるのであれば、 $\mathcal{S} = \{\text{上}, \text{下}\}$ である)。各格子点 $i \in \mathbb{Z}^2$ の原子の状態 $\sigma(i) \in \mathcal{S}$ を全て指定する data $\sigma = \{\sigma(i)\}$ を1つの 配置 (configuration) という。即ち配置とは写像 $\sigma : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathcal{S}$ のことである。

我々は最終的には無限自由度を扱いたい (自由度が各格子点にあり、格子点の数 $= \#(\mathbb{Z}^2) = \infty$)。しかし始めから無限自由度を扱うことは難しい (例えば、すぐ下における確率測度の定義)。そこで格子 \mathbb{Z}^2 の、有限部分集合の増大列

$$1) \quad (\mathbb{Z}^2)_0 \subset (\mathbb{Z}^2)_1 \subset \dots \subset (\mathbb{Z}^2)_m \subset (\mathbb{Z}^2)_{m+1} \subset \dots$$

をとり (後では $(\mathbb{Z}^2)_m$ として特に $(\pm m, 0)$ 、 $(0, \pm m)$ を4頂点とする凸凹の正方形の内部を考える。図 2 . 1 参照)、 $(\mathbb{Z}^2)_m$ において諸量を定義してから $m \rightarrow \infty$ とすることを考える。そこでしばらくの間 配置等と言うときも $\sigma : (\mathbb{Z}^2)_m \rightarrow \mathcal{S}$ のこと等とする。

[図 2 . 1 .]



さてサイズ m を有限とし、各配置 σ に対し、確率測度 $P(\sigma) \geq 0$ を定義する。これは Boltzmann weight と呼ばれる関数

$$2) \quad W : \mathcal{S}^4 \ni (s_1, s_2, s_3, s_4) \longrightarrow W \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_4 & s_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

を与えておき、

$$3) \quad P(\sigma) := Z^{-1} \prod_{(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}^2)_m} W \begin{pmatrix} \sigma(i_1, i_2) & \sigma(i_1+1, i_2) \\ \sigma(i_1, i_2-1) & \sigma(i_1+1, i_2-1) \end{pmatrix}$$

により定める。但し Z は規格化の定数で、次式により定まるもの :

[2 . 1 / 模型とは]

$$4) \quad 1 = \sum_{\sigma: \text{配置}} P(\sigma)$$

(W が "温度" などの parameter をもつ場合、Z はその parameter の関数である。その様なとき Z は 分配関数 (partition function) と呼ばれる。) 各因子 $W(\dots, \dots)$ が格子の単位正方形 (face 又は 面 と呼ぶ) における相互作用の強さを表し、それらの積で配置 σ の測度 $P(\sigma)$ を決めている。

この形の積を、以後簡単の為次の様にする :

$$5) \quad P(\sigma) = Z^{-1} \prod_{\substack{(i, j) \\ (l, k) : \text{面}}} W(\sigma(i)\sigma(j), \sigma(l)\sigma(k))$$

すると、Z は次式で与えられる :

$$6) \quad Z = \sum_{\sigma: \text{配置}} \prod_{\substack{(i, j) \\ (l, k) : \text{面}}} W(\sigma(i)\sigma(j), \sigma(l)\sigma(k))$$

この様な模型に於て色々な物理量の期待値を求めることが、統計物理の 1 つの問題である。我々がここで特に問題とするのは、原点 $0 = (0, 0)$ の原子の状態が与えられた $s \in \mathcal{S}$ である確率

$$7) \quad \text{Prob}(\sigma(0) = s) := \sum_{\sigma: \text{配置}} \delta_{\sigma(0), s} P(\sigma) \\ = Z^{-1} \sum_{\sigma} \delta_{\sigma(0), s} \prod_{\text{面}} W(\sigma(i)\sigma(j), \sigma(l)\sigma(k))$$

である。これはまた 1点関数 と呼ばれる。

ここ迄定義しておいて、我々は 1 点関数の格子サイズ m を無限大とした極限を問題とする。これについて少し説明しよう。

我々の興味は 相転移 という現象 —— 系の "比熱"、"1 点関数" などの物理量が "温度" などの parameters に関して singular な挙

動を示すこと（例えば、水の沸騰）——の模型を作ることにある。しかし、上に述べたような模型において、Boltzmann weight W が parameters に関して analytic であったとすると、有限自由度の格子 $(Z^2)_m$ では 1 点函数 γ などはやはり parameters に関して analytic であり、singular なふるまいは期待できない。格子サイズ無限大の極限 $m \rightarrow \infty$ を考えて始めて singularity が生じ得る。物理的に言えば、巨大な数の分子間の協力現象として相転移が起こるのである。尚、この極限 $m \rightarrow \infty$ は 熱力学的極限 と呼ばれることもある。

そこで（非常に一般的な言い方であるが、とりあえず）我々の目標は次のようになる：

目標。 W が parameters をもつとき、 $m \rightarrow \infty$ （：無限自由度、格子サイズ無限大、または熱力学的極限）における 1 点函数

$$\begin{aligned} 8) \quad \text{Prob}(\sigma(0) = s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\sigma: \text{配置}} \delta_{\sigma(0), s} P(\sigma) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} Z^{-1} \sum_{\sigma} \delta_{\sigma(0), s} \prod_{\text{面}} W(\begin{matrix} \sigma(i)\sigma(j) \\ \sigma(l)\sigma(k) \end{matrix}) \end{aligned}$$

を求め、その parameters に関する特異性を調べること。 ■

2 . 2 . 模型の設定

模型は状態の集合 \mathcal{S} 及び Boltzmann weight W を与えることに定まる。しかし勝手にそれ等を与えたのでは、1 点関数などが厳密に、閉じた形で求められること（可解性）はまず期待できず、それらの特異性を調べることも難しい。後で見るように、Yang - Baxter 方程式 (1.1.1) が可解性の為の 1 つの十分条件を与える（section 3）。

そこで我々は、次のように \mathcal{S} と W を与える。

2.2.1. 定義。 (\mathcal{L})

1) $\mathcal{L} := (\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \text{ の weight lattice } Q^*)$.

尚 Q^* は、具体的には \mathbb{Z}^n の部分格子として次で与えられる : $\varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_{n-1}$ を \mathbb{Z}^n の標準的な正規直交基とし、 $\varepsilon'_\mu := \varepsilon'_\mu - \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon'_\nu / n$ とすると

2) $Q^* = \mathbb{Z} \varepsilon'_0 + \mathbb{Z} \varepsilon'_1 + \dots + \mathbb{Z} \varepsilon'_{n-1}$.

(W) $R(x)$ を、1.1.6 の Y B E の解として、それを

3) $R(x) = \sum_{\mu, \nu} R(x)_{\mu, \nu}^{\mu', \nu'} E_{\mu, \mu'} \otimes E_{\nu, \nu'}$,

と展開する。このとき $a, b, c, d \in \mathcal{L} = Q^*$ に対して、

$$4) \quad W \left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \right) := \begin{cases} R(x)_{\mu, \nu}^{\mu', \nu'} : & b = a + \varepsilon'_\mu, \quad d = a + \varepsilon'_\mu, \\ & c = b + \varepsilon'_\nu, \quad = d + \varepsilon'_\nu \quad \text{のとき、} \\ 0 & : \quad \text{その他。} \end{cases}$$

■

2.2.2 記法。この W は parameters として x と q を含む。これを次のようにも書くことにする (q は省くことが多い)。

$$1) \quad W \left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \right) = W \left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \mid q, x \right) = \begin{array}{|c|} \hline a & b \\ \hline x & \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mu' \\ \hline x \\ \hline \nu \\ \hline \end{array}$$

ここで $\varepsilon'_\mu = d - a$, $\varepsilon'_\nu = c - d$, $\varepsilon'_{\mu'} = b - a$, $\varepsilon'_{\nu'} = c - b$ であり、定義により

$$2) \quad W \left(\begin{array}{cc} a+e & b+e \\ d+e & c+e \end{array} \right) = W \left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \right) \quad (\text{任意の } e \in \mathcal{L} \text{ に対して})$$

であるから、最後のように書くことが許される。尚、箱の左下隅に点 \cdot を打ったのは、Section 3 において箱を傾けることがあるので、その際どちら

に傾けたか 紛れないようにするためである（誤解の虞のない場合は省くことにする）。

この記法によれば、0 でない W は次のときに限る（1.1.7. 2）。

$$(イ) \quad \mu \begin{array}{c} \mu \\ \boxed{x} \\ \mu \end{array} \mu = x - q$$

$$(ロ) \quad \mu \begin{array}{c} \mu \\ \boxed{x} \\ \nu \end{array} \nu = (1 - q) \times \begin{cases} 1 & (\mu < \nu) \\ x & (\mu > \nu) \end{cases}$$

$$(ハ) \quad \nu \begin{array}{c} \mu \\ \boxed{x} \\ \mu \end{array} \nu = q^{1/2} (x - 1) \quad (\mu \neq \nu)$$

2.2.3 注意。（ W から R を回復する事） 我々の YBE の解 $R(x)$ は

$$1) \quad R(x) \begin{array}{c} \mu \nu \\ \mu \nu \end{array} = 0 \quad : \quad \varepsilon_{\mu} + \varepsilon_{\nu} \neq \varepsilon_{\mu} + \varepsilon_{\nu}, \quad \text{のとき}$$

という性質を持つから、上の W の定義式を逆に読めば W から R を復元することが出来る。従って YBE (1.1.1) も W の言葉で書ける。これについては 3.2.0 を見よ。

2 . 3 . 基底状態と境界条件

2.3.1 基底状態 . q という parameter は、標語的に言って”温度”を表すものである。この q を 0 にする極限（”低温極限”または”絶対零度”）を取ると、2.2.2 (イ) (ロ) (ハ) より

[2. 3 / 基底状態と境界条件]

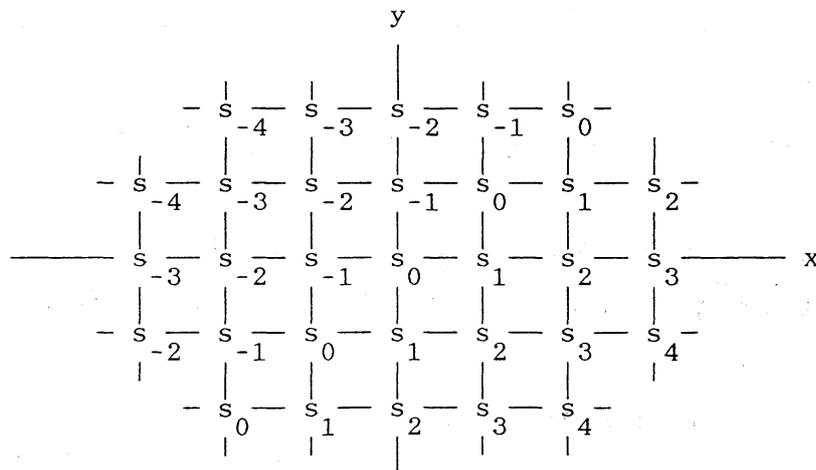
$$1) \quad \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \nu \end{array} \xrightarrow{q \rightarrow 0} x^{H(\mu, \nu)}, \text{ 但 } H(\mu, \nu) := \begin{cases} 0 & (\mu < \nu) \\ 1 & (\mu \geq \nu) \end{cases};$$

$$2) \quad \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \mu \end{array} \xrightarrow{q \rightarrow 0} 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

これより、 $q = 0$ において確率測度が $P(\sigma) \neq 0$ であるような配置 σ (許される配置) と言われる) は、次の 図 2.3 のとき "1 次元の" なものに限られる。

[図 2.3]

$q = 0$ のときに許される配置。 $P(\sigma) \neq 0$ により、原子の状態は右上から左下にかけて揃ったものとなり、一次元的な "x 切片" $\{ \sigma((i, 0)) = s_i ; i \in \mathbb{Z} \}$ で決ってしまう。



これら "許される配置" のうち、特に期待値に極大の寄与を与える配置

($P(\sigma)$: 極大なる σ) のことを 基底状態 (ground state) と言う。
 詳しく言うと、 σ が基底状態であるとは、 $\sigma'(i) = \sigma(i)$ (有限個の i を除き) となる全ての配置 σ' に対して $P(\sigma) \geq P(\sigma')$ が成り立つことである。

我々の模型の場合、以後 parameters の範囲を $0 < q < x < 1$,
 $x = q^u$, に限れば、基底状態は本質的に (= $s \in \mathcal{S}$ による overall な平行移動 $\sigma(i, j) \rightarrow \sigma(i, j) + s$ を除いて) 次の n 通りだけ存在する : それらを $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}$ と書くと、各 σ_μ の x 切片は

$$3) \quad \sigma_\mu(i_1+1, 0) - \sigma_\mu(i_1, 0) = \varepsilon_\mu + i_1 \pmod n .$$

2.3.2. 境界条件。ところで、物理的な考察をすると、 $q = 0$ において系の自由度を一つの基底状態に固定し、少し”温度”を上げ、再び $q = 0$ としても、系は有限個の原子を除いては元の基底状態に戻るであろう。(なぜなら、他の基底状態になるためには、途中で無限個の原子の状態を変化させる事が必要であるが、それは無限大の Energy を必要とし、従って実現されないと考えられるから。) そこで我々は次の 条件 B C を課そう。

条件 B C (= boundary condition)。基底状態 σ_μ を 1 つ固定し、以後配置 σ としては、

(B C) 十分遠方の格子点 $i \in \mathbb{Z}^2$ においては $\sigma(i) = \sigma_\mu(i)$ なる条件を満たすもののみを考える。従って、1 点関数なども次のように定義を改める。

$$1) \quad \text{Prob}(\sigma(0) = s) := \lim_{m \rightarrow \infty} Z^{-1} \sum_{\sigma: \text{配置}} \delta_{\sigma(0), s} \prod_{\text{面}} W \left(\begin{array}{cc} \sigma(i) \sigma(j) \\ \sigma(l) \sigma(k) \end{array} \right) ,$$

$$2) \quad Z := \sum_{\sigma: \text{配置}} \prod_{\left(\begin{array}{cc} i & j \\ l & k \end{array} \right) : \text{面}} W \left(\begin{array}{cc} \sigma(i) \sigma(j) \\ \sigma(l) \sigma(k) \end{array} \right) ,$$

ただし (1), (2) の和 Σ'_σ は、"境界条件を満たす配置"

$$3) \quad \{ \sigma : (Z^2)_m \rightarrow \mathcal{S} ; \sigma|_{\partial(Z^2)_m} = \sigma_\mu \}$$

($\partial(Z^2)_m$ は、 $(Z^2)_m$ の"境界"の格子点全体)

のみをわたる (以後 $\Sigma'_\sigma = \Sigma_{\sigma: \text{配置}_m, \text{BCを満たす}}$ と表す)。

■

以下では基底状態として σ_0 ($\mu = 0$ に対する 2.3.1, 3) の配置) を固定し、これに対応する境界条件 (BC) を課して考える。

ここでは物理的考察に導かれて境界条件を課した (基底状態を固定した) のであるが、これも状態の集合 \mathcal{S} 及び Boltzmann weight W と並んで模型を特徴付ける重要な要件の1つである。尚、この基底状態がある意味で "最高 weight vector" に対応することを後で見るとであろう (Section 5)。

Section 3 角転送行列 (Corner transfer matrix, CTM)

求めたい 1 点関数は、2 次元的に並んだ原子達の自由度をわたる和である (2 次元状態和) 。この和を 1 次元的な和 (1 次元状態和) に帰着させるのが、ここで紹介する Baxter が開発した 角転送行列の方法 (暫定的な訳 ; Corner transfer matrix method) である。

3 . 1 . 角転送行列の定義。

3.1.1 定義 (角転送行列 A , B , C , D) .

$$1) \quad \begin{aligned} s &= (s(0), s(1), \dots, s(m), s(m+1)) \\ s' &= (s'(0), s'(1), \dots, s'(m), s'(m+1)) \end{aligned}$$

を、 \mathcal{S}^{m+2} の元で、2 条件

2) 隣接条件 (admissibility) : $i = 0, \dots, m$ に対して、

$$s^{(i)}(i+1) - s^{(i)}(i) \in \{ \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1} \}$$

3) 境界条件 : $s^{(m)}(m) = b, \quad s^{(m+1)}(m+1) = c$

$$\text{但 } b := \sigma_0(m, 0) = \sigma_0(0, -m), \quad c := \sigma_0(m+1, 0) = \sigma_0(0, -m-1)$$

を満たすものとする (σ_0 は基底状態 (2.3)) 。このとき、

4) $A_{s, s'} := \delta_{s(0), s'(0)} \times$

$$\times \sum_{\sigma} : \text{右下}_m \rightarrow \mathcal{S} \quad \prod_{i \in \text{右下}'_m} W \left(\begin{array}{cc} \bar{\sigma}(i) & \bar{\sigma}(i+(1,0)) \\ \bar{\sigma}(i+(0,-1)) & \bar{\sigma}(i+(1,-1)) \end{array} \right)$$

とおく。ここで

$$5) \quad \text{右下}_m := \{ (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid i_2 < 0 < i_1, i_1 - i_2 \leq m-1 \},$$

$$\text{右下}'_m := \{ (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid i_2 \leq 0 \leq i_1, i_1 - i_2 \leq m-1 \},$$

又

$$\text{右下}_m := \{ (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid i_2 \leq 0 \leq i_1, i_1 - i_2 \leq m+1 \},$$

とし (右下_m c 右下'_m c 右下_m)、 $\sigma : \text{右下}_m \rightarrow \mathcal{S}$ に対し その 拡張

$\bar{\sigma} : \overline{\text{右下}_m} \rightarrow \mathcal{S}$ を次で定めた :

6) $\bar{\sigma} \Big|_{\text{右下}_m} := \sigma$,

$\bar{\sigma}(i_1, 0) := s'(i_1), \bar{\sigma}(0, -i_2) := s(i_2),$

$i_1 + i_2 = m \text{ or } m+1$ のとき $\bar{\sigma}(i_1, i_2) := \sigma_0(i_1, i_2)$ 。

Data $A = (A_{s,s'})$ は、2条件 2)3)をみたす \mathcal{S}^{m+2} の元 s, s' を足とする行列と考えることが出来る。この行列

7) $A = (A_{s,s'}) : \oplus_{s'} \mathbb{C} s' \longrightarrow \oplus_s \mathbb{C} s$

を 角転送行列 という。(図 3 . 1 a 参照)

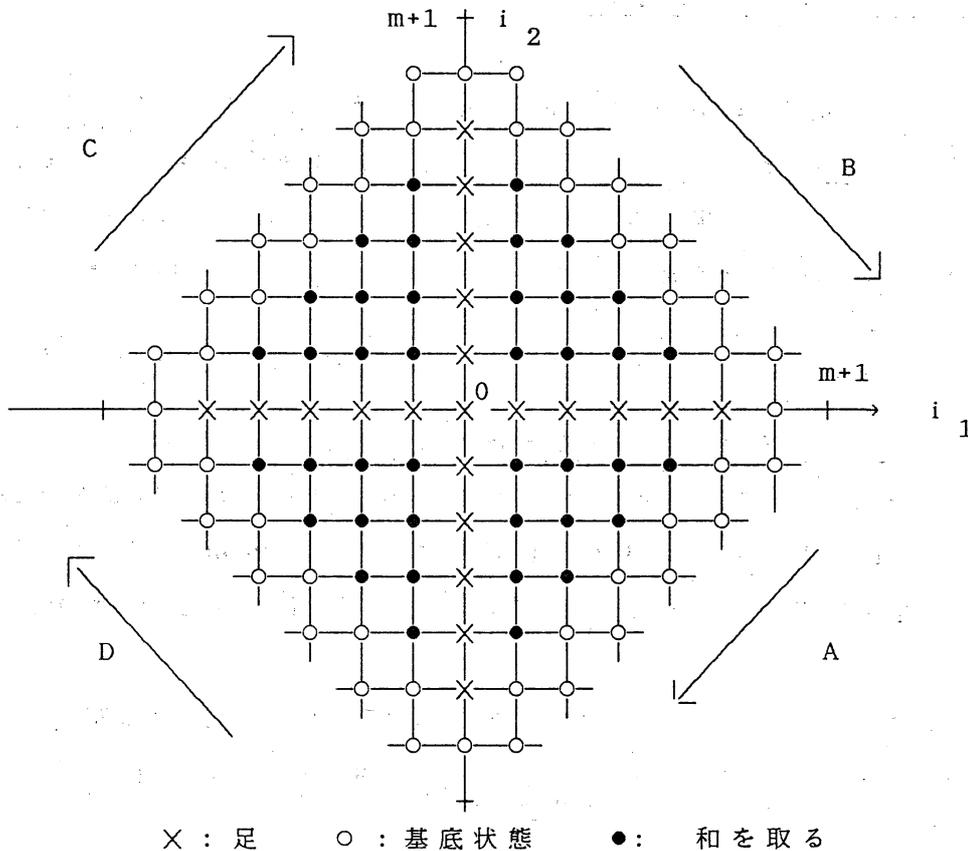
同様にして、右上、左上、左下の各四半分における和として 行列 B、C、D を各々定義し、やはり角転送行列と呼ぶ(図 3 . 1 b 参照)。

3.1.2 注意。定義によって、A, B, C, D は block diagonal であることに注意せよ :

$$A = (A_{s,s'})_{s,s'} = \begin{matrix} \dots s'; & s'; & s'; & \dots \\ s'(0)=a & s'(0)=a' & s'(0)=a'' & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \begin{bmatrix} \vdots & & & 0 \\ * & | & & \\ + & \text{---} & | & \\ & | & * & \text{---} \\ & & & + \\ 0 & & & \vdots \end{bmatrix} & \begin{matrix} \vdots \\ (s ; s(0)=a \\ (s ; s(0)=a' \\ (s ; s(0)=a'' \\ \vdots \end{matrix} \end{matrix}$$

(B、C、D も同様。)

[図 3 . 1 b . B , C , D の 定 義]



3.1.3 1 点 函 数 の 表 示。 角 転 送 行 列 を 用 い て 1 点 函 数 を 表 示 し よ う 。 1 点 函 数 は 格 子 点 全 て の 自 由 度 に 関 す る 和 で あ っ た か ら 、 各 四 半 分 の 自 由 度 (図 3 . 1 b の • 印) で 和 を 取 っ た 後 は 、 A , B , C , D の 足 に 関 す る 自 由 度 (同 X 印) の み が 余 分 で あ る 。 こ の 和 も 取 る た め に は 、 転 送 行 列 の 積 を 取 り 、 更 に ト レ イ ス を 取 れ ば 良 い 。 上 の 注 意 3.1.2 も 考 慮 す れ ば 、 1 点 関 数 (2.1, 7) - 8) は 次 の 様 に 表 示 で き る 事 が 解 る 。

$$\text{Prob}(\sigma(0) = a) = \frac{\text{Trace}_{\sigma(0)=a} A B C D}{\text{Trace} A B C D}$$

こ こ で 右 辺 の 分 子 は 、 行 列 A B C D の $\sigma(0) = a$ な る 足 σ の 部 分 (block) の ト レ イ ス を 意 味 す る 。 ■

3.2. Baxterの議論

主として Yang - Baxter 方程式の下、1点関数 (2.1,7)-8) の計算を
 いわゆる 1次元状態和 (3.2.6 の系参照) に帰着させる Baxter の議論を紹
 介する。ここでの議論は多分に heuristic であり、数学的には厳密でない箇
 所もあることを始めに断っておく (それゆえ、この様な場所でも普通は話さ
 ないことになっている)。

3.2.0. 準備 (YBE の図形的表示)。

角転送行列の定義 3.1.1 でもそうであったが、以後の議論でも式をい
 ちいち書くとしんどい事が多い。そこで Boltzmann weight に関する以下の
 図形表示を用意しておくのが便利である (図 3.1a-3.1b も参照)。

3.2.01 まず、YBE の解の表示から。YBE (1.1) の解

$$1) \quad R(u) = \sum_{\mu, \nu, \mu', \nu'=1}^n R(u)_{\mu, \nu}^{\mu', \nu'} E_{\mu, \mu'} \otimes E_{\nu, \nu'}$$

に対し、

$$2) \quad R(u)_{\mu, \nu}^{\mu', \nu'} = : \begin{array}{c} \mu' \quad \nu' \\ \diagdown \quad / \\ u \\ / \quad \diagdown \\ \mu \quad \nu \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(in)} \\ \text{(out)} \end{array}$$

と書く事にする。また単位行列 $I = (\delta_{\mu, \mu'})_{\mu, \mu'}$ を

$$3) \quad \delta_{\mu, \mu'} = : \begin{array}{c} \mu' \\ | \\ \mu \end{array}$$

で表す。すると YBE (1.1.1)

$$4) \quad R_{12}(u) R_{23}(u+v) R_{12}(v) = R_{23}(v) R_{12}(u+v) R_{23}(u)$$

は次の様に表せる (これ自体は後で用いる事はない)。

5; YBE_R)

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \\ = 1, \dots, n}} \begin{array}{c} \lambda \quad \mu \quad \nu \\ \alpha \quad \beta \quad \gamma \\ \alpha' \quad \beta' \quad \gamma' \\ \lambda \quad \mu \quad \nu \\ \quad \quad \quad u \quad v \\ \quad \quad \quad u+v \end{array} = \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \\ = 1, \dots, n}} \begin{array}{c} \lambda \quad \mu \quad \nu \\ \alpha \quad \beta \quad \gamma \\ \alpha' \quad \beta' \quad \gamma' \\ \lambda \quad \mu \quad \nu \\ \quad \quad \quad u \quad v \\ \quad \quad \quad u+v \end{array}$$

(任意の $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu' = 1, \dots, n$ に対して)

ここで各 summandは3つの  及び 3つの  の積を表す。これはしばしば省略して次のようにも書かれる。

6)

$$\begin{array}{c} \lambda \quad \mu \quad \nu \\ \quad \quad \quad v \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \quad u \\ \lambda' \quad \mu' \quad \nu' \end{array} = \begin{array}{c} \lambda \quad \mu \quad \nu \\ \quad \quad \quad u \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \quad v \\ \lambda' \quad \mu' \quad \nu' \end{array}$$

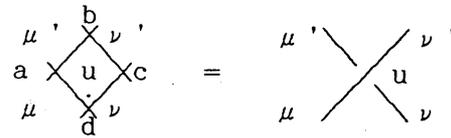
但し \bullet 印は和を取ることを意味するが、 $\frac{\mu'}{\mu} = \delta_{\mu\mu'}$ により (YBE') の和は両辺共三重和であるので3つずつしか書かなかった。

7) 注意。我々の解 $R(u)$ に於いては、2.2.3,1) を思い出せば、この和は更に一重和に帰着することが解る。 ■

3.2.02 次に、 Boltzmann weight

$$8) \quad W \left(\begin{array}{cc|c} a & b & \\ d & c & u \end{array} \right) = \frac{a}{d} \boxed{u} \frac{b}{c} = \mu \frac{\mu'}{\nu} \boxed{.u} \nu'$$

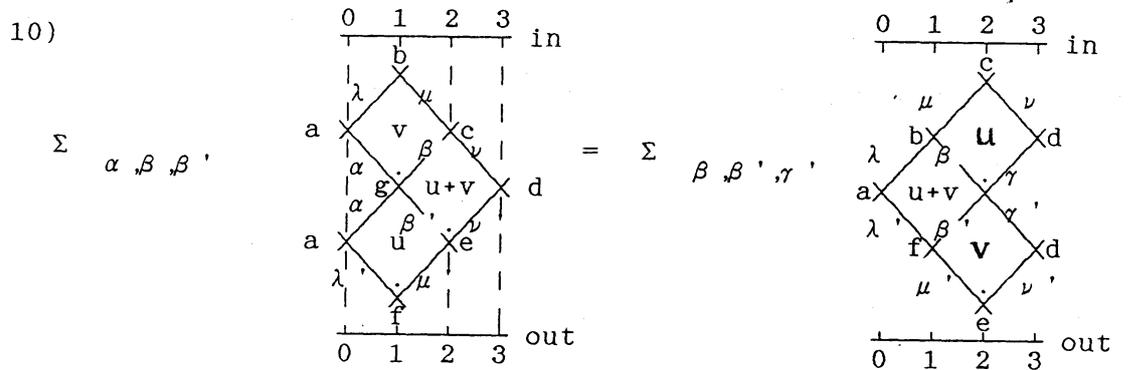
を用いて Y B E を書き直そう。 W の定義より、箱を反時計回りに 45° 傾けて

9) 

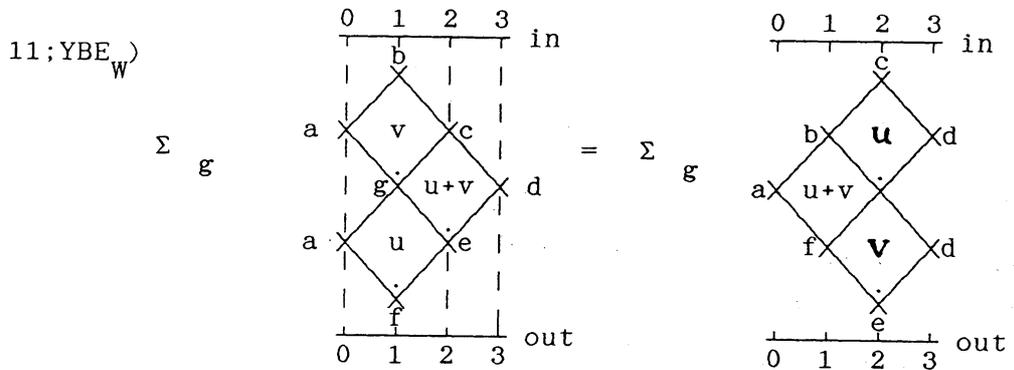
($\varepsilon_\mu = d-a, \varepsilon_\nu = c-d, \varepsilon_{\mu'} = b-a, \varepsilon_{\nu'} = c-b$ の時)

と書ける (2.2.2 で予告したように左下隅の位置を \cdot で示している) 。

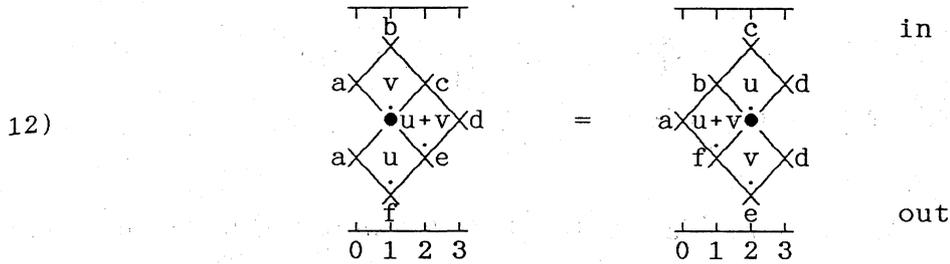
Y B E については、単に (YBE_R) を箱で書くと

10) 

であるが、 3.2.01,7) により

11; YBE_W) 

と同値であることが解る。これも簡単に次の様に書くと良い (箱を並べて書いたら積を表し、●印があったらその自由度について和を取る) 。



13) 定義。 面作用素 (face operator) $W_i(u)$ ($i=1,2,\dots$) を

14) $\sigma = (\sigma(0), \dots, \sigma(m)), \sigma' = (\sigma'(0), \dots, \sigma'(m)) \in \mathcal{g}^{m+1}$

に対し

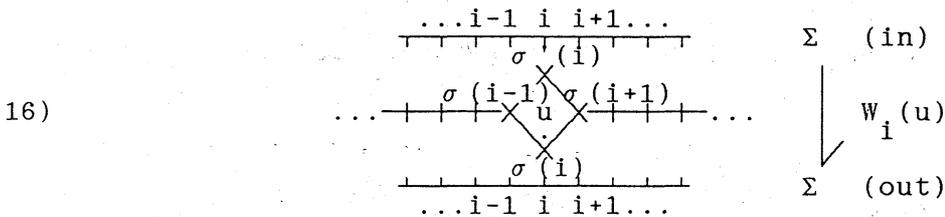
15) $W_i(u)_{\sigma, \sigma'}$

$$:= \dots \delta_{\sigma(i-1), \sigma'(i-1)} W \left(\begin{array}{c|c} \sigma(i-1) & \sigma'(i) \\ \sigma(i) & \sigma(i+1) \end{array} \middle| u \right) \delta_{\sigma(i+1), \sigma'(i+1)} \dots$$

$$\left(\sigma^{(i)}(i+1) - \sigma^{(i)}(i) \in \{ \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1} \} \text{ の時 } \right)$$

$$:= 0 \quad (\text{その他})$$

で定義される、 $\Sigma := \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{g}^{m+1}} \mathbb{C} \sigma$ 上の作用素とする。



すると (YBE_W) (11)) は次の等式を成分毎に書いたものと見なせる :

17) $W_i(u) W_{i+1}(u+v) W_i(v) = W_{i+1}(v) W_i(u+v) W_{i+1}(u)$.

これは形式的には $R(u)$ に対する "もとの YBE" 1.1.1 とよく似ているが、作用する空間は 1.1.1 両辺のそれとは異なることに注意。尚、 $|i-j| > 1$

のとき

$$18) \quad W_i(u) W_j(v) = W_j(v) W_i(u)$$

であることは定義より直ちに解る。

補題。 以上の図形的記号法の下に、次式が成り立つ（” u の箱が通り抜ける”）。

19)

(任意の $a, b, \dots, h \in \mathcal{A}$ に対して)

即ち

$$20) \quad W_1(u) (W_2(v_1+u) W_3(v_2+u)) (W_1(v_1) W_2(v_2)) \\ = (W_2(v_1) W_3(v_2)) (W_1(v_1+u) W_2(v_2+u)) W_3(u).$$

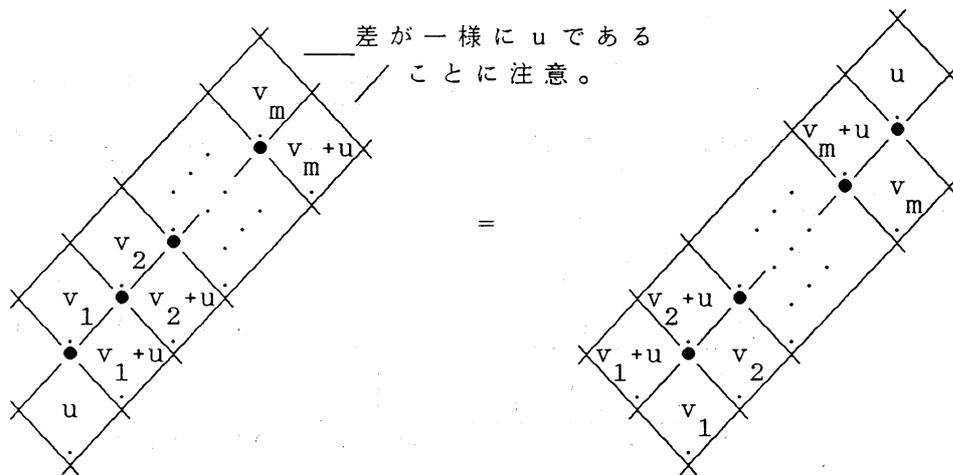
証明。 (YBE_W) を、次のように 2 回用いれば良い。

21)

一般にも、(YBE_W) を繰り返し適用すれば、次が成り立つ。

補題

22)



■

22) は勿論周囲の各頂点に \mathfrak{g} の元を任意に、 $2m+4$ 個だけ (補題 19) では $m=2$ であり a, \dots, h と書いた) 配置して成り立つと言う意味であるが、誤解はないであろう。以後誤解の虞のない限りこの様に周囲の配置を省略する。

(図解)

左辺

右辺

$$6) \quad \Sigma \quad \begin{array}{c} s'(0) \\ s''(0) \\ s''(0) \\ s(0) \end{array} \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_1 + u \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} s'(0) \\ s''(0) \\ s(0) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{in} \\ \Sigma \\ \text{out} \end{array} \quad \begin{array}{c} s'(0) \\ s''(0) \\ s''(0) \\ s(0) \end{array} \begin{array}{|c|} \hline u_1 + u \\ \hline u_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} s'(0) \\ s''(0) \\ s(0) \end{array}$$

少し傾けて考え、(YBE_W 3.2.02,11)17) を思い出すと

$$7) \quad \begin{array}{c} s' \\ s' \times u_1 \times a \\ \bullet u_1 + u \times s \\ s' \times u \times s \\ s'' \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} = \begin{array}{c} a \\ s' \times u \times s \\ s' \times u_1 + u \bullet \\ s'' \times u_1 \times s \\ s \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

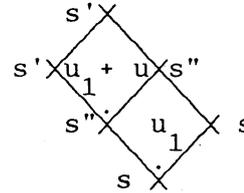
即ち

$$8) \quad (W_1(u) W_2(u_1+u) W_1(u_1)) (s', s'', s, s), (s', s', a, s) \\ = (W_2(u_1) W_1(u_1+u) W_2(u)) (s', s'', s, s), (s', s', a, s)$$

である。ところで面作用素 $W_2(u)$ は、定義 3.2.0,13) 及び $R(u)$ の可逆性 1.1.7, 3) により可逆であるから、 $W_2(u)^{-1}$ を両辺に右から掛ければ、

$$9) \quad (W_1(u) W_2(u_1+u) W_1(u_1) W_2(u)^{-1}) (s', s'', s, s), (s', s', s'', s) \\ = (W_2(u_1) W_1(u_1+u)) (s', s'', s, s), (s', s', s'', s) \circ$$

この右辺は (図解) の右辺の summand



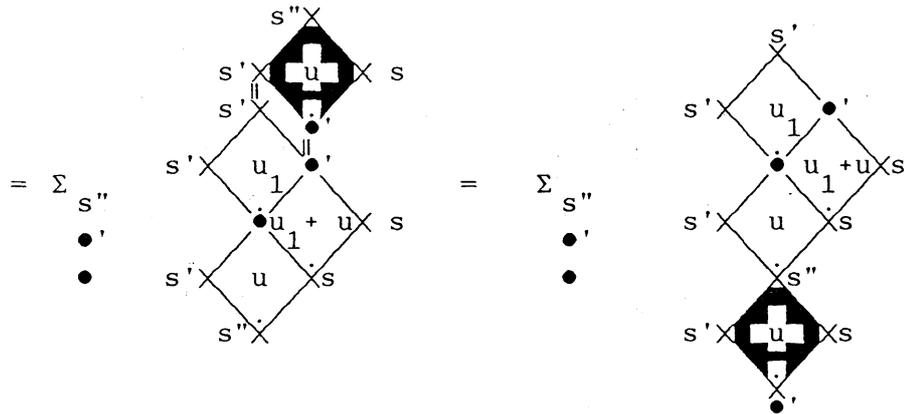
に等しい。

よって左辺の s'' についての和が (図解) の左辺になることを言えば良いが

それは $W_2(u)^{-1}$ の行列成分を黒い箱  で表せば、

10)

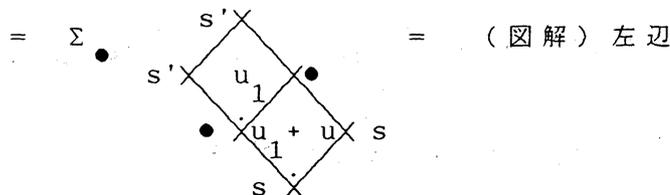
$$\sum_{s''} (W_1(u) W_2(u_1+u) W_1(u_1) W_2(u)^{-1}) (s', s'', s, s), (s', s', s'', s)$$



$$= \sum_{\bullet, \bullet'} (W_1(u)^{-1} W_1(u)) (s', \bullet', s, s), (s', \bullet, s, s)$$

$$\times (W_2(u_1+u) W_1(u_1)) (s', \bullet, s, s), (s', s', \bullet', s)$$

$$= \sum_{\bullet} \delta_{\bullet', \bullet} (W_2(u_1+u) W_1(u_1)) (s', \bullet, s, s), (s', s', \bullet', s)$$



となるので、OK.

以上で $N=1$ の場合の証明が終った。

N が一般のときにも、3.2.02 の (補題) を用いれば同様にできる。 ■

この主張より、特に次のことが解る。

3.2.12 系。 $T(u_1, \dots, u_N)$ の固有空間は、差 $u_1 - u_2, u_2 - u_3, \dots, u_{N-1} - u_N$ のみに依存する。従ってその固有ベクトルも、スカラー関数倍を除いて $u_1 - u_2, u_2 - u_3, \dots, u_{N-1} - u_N$ のみに依存する。

証明。 4) より特に

$$[T(u_1, \dots, u_N), T(0, u_2 - u_1, \dots, u_N - u_1)] = 0$$

であるから、 $T(0, u_2 - u_1, \dots, u_N - u_1)$ の固有空間分解を考えれば良い。 ■

3.2.2

3.2.20 Baxterの主張2 ("差法性" (difference property)) :

格子面積無限大の極限 ($m \rightarrow \infty$, 2.1参照) においては、あるスカラー値関数 $\tau(u, v)$ と行列値関数 $X(u)$ が存在して、

$$1) \quad B(u)C(v) = \tau(u, v) X(u-v).$$

即ち、異なる変数を持つ角転送行列 $B(u)$, $C(v)$ の積が、本質的に差 $u - v$ にしか依らない。これは積 CD , DA , AB についても同様である。 ■

3.2.21 注意。格子面積無限大においては、角転送行列 A, B, C, D はサイズが無限大になるばかりでなく、実は各行列要素も面積の order で発散する。従って上の式はそのままでは意味をなさない。これは次のように考えている。まず、我々は基底状態 $\sigma = \sigma_0$ を1つ固定して考えているが、それは絶対零度 $q = 0$ に於て確率測度 $P(\sigma)$ を極大とするようなものであった(2.3)。 $P(\sigma)$ の定義 2.1, 3) と角転送行列の定義 3.1.1 を見比べてみると、 $q = 0$ かつ格子面積有限の段階では (例えば A を考えた時) $A(u)_{\{\sigma_0(i,0)\}, \{\sigma_0(0,-j)\}}$ が $A(u)$ の最大固有値を与えることが解る。このことは温度 q が摂動しても変わらないであろう。そこで正規化して

$$2) \quad A_{\text{正規}}(u)_{s, s'} := A(u)_{s, s'} / A(u)_{\{\sigma_0(i,0)\}, \{\sigma_0(0,-j)\}}$$

を考えれば、これは面積無限大のときも有限な値に収束すると期待される。

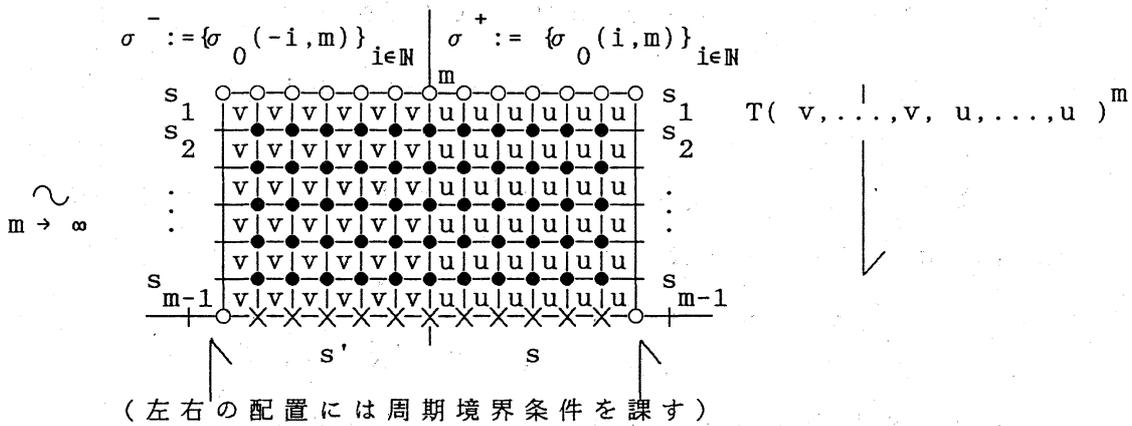
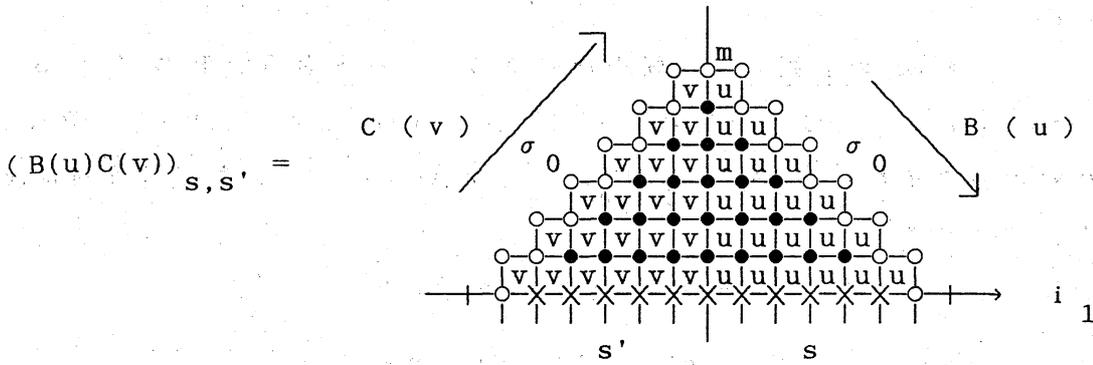
B, C, D についても同様に考えて、上の主張 (及び、以下の議論) は

$B_{\text{正規}}(u)$, $C_{\text{正規}}(u)$ に対するものと考える。無論こうしても積

$B(u)C(u)$ に意味をもたせられるか保証の限りではないが、そのときは 1) の右辺で $\tau = \infty$ と考えることにする。 ■

3.2.22 "証明"。

[3.2.2 / Baxterの議論]



$$= (T(v, \dots, v, u, \dots, u)^m)_{(s', s), (\sigma^-, \sigma^+)}$$

と考えると、 $m \rightarrow \infty$ では " $T^{m+1} = T^m$ " であるから、

$$\begin{aligned} & \sum_{(s, s')} T(\dots, v, \dots; \dots, u, \dots)_{(S, S'), (s, s')} (B(u)C(v))_{(s, s')} \\ &= \sum_{(s, s')} T_{(S, S'), (s, s')} (T^m)_{(s, s'), (\sigma^-, \sigma^+)} = (T^{m+1})_{(S, S'), (\sigma^-, \sigma^+)} \\ &= (B(u)C(v))_{(S', S)} \end{aligned}$$

であろう。即ち $B(u)C(v)$ は行転送行列 $T(\dots, v, \dots; \dots, u, \dots)$ の (固有値 1 の) 固有ベクトルである。故に主張 2 は主張 1 の系より従う。 ■

この議論は非常に荒っぽいものだが、以下で見るとように強力な結論を導く。

3.2.3.

Baxterの主張3 (角転送行列の形) : 格子面積無限大 ($m \rightarrow \infty$; 2.1) においては、スカラー値関数 $a(u), b(u), c(u), d(u)$, 定数行列 P, Q, R, T 及び対角型の定数行列 M_1, M_2, M_3, M_4 , \mathbb{H} が存在して、角転送行列は次のように表される。

$$\begin{aligned} 0) \quad A(u) &= a(u) P M_1 \exp(u \mathbb{H}) Q^{-1}, \\ B(u) &= b(u) Q M_2 \exp(-u \mathbb{H}) R^{-1}, \\ C(u) &= c(u) R M_3 \exp(u \mathbb{H}) T^{-1}, \\ D(u) &= d(u) T M_4 \exp(-u \mathbb{H}) P^{-1}. \end{aligned}$$

"証明"。ここでも無限サイズの行列の積は形式的に考え、又逆行列も generic には存在すると仮定する。

$A(u)B(v)$ に対する 主張2 の式

$$1) \quad A(u)B(v) = \tau(u, v) X(u-v).$$

において、変数変換 $u \rightarrow u_1 - v$, $v \rightarrow u_1 - u$ をすると、

$$2) \quad A(u_1 - v) B(u_1 - u) = \tau(u_1 - v, u_1 - u) X(u-v).$$

1)で、とくに $u = u_0$ とすると

$$B(v) = \tau(u, v) A(u_0)^{-1} X(u_0 - v).$$

この右辺に 2)で $u = u_0$ としたものを代入し、 X を消去すると、

$$B(v) = \text{scalar} \times A(u_0)^{-1} A(u_1 - v) B(u_1 - u_0)$$

これを 1)に代入し、 $v \rightarrow u_1 - v$ として、

$$A(u) A(u_0)^{-1} A(v) B(u_1 - u_0) = \text{scalar} \times X(u+v-u_1)$$

この両辺を u と v の関数と見るとき、 $B(u_1 - u_0)$ は定数であるから、

$$\tilde{A}(u) := A(u) A(u_0)^{-1}$$

とおけば

$$\hat{A}(u) \hat{A}(v) = \text{scalar} \times Y(u+v)$$

(ある $Y(u)$ に対して)

となることが解る。従ってある P 及び対角形の \mathbb{H} が存在して

$$3) \quad \hat{A}(u) = \text{scalar} \times P \exp((u-u_0)\mathbb{H}) P^{-1}.$$

(3)の証明: 条件は $\hat{A}(u_0) = \text{id}$, 及び

$$\hat{A}(u) \hat{A}(v) = f(u,v) Y(u+v)$$

(あるスカラー値関数 f に対して)

である。 $u_0 = 0$ としても一般性を失わない。 $v = 0$ とすると $\hat{A}(u) = f(u,0) Y(u)$ であるから、 f を取り替えて

$$\hat{A}(u) \hat{A}(v) = f(u,v) \hat{A}(u+v)$$

としてよい。 $\hat{A}(u) \hat{A}(v) \hat{A}(w)$ を2通りに計算して

$$f(u,v) f(u+v,w) = f(u,v+w) f(v,w),$$

これを解けば (\log を取って2階微分 $\partial_u \partial_w$ を考えよ)、ある φ に対し、

$$f(u,v) = \varphi(u)\varphi(v) / \varphi(0)\varphi(u+v).$$

そこで改めて $\varphi(0)\varphi(u)^{-1} \hat{A}(u)$ を $\hat{A}(u)$ とおけば、

$$\hat{A}(u) \hat{A}(v) = \hat{A}(u+v),$$

従って、行列は generic には半単純であると考えれば、ある P と対角行列 \mathbb{H} により

$$\hat{A}(u) = P \exp(u\mathbb{H}) P^{-1}. \quad \blacksquare$$

3) を用いれば、 $A(u)$, $B(u)$ に対する主張は容易である:

$$\begin{aligned} A(u) &= a(u) P \exp((u-u_0)\mathbb{H}) P^{-1} A(u_0) \\ &= a(u) P M_1 \exp(u\mathbb{H}) Q^{-1} \end{aligned}$$

($\exp(-u_0\mathbb{H}) =: M_1$, $A(u_0)^{-1}P =: Q$ とおいた)、

$$B(u) = b(u) A(u_0)^{-1} P M_1 \exp((u_1 - u)\mathbb{H}) Q^{-1} B(u_0 - u_1)$$

$$= b(u) Q M_2 \exp(-u H) R^{-1}$$

($M_1 \exp(u_1 H) =: M_2$, $B(u_0 - u_1) Q =: R$ とおいた)。

同様にして、

$$C(u) = c(u) R M_3 \exp(u H) T^{-1},$$

$$D(u) = d(u) T M_4 \exp(-u H) S^{-1}.$$

あとは $P = S$ を言えば良いが、必要なら M_1 を取り替えることにすれば

$$4) \quad P = (\text{ある対角行列}) \times S$$

を言えば十分である事に注意する。さて、 $D(u)A(v)$ に対する主張 2 の式

$$D(u)A(v) = \tau(u, v) X(u-v)$$

に、以上の結果を代入すれば、

$$d(u) T M_4 \exp(-u H) S^{-1} \times a(u) P M_1 \exp(u H) Q^{-1}$$

$$= \tau(u, v) X(u-v).$$

定数行列及びスカラー値関数を右辺に回せば、適当な X' に対し

$$5) \quad \exp(-u H) S^{-1} P \exp(u H) = \text{scalar}(u, v) \times X'(u-v)$$

となる。ところで generic には $X'(u-v)_{j,j} \neq 0$ である様な j 行 j 列があるだろう。5)の両辺をその様な (j, j) 成分で比較すると、 H は対角形だから

$$(S P^{-1})_{jj} = \text{scalar}(u, v) X'(u-v)_{j,j},$$

従って両辺を $X'(u-v)_{jj}$ で割れば $\text{scalar}(u, v)$ は実は $u-v$ のみの関数と解る。よって 5) の右辺も $u-v$ のみの関数、一方左辺は u のみの関数であるので、実は 5)の両辺は定数である。更に左辺に注目すれば、その様なことが起こるのは $[H, S^{-1}P] = 0$ の時だけである。故に H の固有値が重複度を持たない限り 4)が成り立つ。

以上で主張 3 が示された。 ■

3.2.4

Baxterの主張 4 (初期条件) : (我々の模型においては、)

$A(0), C(0)$ はともにスカラー行列である。従って主張 3 において

$$1) \quad P M_1 = Q, \quad R M_3 = T$$

として良い。

証明。我々の場合 $W \left(\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix} \middle| u=0 \right) = (1-q) \delta_{bd}$ であり (2.2.2, (イ-ハ))、これと $A(u), C(u)$ の定義より上の主張は直ちに従う。

■

3.2.5

3.2.50 Baxterの主張 5 (逆関係 inversion relations)

(第 1 逆関係)

$$0) \quad \sum_g W \left(\begin{matrix} a & g \\ d & c \end{matrix} \middle| u \right) W \left(\begin{matrix} a & b \\ g & c \end{matrix} \middle| -u \right) = \text{scalar} \times \delta_{bd}$$

(第 2 逆関係) ある定数 λ 、定数の組 $\{g_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ (gauge 因子と呼ばれる)、及びスカラー値関数 $\rho_2(u)$ が存在して、

$$1) \quad \bar{W} \left(\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix} \middle| u \right) := W \left(\begin{matrix} a & b \\ d & c \end{matrix} \middle| u \right) \times \frac{g_a g_c}{g_b g_d}$$

とおくとき、次が成り立つ:

$$2) \quad \sum_e \bar{W} \left(\begin{matrix} c & d \\ b & e \end{matrix} \middle| \lambda - u \right) \bar{W} \left(\begin{matrix} a & b \\ d & e \end{matrix} \middle| \lambda + u \right) = \rho_2(u) \delta_{a,c}$$

■

3.2.51

0) の図解:

$$0') \quad \sum \cdot \begin{array}{ccc} & a & b \\ & \boxed{-u} & \\ a & \bullet & c \\ & \boxed{u} & \\ d & & c \end{array} = \rho_1(u) \delta_{b,d}$$

5) $\lambda := \frac{n}{2}$,
 $g_a := q^{-\langle a, \rho \rangle / 2}$ 但 $\rho := (n-1)\varepsilon_0 + (n-2)\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-2}$,
 \langle , \rangle は \mathbb{Z}^n から誘導される Q^* の内積

とすれば良い事が計算により解る。 ■

3.2.53 系 1。 対角形行列 $G = (G_{s,s'})_{s,s'}$ を、

6) $s, s' \in \{(s(0), s(1), \dots); s(i) \in \mathcal{A}, s(i+1) - s(i) = \varepsilon_\mu \ (\exists \mu)\}$
 に対し $G_{s,s'} := \delta_{s,s'} g_{s(0)}$ として定める。すると

7) $D(\lambda - u) B(\lambda + u) = \text{scalar} \times G^2$ 。

"証明"。 W の代わりに \bar{W} を用いて定義した角転送行列を $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ とすると、

8) $B(u)_{s,s'} = g_{s(0)}^{+1} \bar{B}(u)_{s,s'} \times (\text{境界の寄与})$,
 $D(u)_{s,s'} = g_{s(0)}^{+1} \bar{D}(u)_{s,s'} \times (\text{境界の寄与})$

である (ここで境界の寄与は $s(0)$ に依らない; 図 3.2.5a)。従って $s(0) = a$ の block については、

9) $D(\lambda - u) B(\lambda + u) \Big|_{s(0)=a} = \text{scalar} \times g_a^2 \bar{D}(\lambda - u) \bar{B}(\lambda + u)$ 。

但し右辺の scalar 倍は境界の寄与によるもので、 a に依らない。さらにこの右辺が第 2 逆関係 (主張 5) によって

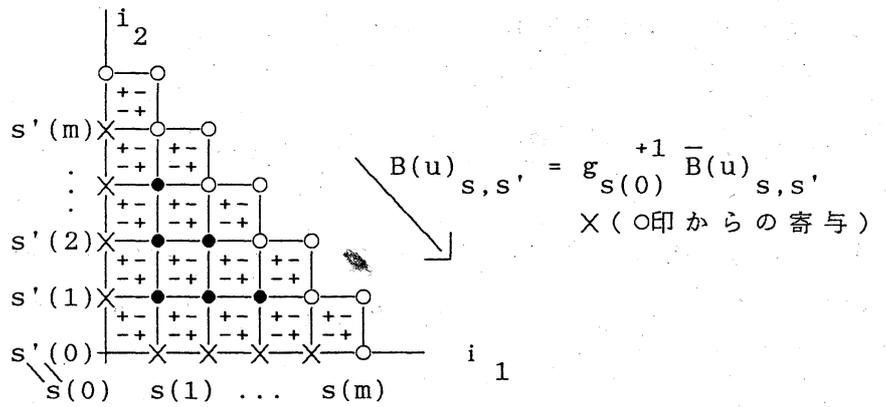
10) $= g_a^2 \times (u \text{ にはよるが } a \text{ によらない数})$

となる事が、図 3.2.5b の様にして判る。 ■

⊗への注. 図は格子サイズ有限のときの“(q)=10)”の説明であるが、実は“(q)=10)”はサイズ有限では成立しない。このについては、本講究録所載の山田裕二氏の稿, pp. 70-71 を参照。

[図 3.2.5a. 8)式 の 図 解 。]

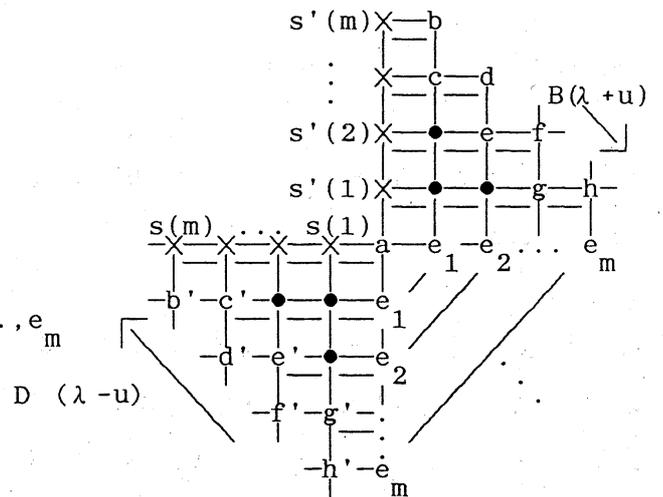
内部では g_a^{+1} が打ち消しあう。境界 (○印) からの寄与を無視すると、原点のところで $g_{s(0)}$ が残る。



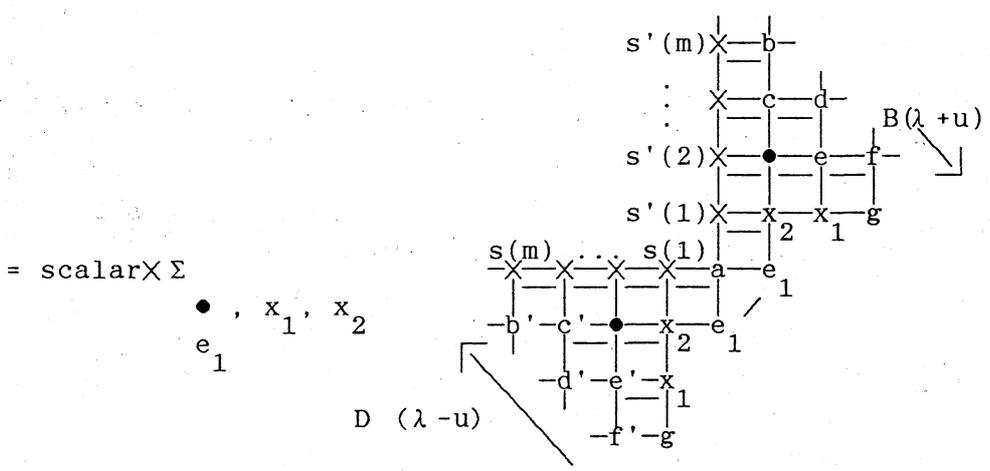
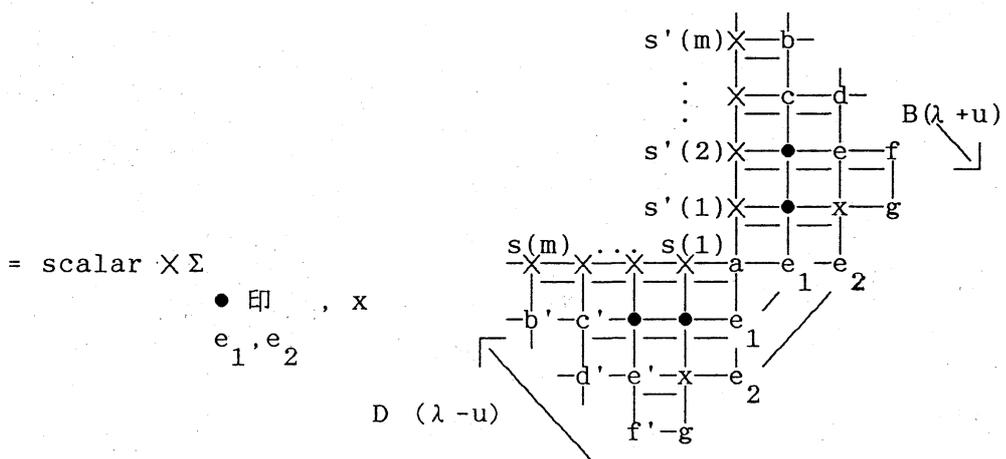
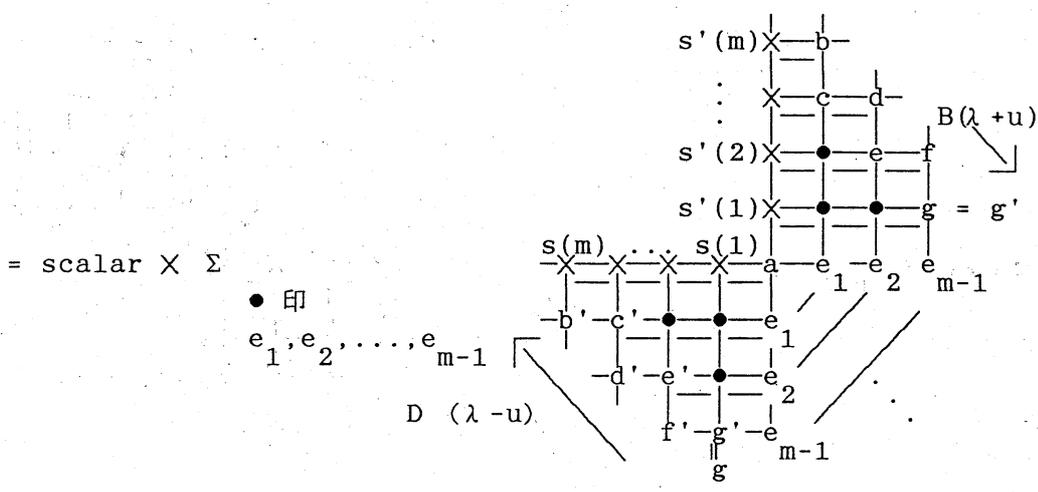
[図 3.2.5b.系 1 (10)式) の 図 解]

9) 右辺 = scalar $\times \Sigma$

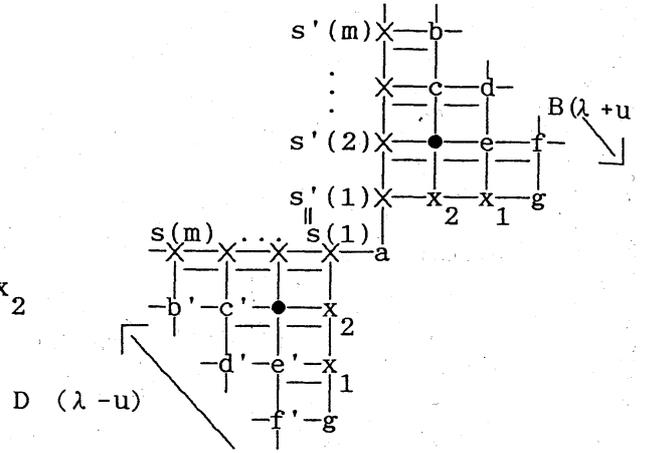
● 印
 e_1, e_2, \dots, e_m



[3:2.5 / Baxterの議論]

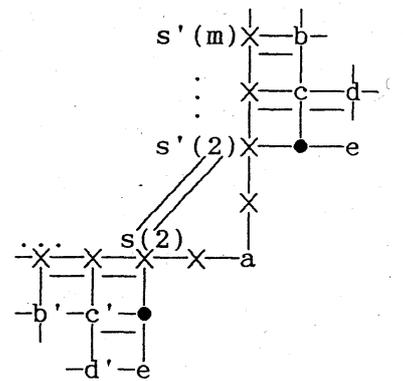


$$= \text{scalar} \times \delta_{s(1), s'(1)}^{\Sigma} \bullet, x_1, x_2$$

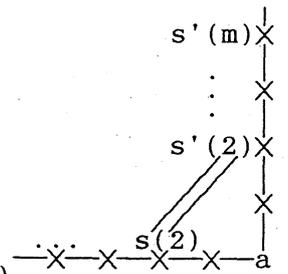


$$= \text{scalar} \times$$

$$\times \delta_{s(1), s'(1)}^{\delta} \delta_{s(2), s'(2)}^{\Sigma} \bullet$$



$$= \text{scalar} \times \delta_{s(1), s'(1)}^{\delta} \delta_{s(2), s'(2)}^{\delta} \cdots \delta_{s(m), s'(m)}$$



= (10) 右辺) 。

3.2.54 注意。主張 3 を示すのに、最後に問題となった (3.2.3,4) は、系 1 を用いても出せる。実際、(3.2.3,4)までの議論により

$$\begin{aligned}
 11) \quad & B(\lambda+u) D(\lambda-u) \\
 &= \text{scalar} \times Q M_2 \exp(-(\lambda+u)H) R^{-1} \times T M_4 \exp(-(\lambda-u)H) S^{-1} \\
 &= \text{scalar} \times P \underbrace{M_1 M_2 M_3 M_4}_{\text{対角形}} \exp(-2\lambda H) S^{-1}
 \end{aligned}$$

(ここで $Q = P M_1^{-1}$, $R^{-1} T = M_3$ (主張 4) を用いた)

であるから、この左辺が系 1 により対角形であることを使えば良い。 ■

3.2.55 系 2 (1 点函数の g_a , λ , H による表示。)

$$12) \quad \text{Prob}(\sigma(0) = a) = \frac{g_a^2 \text{Trace}_{\sigma(0)=a} e^{2\lambda H}}{\sum_a g_a^2 \text{Trace}_{\sigma(0)=a} e^{2\lambda H}}.$$

"証明"。3.1.3 で見たように

$$\text{Prob}(\sigma(0) = a) = \frac{\text{Trace}_{\sigma(0)=a} A B C D}{\text{Trace} A B C D}$$

である。一方主張 3 より

$$A(u)B(u)C(u)D(u) = \text{scalar} \times P M_1 M_2 M_3 M_4 P^{-1}$$

であり、上の注意における式 11) より、

$$= \text{scalar} \times P G^2 \exp(2\lambda H) P^{-1}$$

であるから、これらをお互いあわせて上の表示を得る (但し、トレイスの存在やその性質などを問わないことにしての話)。 ■

3.2.6.

3.2.60 Baxter の主張 6 (\mathbb{H} の固有値)。(1) 最大固有値を 1 に正規化すると、角転送行列 $A(u)$ の固有値は $x = q^u$ の整数べきであり、具体的に次で尽くされる：

- 1) $\{ x^{\omega(\eta)} \mid \eta \text{ は条件 (BC')} \text{ を満たすもの} \}$ 、
- 2) 条件 (BC') : $\left\{ \begin{array}{l} \eta = (\eta(0), \eta(1), \dots, \eta(j), \dots), 0 \leq \eta(j) \leq n-1, \\ \text{十分大きな } j \text{ に対しては } \eta(j) = j \bmod n. \end{array} \right.$

但し $\omega(\eta)$ は次のように定める： $\mu, \nu = 0, \dots, n-1$ に対し

- 3)
$$H(\mu, \nu) := \begin{cases} 0 & (\mu < \nu \text{ のとき}) \\ 1 & (\mu \geq \nu \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおき、また整数 j に対し $0 \leq \bar{j} \leq n-1$ を $j = \bar{j} \bmod n$ なるものとするとき

- 4)
$$\omega(\eta) := \sum_{j=1}^{\infty} j \{ H(\eta(j-1), \eta(j)) - H(\overline{j-1}, \bar{j}) \} .$$

(2) \mathbb{H} の固有値は、 $A(u)$ の固有値 $x^{\omega(\eta)}$ から

- 5)
$$u^{-1} \log x^{\omega(\eta)} = \omega(\eta) \log q$$

で与えられ、かつそれらで尽くされる。

"証明"。 $A(u) = \text{scalar} \times P e^{u \mathbb{H}} P^{-1}$ であった。他方 $A(u)$ を定める Boltzmann weight W には u 依存性は $x = q^u$ を通じて入っているから、 $A(u)$ についてもそうである。従って $A(u)$ は

- 6)
$$u \rightarrow u + 2\pi i / \log q$$

について周期的であろう。

(ここで今迄 parameters は実であるとしていた (2.3.1,3)) ので複素の周期を持ち出すことには無理がある。しかし Baxter の言いたいことは、実際に対角化するときの基底などは x のべき級数で書かれるので、それが十分小さい x について収束すれば 6) の様な周期性も当然持つだろう、ということ

さてこれを認めると、固有値が x の整数べきである事も従う。その具体的な値についても、 \mathbb{Z} の離散性より、適当な極限で調べて良いことになる。そこで x を固定しつつ $q \rightarrow 0$ とする。このとき

$$7) \quad \mu \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \nu = x^{H(\mu, \nu)}$$

であり、その他の μ, μ', ν, ν' の組合せに対しては $\mu \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \nu' = 0$

(2.3.1, 1)-2))。よって、任意の

$$8) \quad \sigma, \sigma'$$

$$\in \{ (\sigma(0), \sigma(1), \dots); \sigma(i) \in \mathcal{J}, \sigma(i+1) - \sigma(i) = \varepsilon_{\eta(i)} (\exists \eta(i)) \}$$

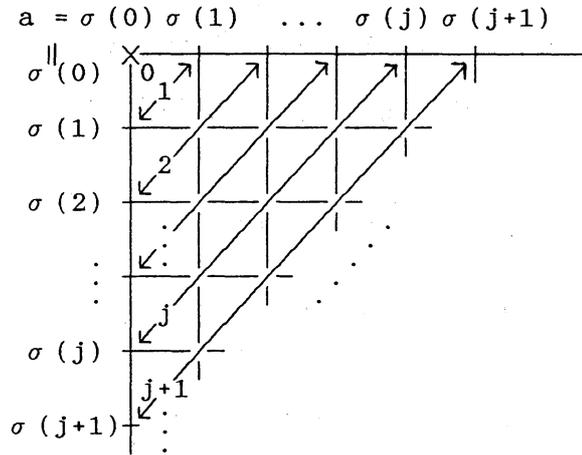
に対し、図 3.2.6 に見られる如く

$$\begin{aligned} 9) \quad & A(u)_{\sigma, \sigma'} \\ &= \delta_{\sigma, \sigma'} \left(x^{H(\eta(0), \eta(1))} \right)_1 \left(x^{H(\eta(1), \eta(2))} \right)_2 \left(x^{H(\eta(2), \eta(3))} \right)_3 \dots \\ &= \delta_{\sigma, \sigma'} x^{\sum_j H(\eta(j), \eta(j+1))} \\ & \quad \left(\text{ここで } \eta(i) \text{ は } \sigma(i+1) - \sigma(i) = \varepsilon_{\eta(i)} \text{ なるもの} \right) \end{aligned}$$

となり (即ち、この極限では $A(u)$ はそもそも対角形!)、最大固有値 (基底状態) だけの正規化 (注意 3.2.21) を考慮すれば主張 6 を得る。固有値がこれらで尽くされることは、上の σ 達が $A(u)$ の働く空間の基であることより明らか。

■

[図 3.2.6: $q \rightarrow 0$ のときの $A(u)$]



こうして \mathbb{H} の固有値が具体的に求めれば、それを先の 3.2.5 の系 2 に代入することで、1 点関数の次の表示式が得られる (我々の模型では $\lambda = n/2$ 、 $g_a = q^{-\langle a, \rho \rangle / 2}$ であること (3.2.52, 5)) に注意) :

3.2.61 系 (1 点関数の 1 次元状態和表示)。任意の $a \in \mathfrak{g} = Q^*$ に対し、

$$10) \quad \text{Prob}(s(0) = a) = \frac{g_a^2 \sum_{\eta} (q^n)^{\omega(\eta)}}{\text{(正規化因子 } Z \text{)}}$$

($\omega(\eta)$ は 3.2.6, 4), g_a は 3.2.52, 5) のもの) 但し分子の和は、主張 6 の条件 BC' (2)) を満たし、且つ

(条件 A) 十分大きな j に対しては

$$11) \quad a + \varepsilon_{\eta(0)} + \varepsilon_{\eta(1)} + \dots + \varepsilon_{\eta(j)} = \varepsilon_{\bar{0}} + \varepsilon_{\bar{1}} + \dots + \varepsilon_{\bar{j}}$$

である様な、列 $\eta = (\eta(0), \eta(1), \dots, \eta(j), \dots)$ をわたる (即ち、境界条件 BC' を満たし、且つ $s(0) = a$ と言うこと) 。 ■

3.2.7 まとめ 及び CTM法についてのノート

ここ Section 3 の結論は、1 点関数を 1 次元状態和に帰着させる式 (3.2.61,10) である。

復習も兼ねて、以上の Baxterの議論 (角転送行列法 (CTM method)) で用いた Boltzmann weight W に対する条件を、現れた順にまとめておこう。

- (イ) YBE (1.1 ; 3.2.0) . (大前提!)
- (ロ) 低温極限 $q \rightarrow 0$ での対角性 (diagonal nature、§ 2.3)。
- (ハ) 初期条件 ($u = 0$ での対角性、主張 4)。
- (ニ) 第二逆関係 (主張 5)。
- (ホ) u に関する周期性。

(イ) によって角転送行列 A, B, C, D が u の関数として本質的に指数関数であることが主張され、続く (ハ) (ニ) を使うと \mathbb{H} の固有値がわかれば 1 点関数が 1 次元状態和で書けることになる。最後に \mathbb{H} の固有値は (ホ) 及び (ロ) を用いて求めた。

Baxter のここでの議論を認めるならば、上の (イ) - (ホ) を満たす Boltzmann weight により定義される 2 次元の格子模型においては、やはり 1 点関数が 1 次元状態和で書けることになる。 ■

注意。 尚、第 1 逆関係は (イ) YBE と (ハ) 初期条件 から出る (3.2.0,12) で $u+v = 0$ とせよ)。 ■

ノート

ここで見たように、Baxter の議論は巧妙かつ強力である一方、危うい点もまた多い。Baxter はどうしてこのような議論にたどり着いたのだろうかと問う人がいても不思議はないし、一体この議論の結論は正しいのかと言う疑問もでるだろう。これらに関しては Baxter の本 (文献 [2]) の 14.1 にある " Numerical Calculations " の項 (p.405-) が参考になろう。

そこには、彼が Tsang と共に、彼等以前の研究に導かれて " Hard hexagon model" に対し C T M の固有値を 行列サイズの truncation による近似で求めたときのことが記されている。それによれば、彼等は計算機実験によって、C T M の第 1 固有値、第 2 固有値、... がそれぞれ急速に収束すること、そしてその固有値の分布がある数 α , x を用いて、数列

$$\alpha, \alpha^{\omega}, \alpha^{\omega'}, \alpha^{\omega''}, \dots; \omega, \omega', \omega'', \dots \text{ は全て整数}$$

で非常に良く近似できることを発見した (同書、Tables 14.1-14.2) 。

Baxter は更に activity と呼ばれる量をこの x について (計算機を用いて) 展開し、それが

$$-x \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^{5n-4})(1-x^{5n-1})(1-x^{5n-3})^{-1}(1-x^{5n-2})^{-1} \right\}^5$$

の展開係数と少なくとも 29 番目までは一致していることを見いだす (同書 p.408) 。又別の論文では、可解性の期待できない hard square model について同様の計算を試み、固有値のこのような単純な規則性がなんら見いだされなかったことを報告している (同書 p.411) 。..... Baxter の C T M 法開発はこのような数値実験に支えられているのである。

3.3. 目標 及び 問題 2

3.3.1 今後の目標。 さて、Sections 4-6 の目標は 1 次元状態和 3.2.61, 10) を表現論の手法を用いて求めることである。ここで後のために path という言葉を用意しておこう。

3.3.2 定義 (path)。

以後、条件 (BC') (3.2.60, 2) を満たすような列 $\eta = (\eta(j))_{j=1}^{\infty}$ を、path 又は (理由あって) Λ_0 -path と呼び、その全体を $P(\Lambda_0)$ と表す。path のうちで、特に基底状態の配置 σ_0 (2.3.1, 3)) に対応するもの

$$1) \quad \eta_0 = (\bar{j})_{j=1}^{\infty} \\ = (0, 1, 2, \dots, n-1, 0, 1, \dots, n-1, \dots)$$

を、基底状態の path (ground state path) と呼ぶ (図 3.3 参照)。

path $\eta \in P(\Lambda_0)$ に対し、主張 6 で与えられた $\omega(\eta) \in \mathbb{Z}$ をその path の degree と呼ぶ。

又、 $\eta \in P(\Lambda_0)$ に対しては、条件 A (3.2.61, 11) により $a \in \mathcal{J}$ が一意的に定まる。この a を $s_0(\eta)$ と書き、path η の 始点 と呼ぶ。 ■

これらの記号のもとでは、3.2.61 の 1 点関数の表示は、

$$2) \quad F_a(t) := \sum_{\substack{\eta \in P(\Lambda_0) \\ s_0(\eta) = a}} t^{\omega(\eta)} \quad (\text{path をわたる和})$$

とにおいて

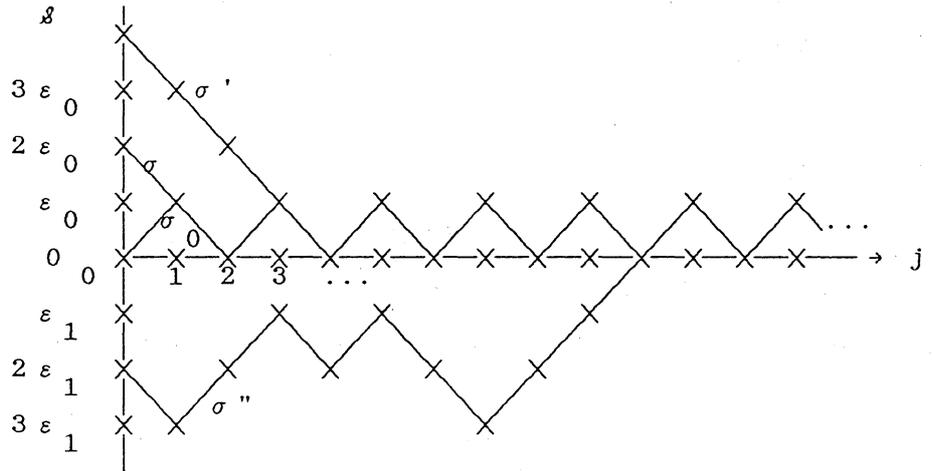
$$3) \quad \text{Prob}(s(0) = a) = q^{-\langle a, \rho \rangle} F_a(q^n) / Z,$$

$$4) \quad Z = \sum_{a \in \mathcal{J}} q^{-\langle a, \rho \rangle} F_a(q^n)$$

と書ける。

[図 3. 3 a . path の例 (1)]

● $n = 2$ のとき。 $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\varepsilon_0 + \mathbb{Z}\varepsilon_1 = \mathbb{Z}\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 = 0$ である。



$\sigma_0, \sigma, \sigma', \sigma''$ は各々、 path

$$\eta_0 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \text{ (基底状態の path)}$$

$$\eta = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

$$\eta' = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

$$\eta'' = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

に対応する \mathcal{L} の列を図示したもの。それらの始点は、各々

$$s_0(\eta_0) = 0, s_0(\eta) = 2\varepsilon_0, s_0(\eta') = 4\varepsilon_0, s_0(\eta'') = 2\varepsilon_1$$

であり、また degree は各々

$$0, 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1, 1 + 2 + 3 + 0 + 0 + \dots = 6,$$

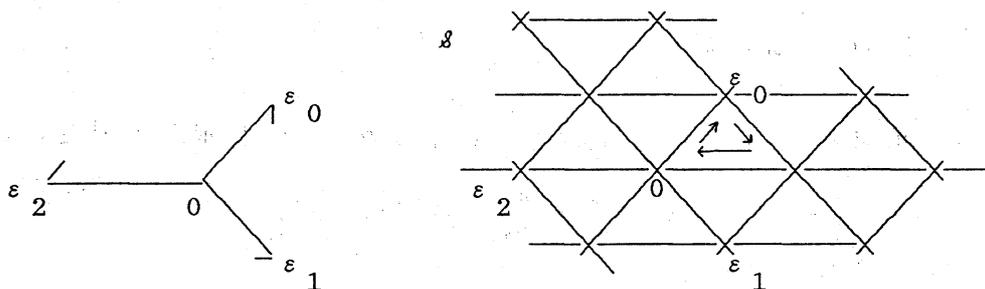
$$-1 + 2 + 0 + 0 + 0 + 6 - 7 + 6 + 0 + 10 + 0 + \dots = 18$$

である。

[図 3.3 b . path の例 (2)]

• $n = 3$ のとき。 $\mathcal{g} = \mathbb{Z}\varepsilon_0 + \mathbb{Z}\varepsilon_1 + \mathbb{Z}\varepsilon_2$, $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$.

基底状態の path は、下の三角形をぐるぐる回るものである (0 から出発して、矢印の向きに) 。



3.3.3 問題 2 。 (1 次元状態和 $F_a(t)$ を初等的に求めること)

$\gamma, \nu \in \mathcal{g}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ に対して、 t の関数 $f_m(\gamma, \nu; t)$ を

1) $f_0(\gamma, \nu; t) := \delta_{\gamma, 0}$,

2) $f_m(\gamma, \nu; t)$

$$:= \sum_t \sum_{\substack{\mu \\ \eta(0), \dots, \eta(m) = 0, \dots, n-1 \\ \varepsilon_{\eta(0)} + \dots + \varepsilon_{\eta(m-1)} = \gamma, \varepsilon_{\eta(m)} = \nu}} t^{\sum_{j=1}^m j H(\eta(j-1), \eta(j))}$$

により定める (H は 3.2.6, 3) のもの) 。定義より次の漸化式が成り立つ。

3) $f_m(\gamma, \nu; t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} t^{mH(\mu, \nu)} f_{m-1}(\gamma - \varepsilon_{\mu}, \mu; t)$

(i) $[\nu] ! := (1-t)(1-t^2)\dots(1-t^\nu)$ として、"多項係数の t -analog" を

4) $\left[\begin{matrix} m \\ \gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \end{matrix} \right] := \frac{[m] !}{[\gamma_0] ! \dots [\gamma_{n-1}] !}$

で定める ($m, \gamma_i \in \mathbb{Z}$) 。このとき $\gamma = \gamma_0 \varepsilon_0 + \dots + \gamma_{n-1} \varepsilon_{n-1}$, $\gamma_i \in \mathbb{Z}$

と書けば、 f_m は次のように表せる事を示せ ($\gamma_0 + \dots + \gamma_{n-1} = m$ に注意)。

$$5) \quad f_m(\gamma, \nu; t) = t^{\frac{1}{2} \sum_j \{ \gamma_j (\gamma_j - 1) + \gamma_j H(i, \nu) \}} \begin{bmatrix} m \\ \gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \end{bmatrix}$$

(hint: 漸化式)

(ii) 正整数 j に対し、 \bar{j} を $0 \leq \bar{j} < n$, $\bar{j} = j \bmod n$ で定め、

$$6) \quad \bar{\omega}_m := \sum_{j=1}^m j H(\bar{j}-1, \bar{j})$$

とおく。また

$$7) \quad \varphi(t) := \prod_{j=1}^{\infty} (1 - t^j)$$

とする。このとき

$$8) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} t^{-\bar{\omega}_m} f_m(\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{m-1}, \bar{m}, t) = \varphi(t)^{-n+1}$$

であることを示せ。 ■

注意。 この講義で扱っている模型に対しては、このように初等的に 1 次元状態和を求めることが出来るが、この方法は一般の模型 (A.4 参照) に対し拡張することが難しい。この講義では一般化にも配慮して、1 次元状態和を求める別法を説明する。その方法は次章以下で行うように、path と アフィン - リー環のある表現の基底との間の 1 対 1 対応を確立することである。 ■

Section 4 $\widehat{sl(n, \mathbb{C})}$ とその表現

4.1. 定義など。

- $\widehat{sl(n, \mathbb{C})}$.

4.1.1 定義 ($\widehat{sl(n, \mathbb{C})}$, $\widehat{gl(n, \mathbb{C})}$) .

アフィン - リー環の一つである $\widehat{sl(n, \mathbb{C})}$ は、次で定義される。まずベクトル空間としては、 c, d を文字として

$$1) \quad \widehat{sl(n, \mathbb{C})} := \widehat{sl(n, \mathbb{C})} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

そして Lie bracket は次で定める：

$$2) \quad \begin{aligned} [x \otimes t^j, y \otimes t^k] &:= [x, y] \otimes t^{j+k} + j \delta_{j+k, 0} \operatorname{Tr}(x, y) c, \\ [c, \widehat{sl(n, \mathbb{C})}] &:= 0 \quad (\text{即ち、} c \text{ は中心元}) \\ [d, y \otimes t^k] &:= k y \otimes t^k \quad (d = t \partial_t) \end{aligned}$$

(任意の $x, y \in \widehat{sl(n, \mathbb{C})}$, $j, k \in \mathbb{Z}$ に対して。但し、 $[x, y] := xy - yx$, Tr は $n \times n$ 行列に対する通常のもの。)

$\widehat{gl(n, \mathbb{C})}$ も全く同様に定義される。 ■

4.1.2 事実。 (1) $\widehat{gl(n, \mathbb{C})} = \widehat{sl(n, \mathbb{C})} \oplus \mathbb{C}I$ (Lie環として) に対応して次の分解がある。 $\mathbb{C}I \subset \widehat{gl(n, \mathbb{C})}$ の "アフィン化"

$$3) \quad H := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} I \otimes t^j \oplus \mathbb{C}c \subset \widehat{gl(n, \mathbb{C})}$$

$$[I \otimes t^j, I \otimes t^k] = nj \delta_{j+k, 0} c$$

に対して (右辺の $n = \operatorname{Tr} I$)、

$$4) \quad \widehat{gl(n, \mathbb{C})} = \widehat{sl(n, \mathbb{C})} + H, \quad \widehat{sl(n, \mathbb{C})} \cap H = \mathbb{C}c.$$

(2) H の既約表現は、本質的に次のものしかない：表現空間を

$$5) \quad \mathbb{C}[x_n, x_{2n}, x_{3n}, \dots]$$

(無限変数の多項式環。後の都合上変数を x_n, x_{2n}, \dots と書いた。)

として、

$$6) \quad I \otimes t^j \mapsto \partial / \partial x_{nj}, \quad I \otimes t^{-j} \mapsto nj x_{nj} \times \quad (j > 0)$$

$$I \otimes t^0 \mapsto a \quad (a \text{ は任意の数}), \quad c \mapsto \text{id.}$$

(文献 [6])

4.1.3 注意. H から "0-mode" を除いた Lie 環

$$7) \quad H_{\times} := \bigoplus_{j \neq 0} I \otimes t^j \oplus \mathbb{C}c$$

は、(無限次元) Heisenberg Lie 環 と呼ばれる。

4.1.4 定義. $\widehat{sl(n, \mathbb{C})}$ の Chevalley 生成元 と呼ばれる元

$$8) \quad e_i, f_i, h_i \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

を次のように定める。 $E_{i,j}$ を行列単位として、

9) $i = 1, \dots, n-1$ に対して、

$$e_i := E_{i,i+1} \otimes t^0, \quad f_i := E_{i+1,i} \otimes t^0,$$

$$h_i := \text{diag}(0, \dots, 1, -1, \dots, 0) \otimes t^0$$

$i \quad i+1$

10) $i = 0$ に対して、

$$e_0 := E_{n,1} \otimes t^1, \quad f_0 := E_{1,n} \otimes t^{-1},$$

$$h_0 := c - (h_1 + \dots + h_{n-1}) \otimes t^0$$

$$= c - \text{diag}(1, 0, \dots, 0, -1) \otimes t^0$$

4.1.5 事実. ($\widehat{sl(n, \mathbb{C})}$ の生成元による特徴付け。)

(1) $\widehat{sl(n, \mathbb{C})}$ は、 d 及び $\{e_i, f_i, h_i\}_{i=0}^{n-1}$ で生成される。

(2) e_i, f_i, h_i は次の交換関係を満たす。

$$11) \quad [h_i, h_j] = 0 \quad (0 \leq i, j \leq n-1)$$

$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j \quad (\text{同上})$$

[4.1 / $sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ とその表現]

$$(\text{ad}(e_i))^{1-a_{ij}} e_j = 0 = (\text{ad}(f_i))^{1-a_{ij}} f_j \quad (i \neq j)$$

但し $\text{ad}(x)y := [x, y]$ であり、行列 $(a_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ は次で与えられる。

$$12) \quad n = 2 \text{ の時} \quad (a_{ij})_{i,j=0,1} := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$n > 2 \text{ の時} \quad a_{ij} := \begin{cases} 2 & : i = j \\ -1 & : i = j \pm 1 \pmod n \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

(3) 逆に (2) の交換関係を満たす元 d 及び $\{e_i, f_i, h_i\}_{i=0}^{n-1}$ で生成される Lie 環は $sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ と同型である。 ■

4.1.6 ノート 上の 12) の行列を $A_{n-1}^{(1)}$ 型の generalized Cartan matrix, GCM (of affine type) と呼ぶ。一般に、11) のごとき基本関係式によって (ある種の対称性の公理を満たす) $\text{data}(a_{ij})$ から Lie 環を定義でき、それを Kac - Moody Lie 環 と呼ぶ ($\text{data}(a_{ij})$ をその Kac - Moody Lie 環の GCM と言う)。上の特徴付けによって、 $sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ は Kac - Moody Lie 環のうちの特殊な族である affine Lie 環の 1 つと見なせ Kac - Moody Lie 環の一般論をその表現論に援用できる事になる (例えば、Weyl - Kac の指標公式 6.2.1)。尚 GCM は、 $\det(a_{ij}) > 0$ なる時 finite type, 0 固有値を 1 つだけ持ち、任意の i 行 i 列を除いたら残りは finite type であるとき affine type と呼ぶ。これら 2 つの族は完全に分類されていて、このうち finite type の GCM の分類表は有限次元複素単純 Lie 環の分類表に他ならない。また affine type GCM から定まる Lie 環は全て $sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ と同様に定義される単純 Lie 環の "affine 化" と同型である事も知られている。この 2 つの族以外については Kac - Moody Lie 環の構造は良くわかっていない。 ■

● 基本 weight および 最高 weight 表現

4.1.7 定義。 (Cartan subalgebra 及び 基本 weight など)

$$13) \quad \mathfrak{h} := \{ \text{対角行列} \in sl(n, \mathbb{C}) \},$$

$$14) \quad \mathfrak{h}^{\wedge} := (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{t}^0) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \subset sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$$

とすれば $[\mathfrak{h}^{\wedge}, \mathfrak{h}^{\wedge}] = 0$ 。 \mathfrak{h}^{\wedge} を $sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ の Cartan subalgebra と
言う。 $h_0, \dots, h_{n-1}, d \in \mathfrak{h}^{\wedge}$ であり、これらは \mathfrak{h}^{\wedge} の基である。この基に

関する、双対空間 $\mathfrak{h}^{\wedge*}$ の双対基を

$$15) \quad \Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1}, \delta$$

と書く。 $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1}$ は 基本 weight, δ は null root (又は imaginary root) と呼ばれる。また

$$16) \quad \alpha_i := \delta_{i,0} \delta + 2\Lambda_i - \Lambda_{i-1} - \Lambda_{i+1}$$

($0 \leq i \leq n-1$, 添字は mod n で考える)

とおき simple root と呼ぶ。このとき $\alpha_0 + \dots + \alpha_{n-1} = \delta$ となる。

以後 \mathfrak{h}^{\wedge} と $\mathfrak{h}^{\wedge*}$ の双対性を表す内積を \langle, \rangle とかく。 ■

4.1.8 定義。 dominant integral weight とは、 $\mathfrak{h}^{\wedge*}$ の元 Λ であり、

$$17) \quad \Lambda = m_0 \Lambda_0 + \dots + m_{n-1} \Lambda_{n-1} + k \delta,$$

m_i は全て非負整数、 $k \in \mathbb{C}$ は任意

という形のもの事である。 Λ に対して、非負整数

$$18) \quad \langle \Lambda, c \rangle = m_0 + \dots + m_{n-1}$$

を Λ の レベル (level) と呼ぶ。 ■

4.1.9 基本的事実 (既約最高 weight 加群の存在とその構造)

(1)。任意の dominant integral weight Λ に対し、次の (19) を満たす既約 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ -加群 $L(\Lambda)$ が存在し、同型を除いて一意的である。

19) $L(\Lambda)$ にはある元 $v_{\Lambda} \neq 0$ があって、

(i) $L(\Lambda)$ は、 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ 上 v_{Λ} で生成される。

(ii) $i = 0, \dots, n-1$ に対し、

$$e_i v_{\Lambda} = 0, \quad h_i v_{\Lambda} = \langle \Lambda, h_i \rangle v_{\Lambda}.$$

(2)。(1)の既約 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ -加群 $L(\Lambda)$ に対し、(19)の v_{Λ} は定数倍を除いて一意的であり、それは更に次を満たす。

20) (iii) $f_i^{\langle \Lambda, h_i \rangle + 1} v_{\Lambda} = 0 \quad (i = 0, \dots, n-1)$

逆に (i)(ii)を満たす (既約とは限らない) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ -加群があり、それが更に (iii)も満たせば、それは実は既約であり (1)の $L(\Lambda)$ と同型である。

この主張における $v_{\Lambda} \in L(\Lambda)$ を $L(\Lambda)$ の最高 weight vector と言い、 $L(\Lambda)$ を Λ を 最高 weight とする 既約最高 weight 加群 と呼ぶ。

4.1.10 定義 (weight space)

一般に、 $\mu \in \mathfrak{h}^*$ とするとき、元 $v \in L(\Lambda)$ が weight μ の weight vector であるとは

21) $h v = \langle \mu, h \rangle v$ (任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して)

を満たす事である。その様な元の全体を

22) $L(\Lambda)_{\mu} := \{ v \in L(\Lambda), v \text{ は weight } \mu \text{ の weight vector} \}$

と表し、($L(\Lambda)$ における) weight μ の weight space と呼ぶ。また値 $\langle \mu, c \rangle$ をやはり μ のレベルと呼ぶ。

Poincare-Birkhoff-Witt の定理と 4.1.9, (i)(ii) によって、 $L(\Lambda)$ は

$$22) \quad f_{i_1} \cdots f_{i_p} v_{\Lambda} \quad (0 \leq i_1, \dots, i_p \leq n-1)$$

の形の元で張られるが、 $[h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i$ によりこの元は (0 でない限り) $\text{weight } \Lambda - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_p}$ の weight vector である。

$\langle \alpha_i, c \rangle = 0$ に注意すれば、 $L(\Lambda)_{\mu} \neq 0$ なる $\mu \in \mathfrak{h}^*$ はすべて Λ と同じレベルを持つことが解る。 $L(\Lambda)_{\mu}$ は、上で更に $\Lambda - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_p} = \mu$ であるような形の元達で張られる。

4.1.11 例 1 ($L(0)$) $\Lambda = 0$ とすると、20) より全ての i に対して $f_i v_0 = 0$ 。従って $L(0) = \mathbb{C} v_0$ (1次元) で、これはつまらない表現 (全ての元が 0 として作用する $\widehat{sl(n, \mathbb{C})}$ -加群) である。 ■

4.1.12 例 2 ($\widehat{sl(2, \mathbb{C})}$, $L(\Lambda_0)$)。このとき

$$23) \quad \begin{aligned} \langle \Lambda_0, h_0 \rangle &= 1, \quad \langle \Lambda_0, h_1 \rangle = 0, \\ \langle \alpha_0, h_0 \rangle &= 2 = -\langle \alpha_0, h_1 \rangle \end{aligned}$$

である。従って 4.1.9(2) から

$$24) \quad f_0^2 v_{\Lambda_0} = 0, \quad f_1 v_{\Lambda_0} = 0。$$

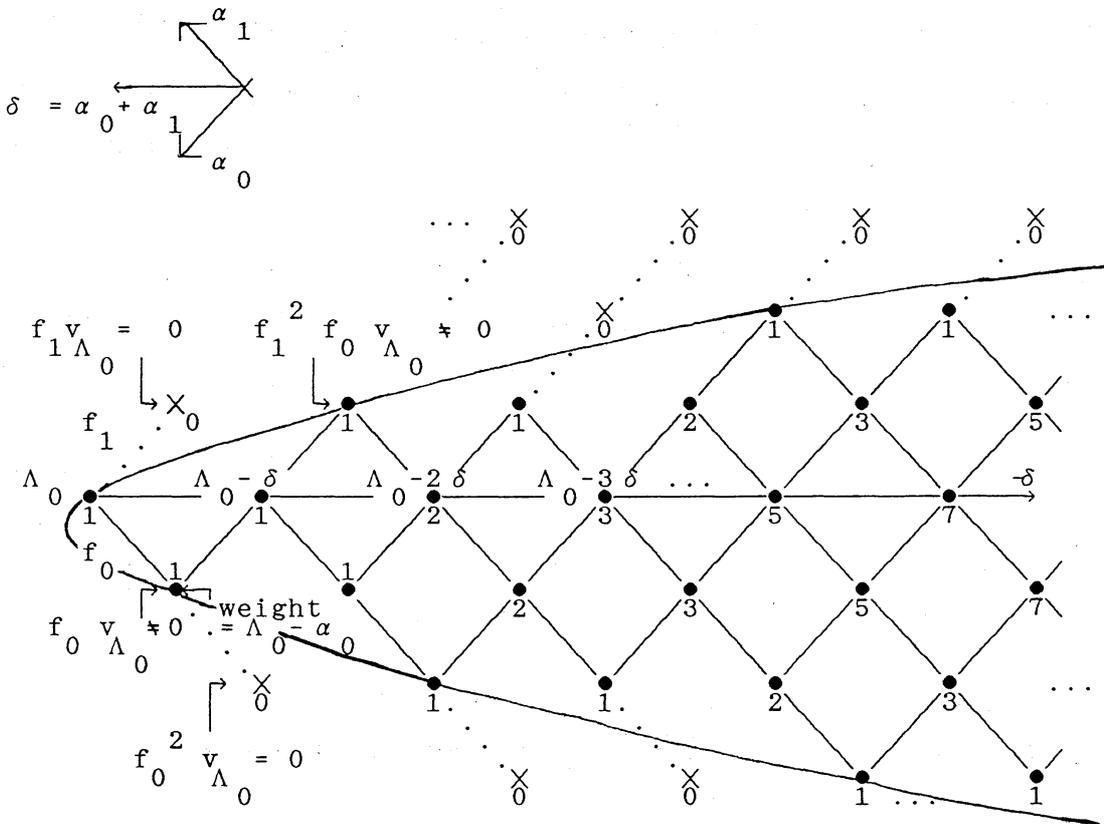
4.1.5(2) の式 $(\text{ad}(f_i))^3 f_{1-i} = 0$ も用いると

$$25) \quad f_0^4 f_1^2 f_0 v_{\Lambda_0} = 0, \quad f_1^3 f_0 f_1 f_0 v_{\Lambda_0} = 0$$

などもわかる。この様なことを続けると、図 4.1 の様に、 Λ_0 を通り δ の方向を軸とする放物線があって、その外側の $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対しては $L(\Lambda_0)_{\mu} = \{0\}$ であることがわかってくる。これは実は affine Lie環の (より一般には、Kac-Moody Lie環の) Weyl群と言うものがあって、今の $\widehat{sl(n, \mathbb{C})}$

[図 4 . 1 : weight space の次元]

$sl(2, \mathbb{C})$ - 加群 $L(\Lambda_0)$ に対し、 Λ_0 に近い weight (●印, X印) に対して、対応する weight space の次元を書いたもの (●, X の下の数)。放物線の外側 (X印) ではそれは常に 0 である。



の場合には $\{ \pm 1 \} \times \mathbb{Z}$ (\pm の \mathbb{Z} への作用 $n \mapsto \pm n$ から定めた半直積群) と同型であるが、それが $L(\Lambda)$ に作用する事の反映である (Λ は任意の dominant integral weight)。一方放物線の内側の μ に対しては、
 $L(\Lambda_0)_\mu \neq 0$ 。上で用いたような基本関係式からは

$$f_0 f_1 f_1 f_0 v_{\Lambda_0} \quad \text{と} \quad f_1 f_0 f_1 f_0 v_{\Lambda_0}$$

の間関係式は出ず、これから更に

$$26) \quad \dim \left(L(\Lambda_0)_{\Lambda_0 - 2\alpha_0 - 2\alpha_1} \right) = 2$$

もわかる。この様にして、 Λ_0 に近い weight の weight space の次元を次々と調べて行くと、やはり図に示した様になる。特に、 δ の方向の半直線上の weight space の次元を順に見て行くと、($0, 0, \dots$ でない限り) どこでも

$$27) \quad 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, \dots$$

となっているが、これも再び先に触れた Weyl 群の作用により説明される。尚、この数列については 4.1.14 参照。

● Character と String function

実は前節の 1 次元状態和が "string function" で与えられ、従って我々の模型における 1 点関数の表示を与える。それを解説するのがこの講義の目的の 1 つでもある。

これらについては詳しくは後で述べることにするが (§ 6)、定義だけはここでしておこう。ひき続き Λ は dominant integral weight とする。

4.1.13 定義。 $L(\Lambda)$ の character (指標) χ_{Λ} とは、形式和

$$28) \quad \chi_{\Lambda} := \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \{ \dim L(\Lambda)_{\mu} \} e^{\mu}$$

の事である。又、string function とは、 $\mu \in \mathfrak{h}^*$ ごとに定まる、やはり形式和

$$29) \quad b_{\mu}^{\Lambda}(q) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \{ \dim L(\Lambda)_{\mu - k\delta} \} q^k$$

のことである。ここで q は不定元である。 ■

$\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}^{\wedge}$ に対して、

$$30) \quad \chi_{\Lambda}(\mathfrak{h}) := \sum_{\mu} \dim L(\Lambda)_{\mu} e^{2\pi i \langle \mu, \mathfrak{h} \rangle}$$

とおき、形式的に χ_{Λ} を \mathfrak{h}^{\wedge} 上の関数と見なすことが出来るが、実はこの和は、領域

$$31) \quad \{ h_0 \otimes t^0 + s\mathfrak{c} - \tau d \mid h_0 \in \mathfrak{h}^*, s, \tau \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \tau > 0 \}$$

の上で広義一様絶対収束することが知られている。更にこれを Weyl群の反不変式の比として与える Weyl-Kac の公式 と言うものがあり、(affine type の Kac - Moody Lie 環一般において) その結果 χ_{Λ} はテータ関数の比で書かれるのだが、これについては後で述べる (§ 6. 2)。

尚、形式的には

$$32) \quad \chi_{\Lambda}(\mathfrak{h}) = \sum_{\mu} \operatorname{Trace}_{L(\Lambda)_{\mu}} e^{2\pi i \mathfrak{h}} = \operatorname{Trace}_{L(\Lambda)} e^{2\pi i \mathfrak{h}}$$

であり、古典的な指標の定義と一致することに注意。又、 χ_{Λ} の収束性から、

$b_{\mu}^{\Lambda}(q)$ もやはり $|q| < 1$ で収束する事が判る : $q = e^{2\pi i \tau}$ とすれば

$$33) \quad b_{\mu}^{\Lambda}(|q|) < (\operatorname{Trace}_{L(\Lambda)} |q|^{-d}) = \chi_{\Lambda}(|q|) < \infty .$$

4.1.14 例及び注意。先の $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\wedge}, L(\Lambda_0))$ の場合を考えると、

$$34) \quad b_{\Lambda_0}^{\Lambda_0}(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots$$

実はこの場合、3.3.3,7) の φ を用いると

$$35) \quad = \varphi(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-1}$$

であることが知られており、更に $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ においても

$$36) \quad b_{\Lambda_0}^{\Lambda_0}(q) = \varphi(q)^{-n+1} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-n+1}$$

である。よって先の数列 27) $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ は所謂 分割数 $p(n)$ (partition numbers, 正整数 n を幾つかの正整数の和で書き表す方法の数) であったことになる。

一方、問題 2 (3.3.3) の中で予告したように、§ 3 の 1 次元統計和 F_0 (3.3.2, 2) についても

$$37) \quad F_0(q) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-n+1}$$

となる：由来の違う量が等しい。これは偶然ではなく、我々がここで扱っている模型を一般化したときにも (1 次元状態和と、レベル ≥ 1 の dominant integral weight Λ に関する b_{μ}^{Λ} との間で； A.0, 2 または A.4 参照) この様な一致が何故か起きる。

そこで我々は、その様な一般の場合も配慮しながら、我々の模型の場合に上の一致を示したい。Section 5 で構成する、path と $L(\Lambda_0)$ の basis との対応がそれを可能にする。

そのために、 $L(\Lambda_0)$ を具体的に実現しておく事が更に必要である。次節でその準備をしよう。 ■

4.2. Fock 表現。

4.2.1 定義。Young 図形とは、正整数の有限列 $Y = [f_1, f_2, \dots, f_s]$ であって、条件

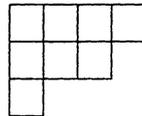
$$1) \quad f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_s \quad (>0)$$

を満たすものである。(ここで 空の列 $Y = \phi$ も許すことにする。)

これを次のように図形的にも表す。

(例) $Y = [4, 3, 1]$ の時、

$$2) \quad [4, 3, 1] \leftrightarrow$$



この様に図形で表示したときに、各マス目 \square のことを node と呼ぶ習慣である。空の Young 図形 (空の列) ϕ は node のない図形と考える。

■

4.2.2 定義 (マス目 node の色) 正整数 n を固定して ($sl(n, \mathbb{C})$ の n のつもり)、 Y の node に次のように番号 $0, 1, \dots, n-1$ を書き込む。この番号のことを各 node の色 (color) と呼ぶ。

3) 例。 ($n = 3$)

0	1	2	0	1 2 0 1 2 ...
2	0	1	2 0 1 2 ...	
1	2 0 1 2 0 ...			
0 1 2 0 1 2 ...				
.				

■

4.2.3 定義 (Fock空間) Young 図形全体を基とする vector空間

$$4) \quad F_0 := \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \text{Young 図形} \}$$

を考えて、Fock空間と呼ぶ。 F_0 上には、Hermite 対称な内積を

- 5) $(a Y, b Y') := \bar{a} b \delta_{Y, Y'}$
 (任意の複素数 a, b と Young 図形 Y, Y' に対して)
 で入れておく。ここで \bar{a} は a の複素共役。

この空間に、次のようにして $sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ の作用を定める。

4.2.4 定義 ($sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ の Fock 表現) 。

(i) (\mathfrak{h} の作用) 各 Young 図形 Y は weight vector であり、その weight は、 $i=0, \dots, n-1$ に対し

$$6) \quad n_i := (Y \text{ に書き込んだ色 } i \text{ の数})$$

とすると

$$7) \quad \text{wt}(Y) := \Lambda_0 - \sum_{i=0}^{n-1} n_i \alpha_i$$

で与えられるものとする。(特に、 $Y=\emptyset$ の weight は Λ_0 .)

(ii) (Chevalley 生成元の作用) $i = 0, \dots, n-1$ に対し、

$$8) \quad e_i(Y) := \sum_{Y'} Y'$$

ここで和は、 Y から色 i の node を 1つ取って得られるような Young 図形 Y' をわたる。

$$9) \quad f_i(Y) := \sum_{Y'} Y'$$

ここで和は、 Y から色 i の node を 1つ付けて得られるような Young 図形 Y' をわたる。

4.2.5 例。 ($n = 3$)

10) $Y =$

0	1	2	0
2	0	1	
1	2		
0			

に対し

11) $h(Y) = \langle \Lambda_0 - 4\alpha_0 - 3\alpha_1 - 3\alpha_2, h \rangle Y \quad (h \in \mathfrak{h}^-)$

12) $e_0(Y) =$

0	1	2	*
2	0	1	
1	2		
0			

 $+$

0	1	2	0
2	0	1	
1	2		
			*

 $(* \text{ の位置の node を取った })$

13) $f_0(Y) =$

0	1	2	0
2	0	1	
1	2	0	
0			



4.2.6 注意. 4.2.4(i)より特に、 d の作用は

14) $d(Y) = -n_0 Y$

で与えられる。($\Lambda_i(d) = 0, \alpha_i(d) = \langle \delta_{i,0} \delta + 2\Lambda_i - \Lambda_{i-1} - \Lambda_{i+1}, d \rangle = \delta_{i,0}$ に注意。)

又(i)より、特に c は $c = id$ と作用する。従ってこれは レベル 1 の表現である。更に e_i, f_i, h_i の Young 図形 Y への作用は整係数であることも明らかである。



4.2.7 4.2.4 が確かに $sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ の表現を与える事の証明。

原理的には Chevalley 生成元に対する基本関係式を確かめれば良い。ここでは例として $[e_i, f_i] = h_i$ を確認してみよう。それは次のように場合わけをして考えれば示すことができる。

一般の Young 図形を

4.2.8 注意。(i) これだけでは、どうしてこの様な表現を思い付くのかという疑問が出ることだろう。これについて少し説明する。この表現は実は KP 方程式系 (soliton) の佐藤理論において役立ったものである。そこでは Young 図形の代わりに Maya 図形が用いられる事が多いが、図 4.2 の様にそれらは ("ほぼ(後述)") 同じ対象物である。Maya 図形の data は 0 と 1 の並びと思え、それは無限次元の外積代数の基底を具体的に書いたものと見なせる。そこに無限次元の Lie 環が作用しているわけである。実はこれは以下に定める無限次元 Clifford 代数の Spin 表現の空間 (= spin module) (の、やはり後述の "charge 0" の部分 — だから \mathbb{F}_0 と添字 0 をつけている) に他ならない。

対称内積付 vector space $(V, \{, \})$ を

$$25) \quad V := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z} + 1/2} (\mathbb{C} \psi(j) \oplus \mathbb{C} \psi^*(j)),$$

$$\{\psi(j), \psi^*(k)\} := \delta_{j+k, 0}, \quad \{\psi(j), \psi(k)\} = 0 = \{\psi^*(j), \psi^*(k)\}$$

で定め、その Clifford 代数を

$$26) \quad C(V) := T(V) / \langle a \otimes b + b \otimes a - \{a, b\} \rangle$$

とする。また V の部分空間 V_{\pm} を

$$27) \quad V_{\pm} := \bigoplus_{\pm j > 0} (\mathbb{C} \psi(j) \oplus \mathbb{C} \psi^*(j))$$

で定める (このとき $\{V_{\pm}, V_{\pm}\} = 0, V = V_{+} \oplus V_{-}$)。すると所謂 $C(V)$

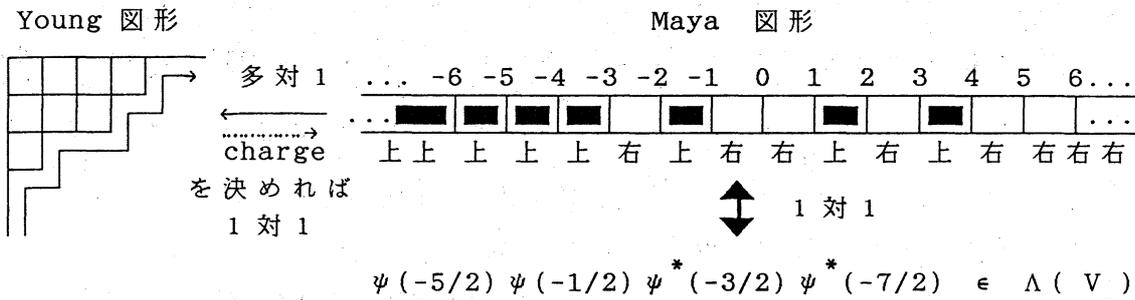
の Spin module と呼ばれるものは、quotient $C(V)$ -module $C(V) / C(V) V_{+}$ のことであり、それは下の対応 28) で $\Lambda(V_{-})$ と同型である。

$$28) \quad \begin{array}{ccc} C(V) / C(V) V_{+} & \xlongequal{\quad} & \Lambda(V_{-}) \\ \sqcup & & \sqcup \\ 1 + C(V) V_{+} & \longleftrightarrow & 1 \end{array}$$

(但し対応は left $\Lambda(V_{-})$ - module map として拡張する)。

[図 4 . 2]

Young 図形 と Maya 図形、及び $\Lambda(V_-)$ の元の対応。
 十分左は黒、十分右は白であるような白と黒の 1 列の
 並び (番号まで指定したもの) を Maya 図形と言う。
 それは Young 図形 あるいは $\Lambda(V_-)$ の元 と対応する。



$\Lambda(V_-)$ の部分空間

29) $\text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \psi(i_1)\psi(i_2)\dots\psi(i_N)\psi^*(j_1)\psi^*(j_2)\dots\psi^*(j_N) \}$

(ψ の数と ψ^* の数との差 — charge — が 0 である元 が張る空間) を charge 0 sector と呼ぶ。
 $\Lambda(V_-)$ の各基底 $\psi(i_1)\psi(i_2)\dots\psi^*(j_1)\psi^*(j_2)\dots$ は、図 4 . 2 のようにして Maya 図形と 1 対 1 に対応し、従って Young 図形とも対応するから、 $\Lambda(V_-)$ は Young 図形全体を基とする空間とも "ほぼ" 思える。但し先程から "ほぼ" と言っているのは、Maya 図形に Young 図形を対応させるところで多対 1 になっていてそこで不定性が生ずる事を指している : Young 図形から白黒の列は一意に決まるが、その列に図 4 . 2 の様な番号をどう付けるかには平行移動だけの任意性がある。図 4 . 2 では 有限個だけ 白黒を入れ換えれば

30) $\dots -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 \dots$
 $\dots \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \square \square \square \square \square \dots$

のように白黒の罫目が 0 の位置になる様にしてあり、それが先に述べた

charge 0 ということである (尚 30) は $1 \in \Lambda(V_-)$ に対応する)。charge 0 の Maya 図形に対応する $\Lambda(V_-)$ の元が張る空間が charge 0 sector というわけである。charge 0 の Maya 図形との間に限れば Young 図形と Maya 図形とが 1 対 1 に対応するから、結局 (charge 0 sector) = \mathbb{F}_0 である。

この空間 $\Lambda(V_-)$ に affine Lie 環がどう働くか。まず $gl(\infty, \mathbb{C})$ は

$$31) \quad gl(\infty, \mathbb{C}) \ni e_{ij} \longmapsto \psi(i)\psi^*(j) \in \text{End}(\Lambda(V_-))$$

(e_{ij} は無限サイズの行列単位) で作用し、更に normal order product を

$$32) \quad : \psi(i)\psi^*(j) : := \begin{cases} \psi(i)\psi^*(j) & (0 < j \text{ または } i < 0) \\ -\psi^*(j)\psi(i) & (j < 0 < i) \end{cases}$$

で定めれば、 $gl(n, \mathbb{C})^\wedge$ の元が、無限和

$$33) \quad E_{ij}(m) \longmapsto \sum_{k \in 1/2 + n\mathbb{Z}} \psi(i+k)\psi^*(-j-k+mn) \in \text{End}(\Lambda(V_-))$$

により作用出来る。これらは又 charge 0 sector 29) を保つ。そこに表現を制限して出来るのが 4.2.4 の $sl(n, \mathbb{C})^\wedge$ -module \mathbb{F}_0 である。従って 4.2.4 の表現も実は $gl(\infty, \mathbb{C})$ や $gl(n, \mathbb{C})^\wedge$ に迄拡張できることになる。

これは又 Frenkel - Kac が構成した (Abelian current algebra に関する) Vertex operator による表現とも自然に同型である (Fermion - Boson 対応)。尚 Fock 表現と言う名前の由来もその様な場の理論の方からきている。以上については、例えば文献 [9-12] を参照せよ。

(ii) Hermite 内積 4.2.3,5) の $sl(n, \mathbb{C})^\wedge$ -不変性。これも (i) の視点から見た方が見通しが良いが、次が成り立つことは 4.2.7 の様な計算によっても容易に確かめられる。

$$34) \quad \begin{aligned} (e_i Y, Y') &= (Y, f_i Y') : & i = 0, \dots, n-1 \text{ に対して} \\ (h Y, Y') &= (Y, h Y') : & \text{任意の } h \in \mathfrak{h}^\wedge \text{ に対して} \\ & & (\text{任意の } Y, Y' \in \mathbb{F}_0 \text{ に対して}) \end{aligned}$$

内積 $(\ , \)$ は正值非退化だから、これよりこの表現の完全可約性が言える。

4.2.9 事実。この表現は $\widehat{gl(n, \mathbb{C})}$ に拡張できる (4.2.8(i) で述べた通り ; そこで述べたように $gl(\infty, \mathbb{C})$ にまで拡張されるが、そのことは以下では用いない)。完全可約性 4.2.8(ii) より、

$$35) \quad G_0 := (v_0 := \phi \text{ を含む } \widehat{gl(n, \mathbb{C})} \text{ - 既約部分加群 }) \subset F_0$$

が一意に存在するが、 $\widehat{gl(n, \mathbb{C})}$ の分解 4.1.2, 3) に対応して、

$$36) \quad G_0 = L(\Lambda_0) \otimes S : (\widehat{sl(n, \mathbb{C})} + H) \text{ - 加群として}$$

但し $S = \mathbb{C}[x_n, x_{2n}, \dots]$ は、Heisenberg リー環 H の 4.1.2(2) で定めた既約表現の空間

となる。

この分解において、任意の $\mu \in \widehat{h}^*$ に対し、

$$37) \quad (F_0)_\mu \supset (L(\Lambda_0) \otimes S)_\mu = \sum_{\nu}^{\oplus} L(\Lambda_0)_{\mu-\nu} \otimes S_\nu \\ = \sum_{k \geq 0}^{\oplus} L(\Lambda_0)_{\mu+k\delta} \otimes S_{-k\delta}$$

であるから、

$$38) \quad \dim S_{-k\delta} = p(k) : \text{分割数 (4.1.14)}$$

に注意すれば、結局次がわかる。

4.2.10 系 (4.1.9 の。) weight space の次元の間に、次の関係式がある。

$$39) \quad \dim (F_0)_\mu \geq \sum_{k=0}^{\infty} \dim L(\Lambda_0)_{\mu+k\delta} \times p(k)$$

Section 5. path basis

1次元状態和 3.3.2,2) を求めるため、既に予告した通り、path と $L(\Lambda_0)$ の基底との間に 1対1対応を与える事がこの節の目標である。

5. 1. Young 図形に path を対応させること、及びその逆。

$n \in \mathbb{Z}_{>1}$ を固定する ($sl(n, \mathbb{C})$ の n)。Young 図形の全体を

$$1) \quad \underline{Y} := \{ \text{Young 図形} \}$$

と書く。また $\mathbb{P}(\Lambda_0) = \{ \Lambda_0\text{-paths} \}$ と書いていた (3.2.6)。

5.1.1 定義 (π)。全射 $\pi : \underline{Y} \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda_0)$ を、以下に定義する。

まず、 \underline{Y} の元 $Y = [f_1, \dots, f_s]$ に対して、その 転置表示

$$2) \quad Y = {}^t [g_1, \dots, g_r] \quad (g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_r > 0)$$

を、図形表示を用いて次のように定める：

(例) $Y = [4, 3, 1]$ の時、

$$[4, 3, 1] \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array} \leftrightarrow {}^t [3, 2, 2, 1]$$

$$\text{即ち、} \quad [4, 3, 1] = {}^t [3, 2, 2, 1]。 \quad \blacksquare$$

このとき、 $Y = {}^t [g_1, \dots, g_r] \in \underline{Y}$ に対して、

$$4) \quad \pi(Y) := (\overline{-g_1}, \overline{-g_2+1}, \overline{-g_3+2}, \dots, \overline{-g_r+r}, r+1, r+2, \dots)$$

$$\text{但し } \overline{g} := g \bmod n, \quad 0 \leq \overline{g} < n$$

と定める。列 $\pi(Y)$ は明らかに path の条件 3.3.2 を満たすから、 π は \underline{Y} から $\mathbb{P}(\Lambda_0)$ への写像である。 π が全射であることも見易い。 \blacksquare

- 10) $\phi, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \dots$

$$\in \pi^{-1} (\eta_0 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)) .$$

これらは全て、縦方向に 1/2 倍すれば、 \underline{Y} の元と 1 : 1 に対応する。

- 11) $\phi, \square, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \dots$

(2) 。やはり $n = 2$ とする。highest な図形の例を挙げれば

- 12) $\phi, \square, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \dots$

一方、highest でない図形の例を挙げれば

- 13) $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \dots$

などである。 ■

5.1.5 π の逆像の不定性。

我々は π の "逆" を用いて path と $L(\Lambda_0)$ の基底とを対応させたいのだが、 π は上の例のように単射でない。ここで逆像の不定性についてまとめておこう。

(イ) まず、基底状態の path の逆像 (= {自明な持ち上げ}) については

14) $Y = {}^t [g_1, \dots, g_r]$ が自明な持ち上げ
 $\leftrightarrow g_j = 0 \pmod n$ (全ての j に対して)

であるから、列 ${}^t [g_1/n, \dots, g_r/n]$ はまた Young 図形を定める。更にこれが次の全単射を定めることも容易に判る (5.1.4 例 2 (1)) :

$$\begin{array}{ccc}
 15) & \{ \text{自明な持ち上げ} \} & \xleftrightarrow{\text{全単射}} & Y \\
 & \sqcup & & \sqcup \\
 & t[g_1, \dots, g_r] & \leftrightarrow & t[g_1/n, \dots, g_r/n]
 \end{array}$$

(ロ) 次に、 π を highest な Young 図形達 \underline{Y}_0 に制限する。すると

$$16) \quad \underline{Y}_0 \xleftrightarrow{\text{全単射}} P(\Lambda_0).$$

一般に次が成り立つことが、図形表示を用いて考えると判る (5.1.6、例 3) :

(ハ) 補題。写像 $\underline{Y} \rightarrow \underline{Y}_0 \times \underline{Y}$

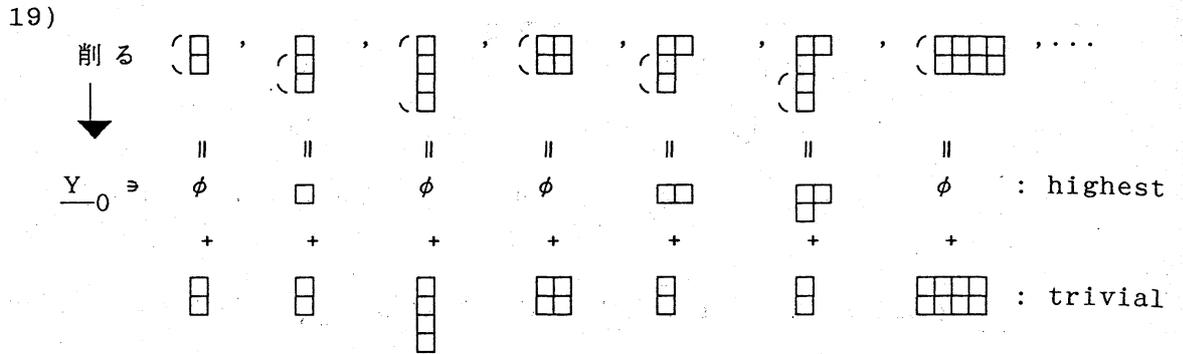
$$17) \quad t[g_1, \dots, g_r] \rightarrow \left(t[l_1, \dots, l_r], t[k_1, \dots, k_r] \right)$$

を、 l_j, k_j を次式で帰納的に定めることにより定義する :

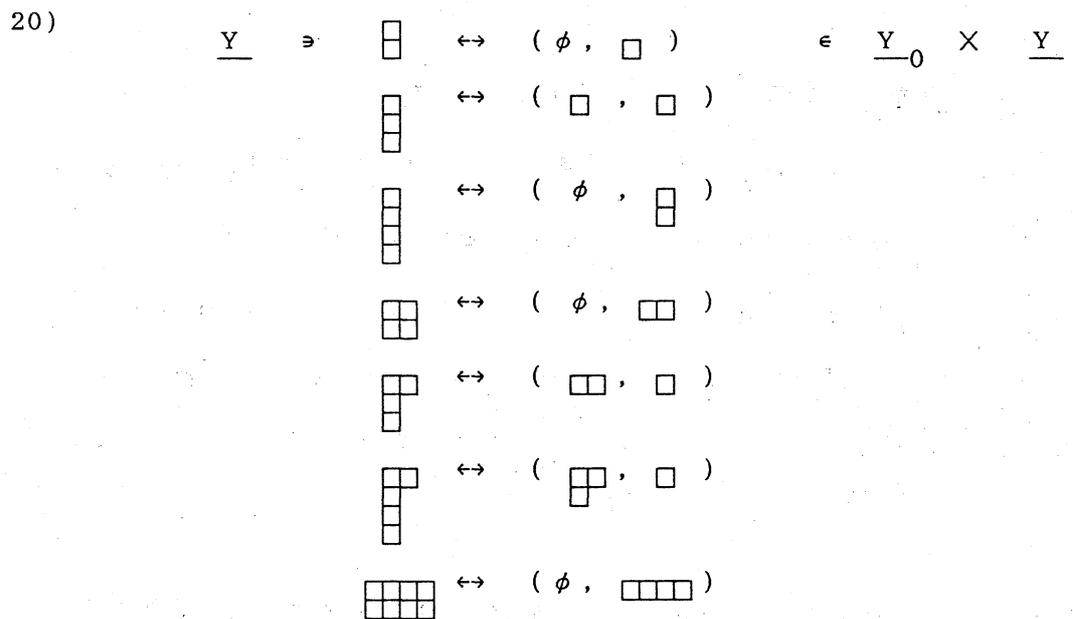
$$18) \quad \begin{cases} g_r = nk_r + l_r & (0 \leq l_r < n, k_r \geq 0); \\ g_j = nk_j + l_j & (l_{j-1} \leq l_j < l_{j-1} + n, k_j \geq 0). \end{cases}$$

すると、この対応 $\underline{Y} \rightarrow \underline{Y}_0 \times \underline{Y}$ は全単射である。

5.1.6. 例 3。例 2 の、highest でない図形の例を考える。それらから、 \square を単位の大きさとする Young 図形を削り、highest な Young 図形を一意的に得ることが出来る。(下図で、+ は下から付け加えることを表す)



例 1 (1) と同じ様に、削った Young 図形達 (上図最下段) を縦方向に 1 / 2 倍すると、結局下のような対応が得られる。



一般の n でも、これ (を、さらに highest な図形 Y にも $Y \leftrightarrow (Y, \phi)$ で拡張したもの) が 補題 (ハ) の全単射 $\underline{Y} \leftrightarrow \underline{Y}_0 \times \underline{Y}$ に他ならない。 ■

5.2. lift の weight

ここでは path η の lift が、Fock 表現の空間 F_0 の元として weight が幾つであるか調べる。

5.2.1 言葉。(highest lift) path $\eta \in P(\Lambda_0)$ に対し、5.1.5(ロ) によって、その lift であって且つ highest な Young 図形がただ一つ存在する。それを η の highest lift と呼び、 Y_η で表すことにする。 ■

5.2.2 補題。 $\eta \in P(\Lambda_0)$ に対し、その highest lift $Y_\eta \in \underline{Y}_0 \subset F_0$ のウェイト $wt(Y_\eta) \in \mathfrak{h}^*$ は次で与えられる。

$$1) \quad wt(Y_\eta) = \Lambda_0 + s_0(\eta) - \omega(\eta)\delta$$

ここで $s_0(\eta) \in \mathfrak{h} = \mathbb{Z}\varepsilon_0 + \dots + \mathbb{Z}\varepsilon_{n-1}$ 及び $\omega(\eta) \in \mathbb{N}$ は、それぞれ 3.3.2., 3.2.6 で定義したものの。

証明。 $wt(Y)$ の定義より、 $Y_\eta = {}^t [g_1, \dots, g_s]$ とすれば

$$2) \quad wt(Y_\eta) = \Lambda_0 - \sum_{i=0}^{n-1} n_i \alpha_i$$

$$= \Lambda_0 - \sum_{j=1}^s \sum_{\mu=j-g_j}^{j-1} \alpha_\mu$$

である。まず $\text{mod } \delta$ で考えると、 $\alpha_\mu = \varepsilon_{\mu-1} - \varepsilon_\mu \text{ mod } \delta$ であるから

$$3) \quad \begin{aligned} wt(Y_\eta) \text{ mod } \delta &= \Lambda_0 - \sum_{j=1}^s \sum_{\mu=j-g_j}^{j-1} (\varepsilon_{\mu-1} - \varepsilon_\mu) \\ &= \Lambda_0 - \sum_{j=1}^s (\varepsilon_{j-g_j-1} - \varepsilon_{j-1}) \end{aligned}$$

ここで $Y_\eta \in \pi^{-1}(\eta)$ より $\overline{j-g_{j+1}} = \eta(j)$ 、従って

4)
$$= \Lambda_0 + (\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{s-1}) - (\varepsilon_{\eta(0)} + \dots + \varepsilon_{\eta(s-1)})$$

これは $s_0(\eta)$ の定義より、

5)
$$= \Lambda_0 + s_0(\eta)$$

に等しい。これで $\text{mod } \delta$ では補題 2 が正しいことが分かった。

δ の係数を見るには、 $(\delta \text{ の係数}) = (\alpha_0 \text{ の係数})$ (h^* の基底を $\Lambda_0, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ と取ったときの) に注意する。すると示すべきことは

6)
$$\sum_{j=0}^{s-1} (j+1) H(\eta(j), \eta(j+1))$$

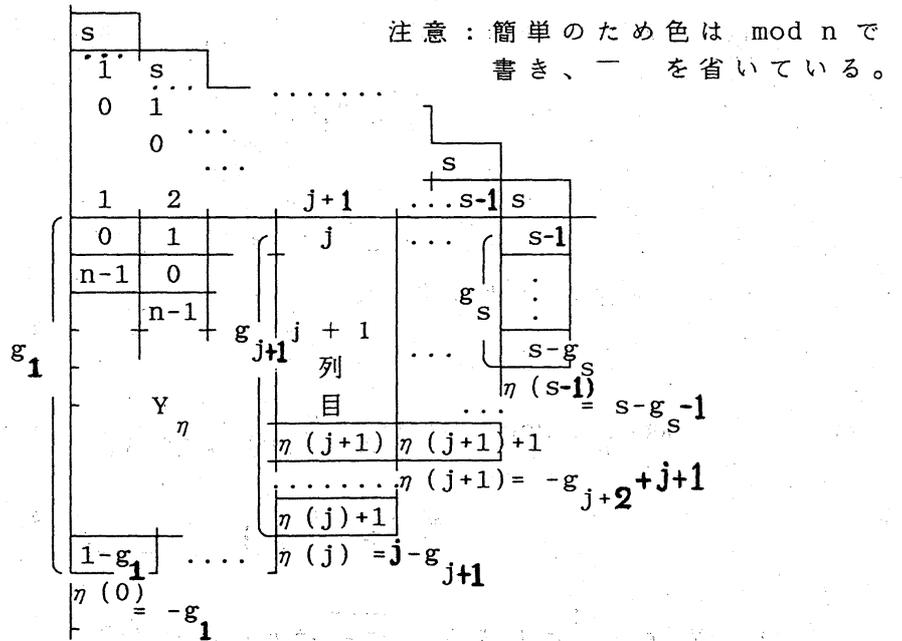
$$= \#\{0\text{'s in } Y_\eta\} + \sum_{j=1}^s j H(\overline{j-1}, \overline{j})$$

$$= \text{図 5.2 の図形の中の色0の数}$$

である。ここで $H(\mu, \nu)$ の定義式 (3.2.6, 3)

7) $\mu \geq \nu$ の時に限り $H(\mu, \nu) = 1$, 他は $H(\mu, \nu) = 0$ を使った。

[図 5.2]



[5.2/ lift の weight]

この等式 6) を示すには、各 j 毎の summand で考えれば、 $j = 0, \dots, s-1$ に対して

(図 5.2 の $j+1$ 列目の一部)

$$8) \quad H(\eta(j), \eta(j+1)) = \begin{cases} 1 & : \text{この中に色 0 が} \\ & \text{現れるとき} \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

を言えば十分である。ここで Y_η が highest であることにより、上の $j+1$ 列目の nodes に現れた、 $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ に値を取る列

$$9) \quad \overline{\eta(j)+1}, \overline{\eta(j)+2}, \dots, \overline{\eta(j+1)-1}, \overline{\eta(j+1)} = \eta(j+1)$$

は長さ高々 n である (特に 0 は高々 1 度しか現れない)。従って、

$$10) \quad \begin{aligned} \text{この列に 0 が現れる} & \leftrightarrow \eta(j) \geq \eta(j+1) \\ & \leftrightarrow H(\eta(j), \eta(j+1)) = 1 \end{aligned}$$

であるが、これは 8) を意味する。

以上で補題 5.2.2 が示された。



5.2.3 補題。 $Y \in \pi^{-1}(\eta) \subset F_0$ の weight は、補題 5.1.5(ハ)の対応

$$11) \quad \underline{Y} \ni Y \leftrightarrow (\underline{Y}_\eta, Z) \in \underline{Y}_0 \times Y$$

の下に、

$$12) \quad \text{wt}(Y) = \Lambda_0 + s_0(\eta) - \{\omega(\eta) + |Z|\} \delta$$

で与えられる。但し $|Z| \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は Z の node の数。

証明。

13)

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 0 \\ \hline Y & & & 1 \\ \hline & \eta & & \\ \hline & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & 0 \\ \hline 1 & & & \\ \hline 0 & Z & & 1 \\ \hline & & & \\ \hline 1 & 0 & 1 & \\ \hline & & & \\ \hline 0 & & & \\ \hline \end{array} \quad (: n=2 \text{ の } \square ; 1=n-1)$$

と図形表示して考える。すると Fock 表現の定義 4.2.4 の (i) に於て、
14)

$$(Z \text{ の部分からの寄与}) = -|Z| \times \sum_{i=0}^{n-1} \# \left\{ \text{color } i \text{ in } \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \dots \\ \hline n-1 \\ \hline \end{array} \right\} \alpha_i$$

$$= -|Z| (\alpha_0 + \dots + \alpha_{n-1}) = -|Z| \delta.$$

よって補題 5.2.2 とあわせて

$$\begin{aligned} 15) \quad \text{wt}(Y) &= \text{wt}(Y_\eta) - |Z| \delta \\ &= \Lambda_0 + s_0(\eta) - \{ \omega(\eta) + |Z| \} \delta. \end{aligned}$$

■

5.3. path basis の構成と 1 次独立性。

5.3.0. まず 目標 を述べる。

4.2.10 で、weight space の次元の間の関係式

$$1) \quad \dim (F_0)_\mu \geq \sum_{k=0}^{\infty} \dim L(\Lambda_{0, \mu+k\delta}) \times p(k)$$

を示した。一方、補題 5.1.5 (ハ) 及び 補題 5.2.3 より、

$$2) \quad \begin{aligned} \dim (F_0)_\mu &= \# \{ \text{wt}(Y) = \mu \text{ なる Young 図形} \} \quad (\text{定義}) \\ &= \sum_{k \geq 0} \# \{ Y_\eta \in \underline{Y}_0 ; \text{wt}(Y_\eta) = \mu + k\delta \} \\ &\quad \times \# \{ Z \in \underline{Y} ; |Z| = k \} \end{aligned}$$

である。従って

$$3) \quad P(\Lambda_0)_\mu := \{ \eta \in P(\Lambda_0) ; \text{wt}(Y_\eta) = \mu \}$$

とおけば、全ての μ に対して

$$4) \quad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \# P(\Lambda_0)_{\mu+k\delta} \times p(k) & (= \dim (F_0)_\mu) \\ &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \dim L(\Lambda_{0, \mu+k\delta}) \times p(k) \end{aligned}$$

となる。ここで分割数の性質 (定義 (5.1.14)!))

$$5) \quad \# \{ Z \in \underline{Y} ; |Z| = k \} = p(k)$$

を用いた。

この不等式 4) が実は等式 9) であることを示すのが、この節での我々の目標である :

主張 (目標)。 $L(\Lambda_{0, \mu}) \neq \{0\}$ なる全ての μ に対して、

$$6) \quad \{ \xi_\eta ; \eta \in P(\Lambda_{0, \mu}) \} \subset (L(\Lambda_{0, \mu}))^*$$

$$7) \quad \{ v_\eta ; \eta \in P(\Lambda_{0, \mu}) \} \subset L(\Lambda_{0, \mu})$$

なる、1 次独立な vectors が構成できる。

これより

8)
$$\# P(\Lambda_{0\mu}) \leq \dim L(\Lambda_{0\mu})$$

従って 4) と合わせて、

9)
$$\# P(\Lambda_{0\mu}) = \dim L(\Lambda_{0\mu})$$

となり、特に $\{\xi_\eta\}$, $\{v_\eta\}$ は各々の空間の基底である。さらに

10)
$$L(\Lambda_0) \otimes S = F_0$$

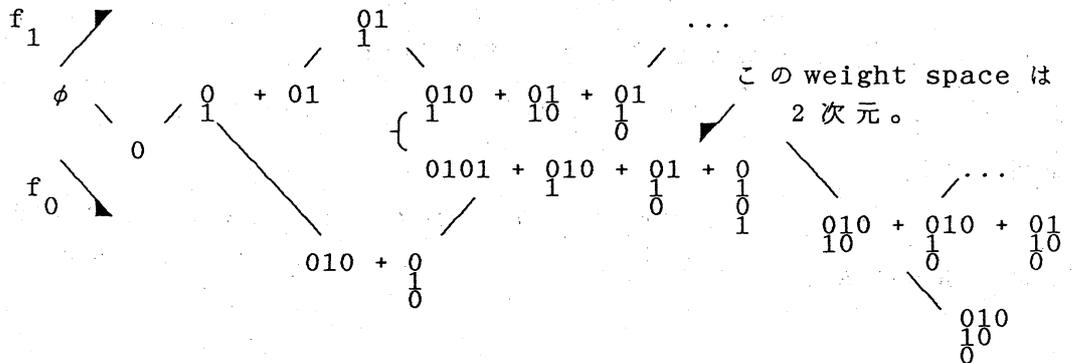
も分かる。



5.3.1 注意 (なぜ dual space を用いるか。) 例えば、 $sl(2, \mathbb{C})^\wedge$ の時、 $\phi \in F_0$ の軌道として得られる $L(\Lambda_0) \subset F_0$ の元を順に書き下して見ると次の図 5.3.1 の様になる (図 4.1 も参照)。

[図 5.3.1]

ϕ の $sl(2, \mathbb{C})^\wedge$ - orbit. 簡単の為 $\boxed{01}$ を 01 等書いた。



図から分かるように、path を parametrize する \underline{Y}_0 の元

11)
$$01, 010, \dots$$

の各々は $L(\Lambda_0) \subset F_0$ に属すとは限らない。また highest でない lift が現

れることもある。 $\{ \text{paths} \} = \underline{Y}_0$ であるが、それはそのまま $L(\Lambda_0)$ の元
 と思うことは出来ない (しかし基底を parametrize するには使えると言う
 のが我々の示すべき事柄である)。

■

5.3.2. vectors $\{ \xi_\eta \}, \{ v_\eta \}$ の定義と、それらの 1 次独立性。

5.3.21 定義。任意の path $\eta \in P(\Lambda_0)$ に対して、

(1) $\xi_\eta \in L(\Lambda_0)^*$ を

1) $\xi_\eta(v) := (Y_\eta, v)$ (任意の $v \in L(\Lambda_0)$ に対して)

と定める。ここで (2) でも 4.2. の Fock 表現により $L(\Lambda_0) \hookrightarrow F_0$ と考えており (4.2.9), 従って (1) の
 右辺は F_0 における内積 (4.2.3, 5)。又 Y_η は η の highest lift (5.2.1)。

2) (2) $v_\eta \in L(\Lambda_0)$ を、次の規則により定める。

規則。 まず highest lift Y_η から、(i)(ii) にしたがって nodes
 を 1 つずつ (ϕ になる迄) 取り除く。

3) (i). 取り除いた残りはふたたび highest である。

(ii). (i) を満たす node のうちで、最も右にあるものを取る。

このとき、取り除く nodes の色の列を順に $(a_0, a_1, \dots, a_{|Y|-1})$ として、

4) $v_\eta := f_{a_0} f_{a_1} \dots f_{a_{|Y|-1}} \phi \in L(\Lambda_0) \subset F_0$

とする。

5.3.22 例。(n = 2 の時) 先の注意と同様の略記を用いる。

$Y_\eta = \begin{matrix} 0101 \\ 10 \\ 0 \end{matrix}$ のとき, 上の (i)(ii) に従う取り方は

$$5) \quad Y_\eta = \begin{matrix} 0101 & \xrightarrow{1} & 010 & \xrightarrow{0} & 010 & \xrightarrow{0} & 010 & \xrightarrow{0} & 01 & \xrightarrow{1} & 01 & \xrightarrow{1} & 0 & \xrightarrow{0} & \phi \\ \underset{0}{10} & \text{を} & \underset{0}{10} & & \underset{10}{10} & & \underset{1}{1} & & \underset{1}{1} & & & & & & \end{matrix}$$

取る

であり、 $(a_0, \dots, a_6) = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$. 故に

$$6) \quad v_\eta := f_1 f_0 f_0 f_0 f_1 f_1 f_0 \phi .$$

5.3.23 補題 4。(1次独立性)

- (1) 全ての path η に対して、 $\xi_\eta(v_\eta) > 0$.
- (2) \underline{Y}_0 に、辞書式順序を次のように定める。

$$7) \quad [f_1, \dots, f_r] > [f'_1, \dots, f'_s]$$

: \leftrightarrow ある i があって、

$$f_1 = f'_1, \dots, f_{i-1} = f'_{i-1}, f_i > f'_i .$$

すると、2つの paths η, η' に対し、 $Y_\eta > Y_{\eta'}$ ならば

$$8) \quad \xi_\eta(v_{\eta'}) = 0 .$$

5.3.24 系。これを認めると、内積表

$$9) \quad (\xi_\eta(v_{\eta'}))_{\eta, \eta' \in P(\Lambda_0)}$$

は、7)の順序に関して三角型で、且つ対角成分は正值、従って特に非退化である。故に

$$10) \quad \{ \xi_\eta ; \eta \in P(\Lambda_0)_\mu \} \subset (L(\Lambda_0)_\mu)^*$$

及び

$$11) \quad \{ v_\eta ; \eta \in P(\Lambda_0)_\mu \} \subset L(\Lambda_0)_\mu$$

は、共に1次独立な vectors である。更に先の主張 5.3.0 も正しい。

5.3.25 例。補題 4 の証明に入る前に、その主張 (2) の意味するところを例で確かめてみよう。ここでも $n = 2$ とする。

$$12) \quad Y_\eta = [4, 3] = \begin{array}{c} 0101 \\ 101 \end{array}, \quad Y_{\eta'} = [4, 2, 1] = \begin{array}{c} 0101 \\ 10 \\ 0 \end{array}$$

とすると、 $Y_\eta > Y_{\eta'}$ 。先の例 5.3.22 で見たように、

$$13) \quad v_{\eta'} = f_1 f_0^3 f_1^2 f_0 \phi$$

である。これを用いて計算すると、

$$14) \quad (Y_\eta, v_{\eta'}) = (Y_\eta, f_1 f_0^3 f_1^2 f_0 \phi) \\ = (e_0 e_1^2 e_0^3 e_1 Y_\eta, \phi)$$

であるが、 Y_η からは、 e_1 で 1 を外した後、0 を 3 つ続けて外すことは出来ない。即ち $e_0^3 e_1 Y_\eta = 0$ 。よって $(Y_\eta, v_{\eta'}) = 0$ である。

一般の場合の証明も、これと同じ様に Young 図形を睨みながらやることになる。

■

5.3.3. 補題 4 (5.3.23) の証明。

(i) は作り方から明らかである。(node を取る操作の際に現れる係数は 0 か 1 であることに注意せよ)。

(ii): node の数についての帰納法で示す。 $Y \in \underline{Y}$ (帰納法を行う便宜上、highest と仮定しない)、 $Z \in \underline{Y}_0$ 、 $Y > Z$ とせよ。 Y は dual space の元、 Z は $L(\Lambda_0)$ の元と思っている。

Z から規則 5.3.21(i)(ii) に従って nodes を外すとき、丁度 r 回同じ色の node が取れたとせよ。このとき Z は下の図 5.3.3 の形である。

[5.3 / path basisの構成]

$$1) \quad Y = [f_1, f_2, \dots], \quad Y' = [f'_1, f'_2, \dots],$$

$$2) \quad Z = [z_1, z_2, \dots], \quad Z' = [z'_1, z'_2, \dots]$$

とおく。仮定より

$$3) \quad f'_k = f_k \quad \text{又は} \quad f'_k = f_k - 1 \quad (\text{全ての } k \text{ に対して})$$

$$4) \quad f'_1 = z_1, \dots, f'_{i-1} = z_{i-1}, f'_i > z_i \quad (\text{ある } i \text{ に対して})$$

である。j を図の様に定めた番号とし、

$$5) \quad (\text{場合 1}) \quad j \leq i \quad (\text{場合 2}) \quad j > i$$

の 2 つに分けて考える。

(場合 1) $j \leq i$ のとき

この場合 $f'_1 = z_1, \dots, f'_j = z_j$ であり、これと Z' の作り方から $f'_k \geq z'_k$ ($1 \leq k \leq j$) である。 $k = 1, \dots, j$ のどこかで $f'_k > z'_k$ であれば、それは $Y' > Z'$ ということだから問題はない。一方

$$6) \quad f'_1 = z'_1, \dots, f'_j = z'_j$$

だったとすると、これは

$$7) \quad j \text{ 行目以上では } Y' \text{ と } Z' \text{ は一致}$$

$$8) \quad j \text{ 行目より下では } Y \text{ と } Y', Z \text{ と } Z' \text{ とは一致}$$

を意味する。よって、仮定 $Y > Z$ より、 $Y' > Z'$ は直ちに従う。■

(場合 2) $j > i$ のとき

まず $f'_i > z_i + 1$ ならば、 Z の形 (図 5.3.3) 及び 4) により $i=1$ しかあり得ない。このとき

$$10) \quad (f'_i \geq) \quad f'_1 \geq f'_i - 1 > z_i \geq z'_1 \quad \text{よって} \quad f'_1 > z'_1$$

であるが、これは $Y' > Z'$ を意味する。

次に $f'_i = z_i + 1$ とする。このとき Y の i 行目右端の node の色は考えている (取り去ろうとしている) 色と異なる。即ち Y からその node を取ることは出来ない。よって

$$f'_i = f_i > z_i。$$

仮定 (4) 及び Z' の作り方) より、任意の $k < i$ について $f'_k \geq z'_k$ であるから、これらを合わせれば $Y' > Z'$ が出る。■

以上で補題 4 の証明が終った。

■

ここで行った議論は、一般化された (level > 1 の表現に対応する) 模型に対する場合には、遙かに複雑な組み合わせ論的考察を要するものとなる (文献 [3]) 。

Section 6. 1点関数の計算

6.1. 1次元状態和の string function による表示

我々の目標は、1次元状態和 (3.3.2, 2)

$$1) \quad F_a(t) = \sum_{\eta \in P(\Lambda_0)} t^{\omega(\eta)} \quad (a \in \mathfrak{g})$$

$$s_0(\eta) = a$$

を求め、1点関数を具体的に表示することである。前節の結果を用いると、結果がすべて表現論的な量で書いてしまう。まずそれを見ることにしよう。

6.1.1 主張 (主結果) \otimes

(1) 1次元状態和 1) は string function (4.1.13) に等しい:

$$2) \quad F_a(t) = b_a^{\Lambda_0}(t) \quad (\text{任意の } a \in \mathfrak{g} \text{ に対し})$$

(2) 原点の自由度 $s(0)$ が $a \in \mathfrak{g}$ を取る確率 $\text{Prob}(s(0) = a)$ は

$$3) \quad \text{Prob}(s(0) = a) = q^{-\langle a, \rho \rangle} b_a^{\Lambda_0}(q^n) / x_{\Lambda_0}^0(q)$$

で与えられる。ここで $x_{\Lambda_0}^0(q)$ は 4.1.13 で定義した character x_{Λ_0} の "principal specialization" とよばれる特殊化で、次で定義されるもの:

$$4) \quad x_{\Lambda_0}^0 = \sum_{\mu \in \Lambda_0} \dim L(\Lambda_0)_\mu e^{\Lambda_0 - \sum_i m_i \alpha_i}$$

と書くとき、

$$5) \quad x_{\Lambda_0}^0(q) := \sum_{\mu \in \Lambda_0} \dim L(\Lambda_0)_\mu q^{\sum_i m_i}$$

\otimes この節 (§6) では、(4.1.13) の String function $b_{\Lambda_0+a}^{\Lambda_0}$ ($a \in \mathfrak{h}^*$) を $b_a^{\Lambda_0}$ と書くことにする。尚 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \text{ の weight lattice}) \subset \mathfrak{h}^*$ であつた (2.2.1.)。

証明。 (1) 5.3.0,3) の記号のもとに、

$$6) \quad F_a(t) = \sum_{\substack{\eta \in P(\Lambda_0) \\ s_0(\eta) = a}} t^{\omega(\eta)} \quad (a \in \mathfrak{g})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \# P(\Lambda_0)_{a-k\delta+\Lambda_0} t^k$$

であるが、5.3.0の主張より (5.3.0,9) または 5.3.23.-24.)、

$$7) \quad \# P(\Lambda_0)_\mu = \dim L(\Lambda_0)_\mu$$

従って、 $b_a^\mu(t)$ の定義 (4.1.13,29)) とあわせて

$$8) \quad F_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim L(\Lambda_0)_{a-k\delta+\Lambda_0} t^k$$

$$= b_a^{\Lambda_0}(t).$$

(2)。正規化因子 (3.3.2,4))

$$9) \quad Z = \sum_a q^{-\langle a, \rho \rangle} F_a(q^n)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \sum_a q^{-\langle a, \rho \rangle} b_a^{\Lambda_0}(q^n)$$

について $Z = x_{\Lambda_0}^0$ を言えば良いが、string function と character の定義 4.1.13 より、

$$10) \quad x_{\Lambda_0}^0 = \sum_a e^a b_a^{\Lambda_0}(e^{-\delta})$$

である。これを特殊化して見れば、その定義 5) より直ちに

$$x_{\Lambda_0}^0 = (9) \text{ 右辺} = Z.$$

6.1.2 注意。上の主張 6.1.1 が、5.3.0の主張 (path basis の構成) とともに、この講義における我々の主結果である。

1次元状態和 $g_a F_a(t) = q^{-\langle a, \rho \rangle / 2} F_a(q^n)$ におけるゲージ因子 g_a

(3.2.50) が旨く働いて Z と $x_{\Lambda_0}^0$ とが同一視できていることに注意しよう。

又、これは Baxter の議論 (§ 3.2) という怪しげな black box を經由して出てきた結果であるが、表現論的な量でこのようなきれいな形にかけてしまったことも注目に値する (偶然にしては出来すぎ!) 。 ■

6. 2. modular 変換性の模型における意義。

6.1.1 で我々は求めていた 1 点関数の表示を得、それが affine Lie 環の character 及び string function で表されることを知った。ここではそれを用いて、1 点関数の " 臨界点 " での挙動を調べてみよう。

一般に affine Lie 環の character に対してはそれを theta 関数で表わす公式が知られている。後で直接用いるわけではないが、その公式からの系も含めて紹介しておく。

6.2.1 公式 (Weyl - Kac の公式とその系 ; $\hat{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の時) 。

(1) Weyl-Kac の指標公式。level l の dominant integral weight Λ に対し、 $\Lambda - l\Lambda_0 = \lambda$ と書けば

$$1) \quad \chi_{\Lambda} = \sum_{w \in S_n} \text{sgn}(w) \Theta_{w(\lambda + \rho), l+n}^Q \Big/ \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{e^{\rho}}$$

但し 2.2.1 の記号の下、 $Q = \{ \sum m_i \varepsilon_i \mid \sum m_i = 0 \} \subset \mathbb{Z}^n$ として

$$2) \quad \Theta_{\lambda, l}^Q := \sum_{\alpha \in lQ + \lambda} e^{\alpha + (|\alpha|^2 / 2l)\delta}$$

また ρ は 3.2.52, 5) のもの、 S_n は対称群、その作用 $w(\lambda + \rho)$ は

$$3) \quad w(\lambda + \rho) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_{w(i)} \quad (\lambda + \rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \text{ の時 })^*$$

そして Δ_+ は positive roots と呼ばれるものの全体

$$4) \quad \Delta_+ := \{ \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} n_i \alpha_i \in \mathfrak{h}^* \mid (g^{\wedge})_{\alpha} \neq 0, n_i \geq 0 (0 \leq i \leq n-1) \}$$

但 $(g^{\wedge})_{\alpha} := \{ x \in g^{\wedge} \mid \text{全ての } h \in \mathfrak{h}^* \text{ に対し } [h, x] = \alpha(h)x \}$ を表す。

(2) 分母公式。

$$5) \quad \sum_{w \in S_n} \text{sgn}(w) \Theta_{\rho^{-1}, n}(w(h)) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha(h)}).$$

(3) principally specialized character の無限積表示。

$$6) \quad \chi_{\Lambda}^0(q) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - q^{(\Lambda, \alpha)}) (1 - q^{(\rho, \alpha)})^{-1} \quad (|q| < 1)$$

ここで (1) は \mathfrak{h}^* 上の不変内積。

(4) character の modular 変換性。 $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ の

\mathfrak{h}^* への作用を、 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}^*$, $\tau \in \mathbb{C}$ ($\text{Im} \tau > 0$), $k \in \mathbb{C}$ として

$$7) \quad A(\mathfrak{h} + \tau d + kc) := \frac{\mathfrak{h}}{\gamma \tau + \delta} + \frac{\alpha \tau + \beta}{\gamma \tau + \delta} d + \frac{\text{Tr}(\mathfrak{h}^2)/2}{\gamma \tau + \delta} c$$

で定義するとき、ある行列 $(M(A)_{\Lambda, \mu})$ があって、

$$8) \quad \chi_{\Lambda}(A(h)) = \sum_{\mu} M(A)_{\Lambda, \mu} \chi_{\mu}(h).$$

ここで μ は level \downarrow の dominant integral weights をわたる (有限個)。

(5) string function の modular 変換性。 string functions の族

$\{ b_a^{\Lambda}(q) \}_{\Lambda, a}$ もまた、適当に q の分数べきを乗ずれば、(4) の如く $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ の作用で閉じた有限次元の空間を張る。

説明。 Λ が dominant integral なので 4.1.12 でも触れた (Kac - Moody Lie 環としての) Weyl 群の $L(\Lambda)$ への作用が存在し、 χ_{Λ} は Weyl 群不変式となるべきことが知られ、それが (1) を示す際に基本的となる。(1) を認めれば、(2) はその $\Lambda=0$ の場合であり、(3) も (2) で文字 h と ρ との役割を入れ換えて (1) の分子に適用すれば良い。(4)(5) も theta 関数の modular 変換性を知っていれば自然である。 ■

これらを用いると、以下の議論は模型を一般化した時同様に行えるが、ここでは我々の模型に即して (typical 且つ exact な) 話をしよう。その場合の公式は次の通り :

6.2.2 事実。 $\varphi(q) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)$ とすると

$$9) \quad x_{b_a}^{\Lambda_0}(q) = q^{|a|^2/2} / \varphi(q)^{n-1},$$

$$10) \quad x_{\Lambda_0}^0(q) = \varphi(q^n) / \varphi(q) = \prod_{k \neq 0 \pmod n} (1 - q^k)^{-1},$$

従って 6.1.1,3) より

$$11) \quad \text{Prob}(s(0) = a) = q^{n|a|^2/2 - \langle a, \rho \rangle} \varphi(q) / \varphi(q^n)^n.$$

■

さて、良く知られているように $\varphi(q) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)$ は本質的に modular 関数である、即ち $q = \exp(2\pi i\tau)$ として

$$12) \quad \eta(\tau) := q^{1/24} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)$$

とおけば、 $\eta(\tau)$ はつぎの変換性を示す :

6.2.3 事実。 $\text{Im} \tau > 0$ なる複素数に対し、

$$13) \quad \eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau)$$

ここで $(-i\tau)^{1/2}$ の分枝は $\text{Re}(-i\tau)^{1/2} > 0$ の様を選ぶ。 ■

この変換性の故に、 $\eta(\tau)$ (Dedekind の eta function と言う) は数論を始めとして多方面で重要となるが、我々の扱っている格子模型においてもまたそうである。それは相転移点における物理量の挙動 (より詳しくは、収束、発散の order) と言う、実験科学的に見ても興味深い量を調べるのに役立つのである。我々の模型においては、1点関数の表示 11)より、 $q = 1$

が相転移点（臨界点）と言える。

6.2.4 主張。 $q = e^{2\pi i\tau} \rightarrow 1-0$ ($\tau \rightarrow +i0$) の時、

$$14) \quad \text{Prob}(\sigma(0) = a) \sim \left(\frac{1-q}{2\pi}\right)^{(n-1)/2} n^{n/2}.$$

証明。 $\text{Prob}(s(0) = a) = q^{n|a|^2/2 - \langle a, \rho \rangle} \varphi(q) / \varphi(q^n)^n$

$$15) \quad = q^{n|a|^2/2 - \langle a, \rho \rangle + (n^2-1)/24} \eta(\tau) / \eta(n\tau)^n.$$

$$= q^{n|a|^2/2 - \langle a, \rho \rangle + (n^2-1)/24}$$

$$\times \{(-i\tau)^{-1/2} \eta(-1/\tau)\} / \{(-in\tau)^{-1/2} \eta(-1/n\tau)\}^n.$$

$$= q^{n|a|^2/2 - \langle a, \rho \rangle + (n^2-1)/24} (-i\tau)^{(n-1)/2} n^{n/2}$$

$$\times \eta(-1/\tau) / \eta(-1/n\tau)^n.$$

$$= q^{n|a|^2/2 - \langle a, \rho \rangle + (n^2-1)/24} (-i\tau)^{(n-1)/2} n^{n/2}$$

$$\times p^{1/24 - n/24n} \varphi(p) / \varphi(p^{1/n})^n, \text{ 但し } p := e^{-2\pi i/\tau}$$

$$\sim (-i\tau)^{(n-1)/2} n^{n/2} \sim \left(\frac{1-q}{2\pi}\right)^{(n-1)/2} n^{n/2} \quad (\tau \rightarrow +i0). \quad \blacksquare$$

6.2.5 注意 この講義を通して $\text{Prob}(s(0)=a)$ のことを1点函数と呼んでいたが、むしろ期待値

$$16) \quad \langle s(0) \rangle := \sum_{a \in \mathcal{A}} \text{Prob}(s(0)=a) a \quad \in \mathcal{A} = \mathcal{Q}^*$$

$$= \varphi(q) / \varphi(q^n)^n \sum_{a \in \mathcal{A}} q^{n|a|^2/2 - \langle a, \rho \rangle} a$$

の方を本来は1点函数と言う（尚一般にn点函数と言うものも定義されるが

それが全て計算できている 2次元格子模型は Ising 模型と呼ばれるものだけである)。これについても、Poissonの和公式を用いた計算により (theta 函数の変換則を出す計算をたどると) やはり $q \rightarrow 1 - 0$ における挙動が次の様にわかる (この場合、極限を持つことがわかる)。

$$17) \quad \lim_{q \rightarrow 1-0} \langle s(0) \rangle = n^{-1/2} \rho. \quad \blacksquare$$

6.2.6 注意。 標語的に言えば、modular 変換 $\tau \rightarrow -1/\tau$ が絶対零度 ($q=0$) と臨界温度 ($q \rightarrow 1$) とを結ぶ働きをしている。問題の極限 $q \rightarrow 1$ は、modular 変換を用いないと極めて分かりにくい形であることに注意せよ。また言うまでもないことであるが、この挙動を調べる問題は 1次元状態和 (6.1,1) の形のままでには更に悲観的なものである。このように保型函数を通じて臨界挙動が具体的に調べられると言う点も、可解格子模型が可解と呼ばれる由縁である。 ■

(以上)

付録。 1989年2月10日の東大金曜談話会の記録

「 可解格子模型とアフィン - リー環 」

神保 道夫氏 (京大理)

A.0. 序。 " 可解格子模型 ↔ アフィン - リー環 "

Baxter 等によって開拓された統計物理の2次元可解格子模型の理論には、色々なところにアフィン - リー環の言葉がちらちら見え隠れする。それを追々述べて行くのであるが、例えば次のような場面に現れる。

1) 模型の構成。

Yang - Baxter 方程式 (YBE と略記。 A.2,1) に示す。) の解ごとに (可解) 格子模型が定義されるので、YBE を解くことと言ってもよい。後で述べる様に " アフィン - リー環の展開環の q -analogue " と呼ばれるものを用いると、その解がある程度系統的に構成出来ることがわかっている。

2) 模型の1点函数。

構成した模型に対し、1点函数と呼ばれる量を Baxter の方法に従って計算してみると、なぜかそれがアフィン - リー環の指標で書けてしまう (特にそれは modular 変換性をもち、模型の相転移点におけるふるまいを知るのに役立つ)。1) の様にして出来る模型は定義の段階で既にアフィン - リー環の概念が組み込まれているとも言えるが、だからといって当たり前と言うわけにも行かない現象で、説明が強く望まれる。

ここではこうした関係とその周辺の話題を紹介したい。まず模型とは何か、その説明から始めよう。

A.1. 模型の説明。

2次元正方格子 \mathbb{Z}^2 を考え、各格子点 $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$ に原子があると考える。原子は全て同一種類で、与えられた離散集合 \mathcal{S} (set of states) の元でその状態が記述されるものとする。各格子点 $i \in \mathbb{Z}^2$ の原子の状態 $\sigma(i) \in \mathcal{S}$ を全て指定する data $\sigma = \{\sigma(i)\} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{S}$ を1つの配置 (configuration) という。各配置の現れ易さ (統計的重み、確率測度) は、与えられた Boltzmann weight と呼ばれる関数

$$1) \quad W : \mathcal{S}^4 \ni (s_1, s_2, s_3, s_4) \longrightarrow W \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_4 & s_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

により定める。即ち W が格子の単位正方形 (face 又は 面 と呼ぶ。図 2.1) における相互作用の強さを表し、それらの面をわたる積で配置 σ の測度

$P(\sigma)$ を決める。例えば原点 $0 = (0, 0)$ の原子の状態が与えられた $s \in \mathcal{S}$ である確率は

$$2) \quad \text{Prob}(\sigma(0) = s) = \sum_{\sigma : \text{配置}} \delta_{\sigma(0), s} P(\sigma) \\ = Z^{-1} \sum_{\sigma} \delta_{\sigma(0), s} \prod_{\text{面}} W \begin{pmatrix} \sigma(i) & \sigma(j) \\ \sigma(l) & \sigma(k) \end{pmatrix}$$

但し Z は全確率 = 1 の条件で決まる規格化の定数

で定義されるものとする (ここで、無限和や無限積は、格子を有限サイズの部分で近似して意味づけする。以上については、§ 2.1 を参照せよ) 。

2) を 1点関数 とも呼び、これを求めることが以下の主題である。しかし以上は勿論一般論で、これだけでは1点関数は求まらない。どのように W を与えるかが問題となる。 W として YBE の解をとってきて定まる模型を 可解格子模型 と呼ぶが (定義)、それらの1点関数が所謂1次元状態和に帰着できるというのが Baxter の主張である (Baxter の CTM 法、§ 3)。これを認めると、YBE を解くこと及び1次元状態和を求めることが問題と

なる。そこで前者について次に述べよう。

A.2. 展開環の q - analog $U_q(\mathfrak{g})$ と YBE

定義 (YBE). V を複素数体 \mathbb{C} 上の有限次元 vector space とする。

$\text{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes V)$ 値関数 $R(u)$ ($u \in \mathbb{C}$) に対する次の方程式のことを Yang - Baxter 方程式 (YBE) という。

$$1) \quad R_{12}(u) R_{23}(u+v) R_{12}(v) = R_{23}(v) R_{12}(u+v) R_{23}(u)$$

ここで $R_{12}(u) := R(u) \otimes I \in \text{End}(V \otimes V \otimes V)$,

$R_{23}(u) := I \otimes R(u) \in \text{End}(V \otimes V \otimes V)$, etc.

であり、従って上の等式は $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$ におけるもの。 ■

既に A.0.1) で触れた様に、三角関数解と呼ばれる YBE の解が「アフィン - リー環 \mathfrak{g} の展開環の q - analogue $U_q(\mathfrak{g})$ 」から得られる。その様子を紹介しよう。まず展開環の q - analogue $U_q(\mathfrak{g})$ とは何か、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の場合で説明する。

定義. $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ とは、次の生成元と基本関係式で定義される \mathbb{C} 上の associative algebra である (q は数または文字)。

$$2) \quad \text{生成元} \quad X^+, X^-, k^{+1}$$

$$3) \quad \text{基本関係式} \quad k^{+1} k^{-1} = 1 = k^{-1} k^{+1},$$

$$k X^+ k^{-1} = q^{+1} X^+, \quad [X^+, X^-] = \frac{k^2 - k^{-2}}{q - q^{-1}} \quad \blacksquare$$

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の元

$$2') \quad X^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

については

$$3') \quad [h, x^{+1}] = 2x^{+1}, \quad [x^+, x^-] = h$$

であり、これを基本関係式とする associative algebra が $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の展開環 $U(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ である。そして 3) の関係式は、 $k = q^{h/2}$ と思えば、 $q \rightarrow 1$ のとき 3') となる。すなわち $q \rightarrow 1$ のとき $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \rightarrow U(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ 。そこで $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ を展開環の q -analogue (類似) と呼ぶのである。

同様にして、一般にも単純リー環またはアフィンリー環 \mathfrak{g} に付随して、生成元と基本関係式により、 $U_q(\mathfrak{g})$ なる algebra が定義される。 q が 1 のべき根でないとき、 $U_q(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ と「良く似ている」ことがわかっていて、例えば、既約 $U(\mathfrak{g})$ -module はやはり既約な $U_q(\mathfrak{g})$ -module に持ち上がる (q が 1 のべき根のときは一般に既約性が崩れる)。

さて、 $U_q(\mathfrak{g})$ は更に Hopf 代数の構造をもつ。そのうちの 余積 (co-multiplication)

$$4) \quad \Delta : U_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$$

は、例えば $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ のときは、生成元に対して

$$5) \quad \Delta(k) := k \otimes k, \quad \Delta(X^{\pm}) := X^{\pm} \otimes k^{-1} + k \otimes X^{\pm}$$

とおいて定まる algebra map である (ここで $q \neq 1$ では $\sigma : x \otimes y \mapsto y \otimes x$ に対し $\sigma \circ \Delta \neq \Delta$ 、即ち $U_q(\mathfrak{g})$ は 余可換でないことに注意)。

これは大雑把に言って表現 ($U_q(\mathfrak{g})$ -module) の Tensor 積が考えられると言うことである。そこで (π_1, V_1) 、 (π_2, V_2) を 2 つの表現

$$6) \quad \pi_i : U_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow \text{End}(V_i)$$

とすれば、Tensor 積 $V_1 \otimes V_2$ 、 $V_2 \otimes V_1$ が考えられるが、 $U_q(\mathfrak{g})$ は余可換でないのでこれらは a priori には同型かどうか分からない。

これに関して、Drinfeld は次のことを示した。

事実 (V.G.Drinfeld ; "Universal R- matrix" R の存在)

$U_q(\mathfrak{g})$ の Tensor積 (の、ある完備化) $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$ の canonical な元 R で、次の性質 (及び、ある種の naturality) を満たすものが存在する : 任意の $a \in U_q(\mathfrak{g})$ に対して、

7) $\sigma \circ \Delta(a) = R \Delta(a) R^{-1}$.

従って、

8) $R_{V_1, V_2} := P \circ (\pi_1 \otimes \pi_2)(R) \in \text{End}(V_1 \otimes V_2)$

但 $P \in \text{End}(V_1 \otimes V_2)$, $P(v_1 \otimes v_2) := v_2 \otimes v_1$

で所謂 " R - matrix " を定めれば、次の可換図式 9) が成り立つ

(i.e., $V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{=} V_2 \otimes V_1$) .

9)

$$\begin{array}{ccc}
 & & R_{V_1, V_2} \\
 & & \downarrow \\
 (\pi_1 \otimes \pi_2) \circ \Delta & \begin{array}{ccc} V_1 \otimes V_2 & \xrightarrow{\quad} & V_2 \otimes V_1 \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ V_1 \otimes V_2 & \xrightarrow{\quad} & V_2 \otimes V_1 \\ & & R_{V_1, V_2} \end{array} & (\pi_2 \otimes \pi_1) \circ \Delta
 \end{array}$$

[Drinfeld, "Quantum Groups", ICM Proceedings, Berkeley, 798-820(1986)]■

これより、一般に3つ以上の表現 V, V', V'', \dots に対しても、それ等の tensor 積は順番に依らず同型である。たとえば、

10) $V \otimes V' \otimes V'' \xrightarrow[=]{1 \otimes R_{V', V''}} V \otimes V'' \otimes V' \xrightarrow[=]{R_{VV''} \otimes 1} V'' \otimes V \otimes V' \xrightarrow[=]{1 \otimes R_{VV'}} V'' \otimes V' \otimes V$.

ところで

11) $V \otimes V' \otimes V'' \xrightarrow[=]{R_{VV'} \otimes 1} V' \otimes V \otimes V'' \xrightarrow[=]{1 \otimes R_{VV''}} V' \otimes V'' \otimes V \xrightarrow[=]{R_{V', V''} \otimes 1} V'' \otimes V' \otimes V$

でもあるから、 R_{VV}, \dots は $\text{End}(V \otimes V' \otimes V'')$ において次の関係式を満たすことになる。

$$\begin{aligned} 12) \quad & (1 \otimes R_{V',V''}) (R_{VV''} \otimes 1) (1 \otimes R_{VV'}) \\ & = (R_{VV'} \otimes 1) (1 \otimes R_{VV''}) (R_{V',V''} \otimes 1) \end{aligned}$$

同様のことを、 \mathfrak{g} (\mathfrak{g} は単純リー環) に対応するアフィン - リー環

$$\begin{aligned} 13) \quad \hat{\mathfrak{g}} & := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}c, \\ [x \otimes t^j, y \otimes t^k] & := [x, y] \otimes t^{j+k} + j \delta_{j+k, 0} (x|y) c \\ & \quad (x, y \in \mathfrak{g}, j, k \in \mathbb{Z}; (|) \text{ は不変内積}) \end{aligned}$$

について考える。即ち $U_q(\mathfrak{g})$ をその展開環の q -analogue として、その表現 V, V', V'', \dots を考える。ただし V, \dots は $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現 $(\pi, V), \dots$ であって、その上の $U_q(\mathfrak{g})$ の作用は、 $q=1$ の場合の次の表現の変形 (q -analogue) を考える：

$$14) \quad \mathfrak{g} \ni x \otimes t^k + ac \mapsto \pi(x) t^k \in \text{End}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$$

(従って、 V と言うよりは、むしろ $V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 上に $U_q(\mathfrak{g})$ が作用するわけである)。すると今度は $R_{V,V'}$ などにも ($U_q(\mathfrak{g})$ の変形の parameter q の他に、文字 t から来るもう1つの) parameter が自然に入って、それらは 12) に対応して次の関係式を満たす。

$$\begin{aligned} 15) \quad & (1 \otimes R_{V',V''}(x)) (R_{VV''}(xy) \otimes 1) (1 \otimes R_{VV'}(y)) \\ & = (R_{VV'}(y) \otimes 1) (1 \otimes R_{VV''}(xy)) (R_{V',V''}(x) \otimes 1) \end{aligned}$$

特に $V = V' = V''$ の時を考えれば、これは $R_{VV}(x)$ が $(x = e^{\text{const}Xu}$ として) YBE 1) を満たすことに他ならない。

こうして得られるのが YBE 1) の 三角函数解 と呼ばれるものである (実は $R_{VV}(x)$ は x の多項式 = u の三角函数; 尚、楕円函数解 と言うものもあり重要だが、これについては [1] [4])。そこで、先に述べたように $R_{VV}(x)$ の行列要素を用いて Boltzmann weight W を定めれば、(定義 (§ A1) によって "可解" な) 格子模型が 1 つ出来ることになる。

ではその模型の 1 点函数はどうなるか。これが次の関心事であるが、その前に $U_q(\mathfrak{g})$ の表現論に q がどう入ってくるか、具体的には上の $R_{VV}(x)$ が q にどう依っているか、少し見ることにする。それは又 1 点函数を求める際に必要な 1 つの step でもある。

A.3. $q \rightarrow 0$ のときの $U_q(\mathfrak{g})$ の表現論。Robinson-Shensted 対応

ここでは $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ について、 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現論で $q \rightarrow 0$ としたときに現れる現象を述べる。このとき $U_q(\mathfrak{g})$ はそのままでは well-defined でなくなるが、この極限は模型の 1 点函数を求める上で重要なものである (§ 3.2.6 の、"Baxter の主張 6 の証明" を見よ)。

$V = \mathbb{C}^n$ を $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の n 次元既約表現とし (vector 表現と言われることが多い; 以下の記法から行けば $V = V_{\square}$ 、 \square は箱 1 つの Young 図形とも書ける)、 v_{μ} ($1 \leq \mu \leq n$) をその標準基 $t_{\mu} (\dots 0, 1, 0 \dots)$ 、 ε_{μ} ($1 \leq \mu \leq n$) を v_{μ} の weight とする。

さて、 $R_{VV}(x)$ を R-matrix (A2,8) とすると、A2,9) より

$$0) \quad [R_{VV}(x), \Delta(U_q(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})))] = 0 \quad \text{in } \text{End}(V \otimes V)$$

である。 $q = 1$ とすると、そのときは良く知られているように

1) $V \otimes V = V_{\square\square} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}$ ($sl(n, \mathbb{C})$ -moduleとしての既約分解)

但し $V_{\square\square}$, $V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}$ はそれぞれ symmetric tensors,

antisymmetric tensors 全体

であるから、 $P_{\square\square}$, $P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}$ をそれぞれ $V_{\square\square}$, $V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}$ への射影子とすると

$$\left(P_{\square\square} + P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} = 1, \quad P_{\square\square}^2 = P_{\square\square}, \quad P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}^2 = P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} \right),$$

2) $R_{VV}(x) = a(x) P_{\square\square} + b(x) P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}$ (a, b は scalar 値函数)

となる (Schur の補題)。つまり、 $R_{VV}(x)$ は各既約成分での値で決まる。
 q が一般でも状況はほぼ同じで、具体的には次の通り。

$$3) \quad R_{VV}(x) = (x - q^2) P_{\square\square}(q) + (1 - xq^2) P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}(q)$$

ただし変形の parameter q の影響を射影子も受けて、例えば $\mu > \nu$ のとき

$$4) \quad P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}(q) (v_{\mu} \otimes v_{\nu}) = \text{scalar} \times (v_{\mu} \otimes v_{\nu} + q v_{\nu} \otimes v_{\mu})$$

である (1.1.7 参照)。 q が generic であれば

$$5) \quad V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}(q) := \text{Image} (P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}(q))$$

は $U_q(sl(n, \mathbb{C}))$ の既約 module であるが ($P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}(q)$ についても同様)、

その元は " q -symmetric tensor" とでも呼ぶべきものである。さて、ここで $q \rightarrow 0$ としてみると

$$6) \quad P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}(q) (v_{\mu} \otimes v_{\nu}) \longrightarrow \begin{cases} v_{\mu} \otimes v_{\nu} & (\mu \geq \nu) \\ 0 & (\mu < \nu) \end{cases}$$

であり、つまり $0 (= q)$ -symmetric tensors は $v_{\mu} \otimes v_{\nu}$ ($\mu \geq \nu$) なる pure tensors から成っている。これは $q \rightarrow 0$ での一般的な現象で、各

[A.3/ q → 0]

pure tensor $v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_N}$ がどの $U_{q \rightarrow 0}(sl(n, \mathbb{C}))$ - submodule に属するかも記述できる。

その命題を述べる前に、Tensor 積の分解について復習しておく（文献 [8] ）。

$$7) \quad V_{\square} \otimes V_{\square} = V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}},$$

$$8) \quad V_{\square} \otimes (V_{\square} \otimes V_{\square}) = V_{\square} \otimes (V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}) \\ = (V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}}) \oplus (V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}})$$

ここで $V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}}$ が重複度 2 で現れるが、それ等は互いの 成長過程

$$9) \quad \square \rightarrow \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}, \quad \square \rightarrow \begin{smallmatrix} \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$$

で区別できる。一般に、q が入った時でも、 $U_q(sl(n, \mathbb{C}))$ - module として

$$10) \quad (V_{\square})^{\otimes N} = \sum_Q V_Q(q),$$

Q は、箱の数 N の Young 図形に成長過程も指定したもの をわたると分解することが言える（ q : not generic では、各 V_Q は必ずしも既約と限らない）。

命題。 $q \rightarrow 0$ の時、

(i) $V_Q(q \rightarrow 0)$ の基底は、全て pure tensor にとれる。

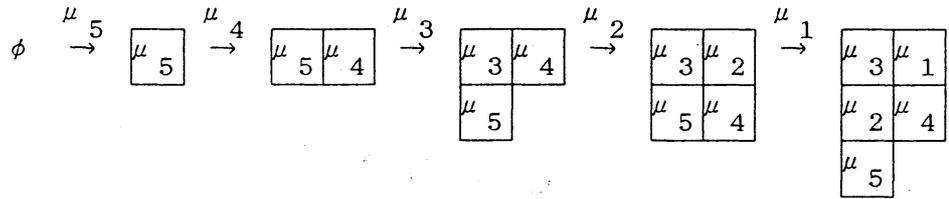
(ii) $v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_N}$ がどの $V_Q(q \rightarrow 0)$ に属するかは、“Robinson

-Shensted 対応”（下に例で示す；尚文献 [1 3] [1 4] ）で記述できる。



例。 $N = 5$ のとき。 $\mu_3 \leq \mu_1 < \mu_2 < \mu_5 \leq \mu_4$ ($1 \leq \mu_i \leq n$)
 として $v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_5}$ がどの V_Q に入るかを問題とする。このとき、
 順列 $(\mu_5, \mu_4, \mu_3, \mu_2, \mu_1)$ に次の様に成長過程を対応させる。

11)



この規則は次の通り。 μ_{i+1} まで済んだとして、 μ_i については

12) ● 1つ前の図形における1行目を見て、 μ_i より大きい数がなければ、単に μ_i を1行目の右端におく。

13) ● 1行目に既に μ_i より大きい数があったとする。このときは μ_i より大きい数のうちで最小のもの ν の場所に μ_i を書き込む。追い出した ν については、それを2行目にある数達と比べて、12)-13)の規則を「1」を「2」と読み替えながら適用する。以下同様。 ■

すると、

14) $v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_5} \in V \xrightarrow{\phi} \square \rightarrow \square\square \rightarrow \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$

この命題は、1点関数 A.1,2) の 1次元状態和表示 A.4,4) を求める際、" path の weight " $\omega(\eta)$ が A.4,8)-10) の $H^{(q)}$ で書けることを示すのに用いられる (文献 [13]) 。

A.4. 1点関数と path basis

再び模型に戻って、問題の1点関数の表示を考えることにしよう。

以下では

$$1) \quad g = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), \quad V = \overbrace{\square \dots \square}^{\ell} \quad (\ell\text{-th symmetric tensor})$$

に対応する YBE の三角関数解 (A.2) で Boltzmann weight W を決めた場合を考えることにする。これは講義で扱った場合を $\ell = 1$ の場合として含み、その一般化になっている。この模型については、状態の集合 \mathcal{S} (A.2) は

$$2) \quad \mathcal{S} = \{ \text{level } \ell \text{ の integral weights for } g \} \\ = \{ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Lambda_i \mid \sum_{i=0}^{n-1} m_i = \ell \} \subset \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z} \Lambda_i$$

ここで $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1}$ は $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の基本 weight (§ 4.1) であり、また配置の無限遠方での状態を規定する 基底状態 (§ 2.3) は、level ℓ の dominant integral weights

$$3) \quad P_\ell := \{ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Lambda_i \mid \sum_{i=0}^{n-1} m_i = \ell, \quad m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}$$

と 1:1 に対応する事がわかる。その中の 1 つ Λ に対応する境界条件を固定する事にしよう。

Baxter の方法 (これは数学的にはまだ正当化されていないが、認めることにする) によれば、YBE の解で W を定めた模型においては、その1点関数が 1次元状態和 で表示できる (§ 3.2.7)。この模型においては、それは次の形となる :

主張。(1点関数の1次元状態和表示)

$$4) \quad \text{Prob}(s(0) = a) = \sum_{\eta \in P(\Lambda)} t^{\omega(\eta)} / Z' \\ \text{始点 } s_0(\eta) = a$$

但し $t := q^n$ 、 Z' は規格化の定数であり、記号は以下の通り :

• $P(\Lambda)$: 簡単のため $\Lambda = \ell \Lambda_0$ の時を述べると、

$$5) \quad P(\ell \Lambda_0) := \{ \eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots) \mid \eta \text{ は条件 6) を満たす} \},$$

ただし

$$6) \quad \begin{cases} \eta_j = \varepsilon_{\mu_1} + \dots + \varepsilon_{\mu_\ell} & (\text{全ての } j = 0, 1, \dots \text{ について}), \\ \eta_j = \ell \varepsilon_j \pmod n & (\text{十分大きい } j \text{ について}). \end{cases}$$

一般にも $P(\Lambda)$ が同様に定義され、その元を path と呼ぶ。

• 上の条件 6) を満たす path $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots)$ について、その 始点 とは、条件

$$7) \quad s_0(\eta) + \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_j = \ell \Lambda_j \pmod n \quad (j \gg 0)$$

で決まる元 $s_0(\eta) \in \mathcal{S}$ のこととする。

• 最後に、path η の degree $\omega(\eta)$ は、次で定義される。

$$8) \quad \omega(\eta) := \sum_{j=1}^{\infty} j \{ H^{(\ell)}(\eta_{j-1}, \eta_j) - H^{(\ell)}(\ell \varepsilon_{j-1}, \ell \varepsilon_j) \},$$

ここで

$$9) \quad H^{(\ell)}(\varepsilon_{\mu_1} + \dots + \varepsilon_{\mu_\ell}, \varepsilon_{\nu_1} + \dots + \varepsilon_{\nu_\ell}) := \min_{\pi \in S_\ell (= \text{対称群})} \sum_{i=1}^{\ell} H(\mu_i, \nu_{\pi(i)}),$$

$$10) \quad H(\mu, \nu) := \begin{cases} 0 & : \mu < \nu \\ 1 & : \mu \geq \nu \end{cases}.$$

ここで A.3 の最後にも触れたように、path の degree $\omega(\eta)$ が具体的に上の式 8)-10) で与えられる事を示すのに、A.3.の命題が用いられる。

さて、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の weight μ に対して

$$11) \quad P(\downarrow \Lambda_0)_\mu := \{ \eta \in P(\downarrow \Lambda_0) \mid s_0(\eta) - \omega(\eta)\delta = \mu \}$$

ここで δ は $sl(n, \mathbb{C})$ の null root (4.1.7, 15))

とおけば、1次元状態和表示(4)は

$$12) \quad \text{Prob}(\sigma(0) = a) = \sum_{k=0}^{\infty} \# P(\Lambda)_{a - k\delta} t^k / Z'$$

とも書ける。

定理 [3] (i) 任意の weight μ について

$$13) \quad \# P(\Lambda)_\mu = \dim L(\Lambda)_\mu,$$

但し $L(\Lambda)_\mu$ は、 Λ を最高 weight とする既約 $sl(n, \mathbb{C})$ - module $L(\Lambda)$ の weight μ の weight space を表す。

(ii) 更に詳しくは、 $P(\Lambda)_\mu$ で添字づけられた基底の組

$$14) \quad \{ \xi_\eta \}_{\eta \in P(\Lambda)_\mu} \subset (L(\Lambda)_\mu)^*$$

$$15) \quad \{ v_\eta \}_{\eta \in P(\Lambda)_\mu} \subset L(\Lambda)_\mu$$

が構成できる (path basis)。 ■

この定理の証明の方針を述べよう。(ii)に言うところの基底を構成すれば良い。

$\downarrow = 1$ の時は、講義でも述べたが、まず $gl(n, \mathbb{C})$ の既約表現は Young 図形全体で添字付けられるような基底を持つ空間

$$16) \quad F_0 := \mathbb{C} - \text{Span of } \{ \xi_Y \} \quad Y : \text{Young 図形}$$

の上で、Fock 表現と呼ばれるものとして非常に具体的に実現できて、 F_0^* も F_0 (の完備化) と同一視できる (§ 4.2)。そして $L(\Lambda_0)$ は、 F_0 において ξ_ϕ から $sl(n, \mathbb{C})$ 上生成される submodule として F_0 に埋めこめる。

この埋めこみを用いると $sl(n, \mathbb{C})$ についての (ii) のような基底が構成できる。但し $L(\Lambda_0) \subsetneq \mathbb{F}_0$ なので勿論自明と言うわけには行かない。例えば 14) においても ξ_Y を全てもってきたのでは駄目で、そのうち埋めこんだ $L(\Lambda_0)$ 上独立なものが path と一対一に対応づけられることを言うことになる。それは最後は Young 図形の組み合わせ論にもちこむ。尚、ついでに言っておくと、この Fock 表現 \mathbb{F}_0 は 既約な $gl(\infty, \mathbb{C})$ -module (の $gl(n, \mathbb{C})$ への制限) であって、soliton に関する佐藤理論において役立ったものでもある ([9-12])。

\downarrow が一般のときも、この \mathbb{F}_0 の Tensor 積 $\mathbb{F}_0^{\otimes \downarrow}$ を用いて考える。 $\mathbb{F}_0^{\otimes \downarrow}$ において、weight $\downarrow \Lambda_0$ の元 $v_\phi \otimes \dots \otimes v_\phi$ から生成される既約 $gl(\infty)$, $gl(n, \mathbb{C})$, $sl(n, \mathbb{C})$ -submodule をそれぞれ $F(\downarrow \Lambda_0)$, $G(\downarrow \Lambda_0)$, $L(\downarrow \Lambda_0)$ とする。すると

$$17) \quad \mathbb{F}_0^{\otimes \downarrow} \supseteq F(\downarrow \Lambda_0) \supseteq G(\downarrow \Lambda_0) \supseteq L(\downarrow \Lambda_0)$$

である。双対空間についていえば、

$$18) \quad \mathbb{F}_0^{*\otimes \downarrow} \longrightarrow F(\downarrow \Lambda_0)^* \longrightarrow G(\downarrow \Lambda_0)^* \longrightarrow L(\downarrow \Lambda_0)^*$$

が全射の列となる。これら全射の核を知ること、いいかえれば $\mathbb{F}_0^{*\otimes \downarrow}$ の元 $\xi_{Y_1} \otimes \dots \otimes \xi_{Y_\downarrow}$ (Y_1, \dots, Y_\downarrow は Young 図形) を $F(\downarrow \Lambda_0)$, $G(\downarrow \Lambda_0)$, $L(\downarrow \Lambda_0)$ 上へと制限していったときに、それらがどのような関係式を持つか調べるのが基本的な問題となる (reduction problem)。これについては、

19) $gl(\infty, \mathbb{C})$ については、古典的な Plücker relation で記述される。

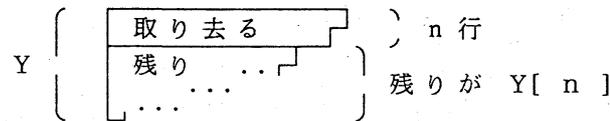
$F(\downarrow \Lambda_0)$ は、図形としての包含関係 $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_\downarrow$ を満たすような Young 図形の列に対応する $\xi_{Y_1} \otimes \dots \otimes \xi_{Y_\downarrow}$ を基底に持つ。

20) $gl(n, \mathbb{C})$ については、佐藤先生の講義ノート (文献 [12]) における

" n - reduced Plücker relation " で記述される。

ここでは更に条件 $Y_{\downarrow} [n] \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_{\downarrow}$ を追加したものが $G(\ell \Lambda_0)$ の基を与える。但し Young 図形 Y に対し、 Y のはじめの n 行を取り去って得られる Young 図形を $Y[n]$ と表した(下図)。

[図 A.4. Young 図形 $Y[n]$]



21) $sl(n, \mathbb{C})$ については、これらの条件の他に、さらに "highest" なる条件が加わる ($\ell = 1$ の時と同様 ; § 5)。

そこでこれら 19)-21) の relations の下、 $L(\ell \Lambda_0)$ 上の線型汎函数として独立なものを path と対応させつつ選び、しかもその対応が weight を保存する様にできる事を見て行くのである(実際は 14), 15) を同時進行で構成する)。やはり最後は組み合わせ論となる。



この定理より、我々の一般化された (ℓ 一般の) 模型についても

$$\begin{aligned} 22) \quad \text{Prob}(\sigma(0) = a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \dim L(\Lambda)_{a - k\delta} q^{kn} / Z' \\ &= \text{Trace}_{\sum_k L(\Lambda)_{a - k\delta}} q^{\rho^{\wedge}} / \text{Trace}_{L(\Lambda)} q^{\rho^{\wedge}} \end{aligned}$$

但し $\rho^{\wedge} \in \mathfrak{h}^{\wedge}$ は $\langle \alpha_i, \rho^{\wedge} \rangle = 1$ ($0 \leq i \leq n-1$) なる元と、1点函数がアフィン - リー環の指標の言葉で書けてしまうことが確かめられたことになる。詳しく言えば、分母は $L(\Lambda)$ の指標の principal specialization、分子は $L(\Lambda)$ の string function (Λ と a とで決まる。) と呼ばれるものである。

[参考文献]

参考文献。

始めに、講義の最終日に示されたものを挙げる。

Yang - Baxter 方程式について：

[1] M.Jimbo, Introduction to the Yang-Baxter equation,

in " Braid Group , Knot Theory and Statistical
Mechanics", M.L.Ge & C.N.Yang, eds., World Scientific (Advanced series in
Mathematical Physics,
vol. 9 (1989)
pp.111.-134.)
及び、その参考文献。

Corner Transfer Matrix の方法について： Baxter の本

[2] R.J.Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics,
Academic Press, London, 1982.

(の、特に § § 1 3 - 1 4) を参照。

ここで紹介した Path basis の一般化については：

[3] E.Date, M.Jimbo, A.Kuniba, T.Miwa and M.Okado , Paths, Maya
diagrams and representations of $sl(r, \mathbb{C})^{\wedge}$, RIMS preprint (1988), to
appear in Adv. Stud. Pure Math. 19 , Kinokuniya - Academic.

を参照。この論文における一般化は、談話会で述べられている様に、模型と
1次元状態和の意味で対応する $sl(r, \mathbb{C})^{\wedge}$ の表現の level を上げる方向であ
る（一般化の方向としては、この他 $sl(n, \mathbb{C})^{\wedge}$ を他の affine Lie 環に置き
換えるなどの方向もある）。

以上が講義の最後において示された文献であったが、尚参考となりそう
な文献を記録者の責任の下に思い付くままに挙げておく。

この講義で扱われた模型とほぼ並行に議論が出来、且つ状態の集合 \mathcal{M}

が有限個のより物理的に現実的なモデルとして、いわゆる Y B E の楕円函数解で定義される模型がある。それは共形場理論との関係でも重要である。これについては例えば、入門的なものだが

[4] 尾角, 神保, 三輪, 2次元の可解な格子模型とモジュラー函数、数学、第40巻、1-18、岩波書店(1988)

これには又豊富な文献表がある。

記録者は統計物理は門外漢であるが、講義の周辺の話題への最近の入門となるであろうものとしてとりあえず次の講義録を挙げる。

[5] John L. Cardy, Conformal Invariance and Statistical Mechanics. (Lectures delivered at Les Houches Summer School on "Fields, Strings and Statistical Mechanics", 1988) preprint 1988 (UC Santa Barbara).

次にこの講義では話されなかったが、先にも触れたように可解格子模型は共形場理論とも関係が深い。これについては例えば、affine Lie 環の対称性を持つ共形場理論の Vertex operators の概念の重要性を明らかにし、その monodromy を具体的に求めた

[6] A.Tsuchiya and Y.Kanie, Vertex operators on conformal field theory on P^1 and monodromy representations of braid groups, Adv. Stud. Pure Math., 16, 297-372

が基本的である。ここで求められた Vertex operator の monodromy は、可解格子模型の Boltzmann weight (Yang - Baxter 方程式の解) から定まる braid 群の表現との同値などを通して、 $U_q(\mathfrak{g})$ の q が 1 のべき根のときの表現論と密接に関係する。これについては、多くの現象が指摘されつつあ

[参考文献]

り最近の共形場理論の中心的話題となっているが、理論的説明が望まれる
 (1.1.5 或は A.4 の最後を参照)。やはり現象としては、 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現論
 と modular 表現論との類似性等も指摘されている：

[2π] G.Lusztig,

Modular representations and quantum groups, Contemporary
 Math.(AMS) 82 (1989), 59- ;

Finite dimensional Hopf algebras arising from quantum groups,
 preprint 1989 .

可解格子模型、共形場理論とも affine Lie 環の表現論は欠かせないも
 のであるが、標準的な教科書は

[7] V.G.Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras, 2nd ed.,
 Cambridge (1985)

である。有限次元のときの一般線型群の表現論なども具体的計算では必要と
 なることが多い。ここでは

[8] 岩堀長慶、対称群と一般線型群の表現論、岩波講座基礎数学

を挙げておく。又 講義においては、具体的な affine Lie 環 の表現として
 Fock 表現が重要な役割を果たしているが、本文でも注意されたようにこの表
 現は soliton 方程式 (KP 方程式系) の佐藤理論において活躍したものであ
 る。これも文献は多いが、

[9] E.Date, M.Jimbo, M.Kashiwara and T.Miwa, Transformation groups
 for soliton equations, in M.Jimbo and T.Miwa eds., "Nonlinear
 integrable Systems — classical theory and quantum theory, World

Scientific (1983) , 39-120 .

[1 0] 柏原、神保、伊達、三輪、ソリトン方程式と Kac - Moody リー環、
数学、第 3 4 卷、1 - 1 6、岩波書店 (1 9 8 2)

[1 1] 佐藤述、野海記、ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体、上
智大学講究録 No.18 (1984)

[1 2] 佐藤幹夫先生講義録、於京都大学 (1 9 8 4 - 8 5)、梅田享記、
数理解析レクチャーノート 5, 京大数理研 (1989)

を挙げる。

最後に、談話会の記録に出てくる $U_{q \rightarrow 0}(g)$ の表現論と Robinson -
Shensted の対応 (A.3) については、

[1 3] E.Date, M.Jimbo and T.Miwa, Representations of
 $U_q(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ at $q = 0$ and the Robinson-Shensted correspondance,
Kyoto preprint, 1989 (RIMS-656)

なお Robinson - Shensted 対応については

[1 4] 堀田良之、「加群十話」、すうがくぶっくす 3、朝倉書店 (1988)

にも載っている。