

## 点推定における漸近有効性とその問題点

大阪大学基礎工学部 M2 高木祥司

平成元年 11 月 16 日

### 1 序文

以前より、推定量の良さの測度として有効性の概念が考えられてきた。そして、この概念において、最尤推定量 (MLE) は最良な推定量であるか、という理論が様々な方法で研究されてきた。そこで、2 節でいくつかのよく知られた概念を述べ、3 節で、Bahadur の意味での漸近有効性の概念を述べ、その特長や問題点を例を用いて考えてみることにする。

### 2 記号と一般的な概念

以下で用いる記号を次のように定義する。

確率変数を  $X_1, X_2, \dots$ , 母数空間  $\Theta$  は開区間,

密度を  $f(x|\theta)$ , 尤度を  $f(s|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$

対数密度を  $l(x|\theta) = \log f(x|\theta)$ , 導関数を  $l'(x|\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} l(x|\theta)$

対数尤度を  $l(s|\theta) = \log f(s|\theta)$ , Fisher 情報量を  $I(\theta)$ , 統計的曲率を  $\gamma(\theta)$  とする。ここで、

$$\mu_{ijk} = E\left(\frac{f'}{f}\right)^i \left(\frac{f''}{f}\right)^j \left(\frac{f'''}{f}\right)^k$$

とすると、 $I(\theta) = \mu_{200}$ ,

$$\gamma(\theta)^2 = \frac{1}{I^2}(\mu_{020} - 2\mu_{210} + \mu_{400}) - 1 - \frac{1}{I^3}(\mu_{110} - \mu_{300})^2$$

となり、この統計的曲率は、分布がどれ程指数族に近いかを表していて、指数族の場合に 0 となり、一般には 0 より大きい。

また推定量  $T_n$  の Fisher 情報量を  $I_T(\theta)$  とする。

Fisher は、情報量の損失で推定量の有効性を測ることを提案した (Fisher[5],[6])。つまり、

$$(2.1) \quad nI(\theta) - I_T(\theta)$$

の値が小さいほど  $T_n$  は良い推定量であるとし、MLE の漸近有効性を予想した。

以後の Rao-Efron の研究により、MLE の最適性に関する次の定理が成立する。(Rao[13], Efron[4])

定理 2.1 ある正則条件の下で

$$(2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{nI(\theta) - I_T(\theta)\} \geq I(\theta)\gamma^2(\theta),$$

$$(2.3) \quad \text{Var}(T_n) \geq \frac{1}{nI} + \frac{1}{n^2I}(\gamma^2 + 4\frac{\Gamma^2}{I}) + 2\frac{\dot{b}}{n^2I} + o(n^{-2}).$$

ここで、 $b(\theta)$  はバイアス、つまり、 $\frac{b(\theta)}{n} = E(T_n - \theta)$  で、 $\dot{b} = \frac{d}{d\theta}b(\theta)$ 、 $\Gamma$  は、 $T_n$  に依存しない数である。

また、 $T_n = \hat{\theta}_n$  (MLE) の時、いずれも等号が成立する。

また、Rao は、適当な  $a, b$  が存在して、

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d}{d\theta} l(s | \theta) - a - b\sqrt{n}(T_n - \theta) \right| \rightarrow_p 0$$

ならば、Rao の意味で一次漸近有効であると定義した。この時、Fisher 情報量と次の様な関係がなりたつ。

定理 2.2 (Rao[12])

Rao の意味で一次漸近有効ならば、 $\frac{I_T}{n} \rightarrow I$

また  $\frac{d}{d\theta} l(s | \theta) - a\sqrt{n} - bn(T_n - \theta) - \lambda n(T_n - \theta)^2$  の分散を最小にする  $\lambda$  を選び、その分散の最小値  $E_2$  の大きさを二次の漸近有効性の基準と考えた。そして、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (nI - I_T) = E_2$$

を予想したが、Efron[4] によって否定された。

### 3 Bahadur による漸近有効性

Bahadur は一致推定量  $T_n$  の良さを  $\theta$  の  $\varepsilon$ -近傍外での集中確率の大きさ、つまり、

$$\alpha(T_n, \theta, \varepsilon) = \Pr(|T_n - \theta| > \varepsilon)$$

で測ることを提案し、この値が小さいほどよい推定量であると、考えた。しかし、この値を計算するのは難しく、正確に取扱うことができない。ましてや、最良なものは、容易には見つけることができない。そこで、この値が、一

般に,  $n \rightarrow \infty$  の時, 指数的に 0 に収束することより,

$$\beta(T_n, \theta, \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \Pr(|T_n - \theta| > \varepsilon)$$

の大きさを, 一つの測度とする (Bahadur[1]). ここで, この量は, exponential rate または, inaccuracy rate と呼ばれ, この値が大きいほど良い推定量であると考えられる. そこで, この量を  $\varepsilon \rightarrow 0$  で評価することにより, 推定量の有効性を定義する. 一般に次の定理が, 成立する.

定理 3.1  $T_n$  を任意の一致推定量とする.

$$(1) (3.1) \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \Pr(|T_n - \theta| > \varepsilon) \leq \inf\{K(\theta', \theta) : |\theta' - \theta| > \varepsilon\}.$$

ここで,  $K(\theta', \theta)$  は, Kullback 情報量を表わす. また, 右辺は, Bahadur bound と呼ばれ,  $B(\theta, \varepsilon)$  で表わす.

(2) 次の正則条件 (RC) の下で, 以下の 2 つの式が, 成立する. (Fu[7])

(i) すべての  $\theta \in \Theta$  に対して,  $K(\theta', \theta)$  は,  $\delta$  近傍  $N_{\theta, \delta}$  内の  $\theta'$  において, 局所 convex 関数である.

(ii) すべての  $\theta \in \Theta$  に対して, 適当な  $N_{\theta, \delta}$  と, 関数  $A(x, \theta)$  が存在して, すべての  $\theta', \theta'' \in N_{\theta, \delta}$  において,  $E(A^2) < \infty$ ,  $|l'(x | \theta'') - l'(x | \theta')| \leq A |\theta'' - \theta'|$

(iii) すべての  $\theta \in \Theta$  に対して, 2 つの定数  $u = u(\theta) > 0, w = w(\theta) > 0$  が存在して,  $0 < \varepsilon < u$  において,  $\Pr\{l'(x | \theta + \varepsilon) > 0\} > 0$  かつ,  $\Pr\{l'(x | \theta - \varepsilon) < 0\} > 0$  であり, しかも,  $\phi(t, \theta, \varepsilon) = E[\exp\{tl'(x | \theta + \varepsilon)\}]$  が, すべての  $(t, \varepsilon) \in (-u, u) \times (-w, w)$  に関して有限である.

(iv) 偏導関数  $(\frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial}{\partial \theta})\phi(t, \theta, \varepsilon)$  が存在し,  $(t, \varepsilon) \in (-u, u) \times (-w, w)$  に対して, 連続である.

(v) 各  $n$  と  $s$  に対して, MLE  $\hat{\theta}_n$  は,  $l'_n(s | \theta) = 0$  の, 唯一の解である.

$$(3.2) \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n\varepsilon^2} \log \alpha(T_n, \theta, \varepsilon) \leq \frac{I(\theta)}{2},$$

$$(3.3) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n\varepsilon^2} \log \alpha(\hat{\theta}_n, \theta, \varepsilon) = \frac{I(\theta)}{2}.$$

(3.3) の等式を満たす推定量を, Bahadur の意味で, 一次漸近有効な推定量と呼ぶ. したがって, MLE は, Bahadur の意味で, 一次漸近有効となる.

(定理 3.1 の証明の概略)

この定理は、large deviation 理論と関連しており、次の Chernoff の定理 (Chernoff[3], Bahadur[1]) を用いて証明される。

$X_1, X_2, \dots, X_n$  は独立同分布で、 $E(X_i) \leq a$  の時、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \Pr(\bar{X}_n \geq a) = -\log[\inf_{t \geq 0} E(e^{t(X-a)})].$$

方針としては、まず、(v) の解の一意性より、

$$l'(s | \theta') \geq 0 \quad \text{if } \theta' \leq \hat{\theta}_n$$

$$l'(s | \theta') \leq 0 \quad \text{if } \theta' \geq \hat{\theta}_n$$

したがって、

$$\Pr\left(\frac{1}{n} \sum l'(x_i | \theta + \varepsilon) > 0\right) = \Pr(\hat{\theta}_n - \theta > \varepsilon)$$

$$\Pr\left(\frac{1}{n} \sum l'(x_i | \theta - \varepsilon) < 0\right) = \Pr(\hat{\theta}_n - \theta < -\varepsilon)$$

ここで、各  $l'(x_i | \theta + \varepsilon), l'(x_i | \theta - \varepsilon)$  に Chernoff の定理を適用すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \Pr(\hat{\theta}_n - \theta > \varepsilon) = -\log[\inf_{t \geq 0} \phi(t, \theta, \varepsilon)]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \Pr(\hat{\theta}_n - \theta < -\varepsilon) = -\log[\inf_{t \leq 0} \phi(t, \theta, -\varepsilon)]$$

次に、(ii) の条件より剰余項の収束性がいえて、

$$E(l'(x | \theta + \varepsilon)) = -\varepsilon I + o(\varepsilon)$$

また、(iii) より、 $\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \theta, \varepsilon) = 0$  の解  $\tau_\theta(\varepsilon)$  の一意性がいえる。

そして、(iii)(iv) より順序交換と展開を用いて、 $\tau_\theta(\varepsilon) = \varepsilon + o(\varepsilon)$  となる。

最後に、 $\inf_{t \geq 0} \phi(t, \theta, \varepsilon) = \phi(\tau_\theta(\varepsilon), \theta, \varepsilon)$  であることより、 $-\log[\phi(\tau_\theta(\varepsilon), \theta, \varepsilon)]$  を  $\varepsilon^2$  の項まで展開すればよい。  $-\log[\inf_{t \leq 0} \phi(t, \theta, -\varepsilon)]$  についても同様にすればよい。

分布が位置母数に対して対称である場合には、次のような2つの計算上有用な命題が、成立する。

**命題 3.2** (Sievers[14])

標本平均  $\bar{X}_n$ , メディアン  $X_{(\frac{n}{2})}$ , MLE  $\hat{\theta}_n$  の場合には、exponential rate は、次のように計算される。

$$\beta(\hat{\theta}_n, \theta, \varepsilon) = -\log[\inf_{t \geq 0} \phi(t, \theta, \varepsilon)],$$

$$\beta(\bar{X}_n, \theta, \varepsilon) = -\log[\inf_{t \geq 0} E\{e^{t(X-\theta-\varepsilon)}\}],$$

$$\beta(X_{(\frac{1}{2})}, \theta, \varepsilon) = -\frac{1}{2} \log\{4P(1-P)\}.$$

ここで,  $P = \Pr(X > \theta + \varepsilon)$  である.

命題 3.3 (Fu[8])

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\varepsilon^2} \beta(\bar{X}_n, \varepsilon, \theta) = \frac{1}{2\sigma^2},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\varepsilon^2} \beta(X_{(\frac{1}{2})}, \varepsilon, \theta) = 2f(0)^2.$$

ここで,  $\sigma^2$  は, 分布の分散を表す.

したがって, 相対効率, 漸近分散のものと一致する.

また, より一般的に, 次の命題は, exponential rate と漸近分散の密接な関係を示している.

命題 3.4 (Juresčová and Kallenberg[11])

一致推定量  $T_n$  が, ある正則条件の下で,  $\sqrt{n}(T_n - \theta) \rightarrow_L N(0, v(\theta))$  であるなら,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n\varepsilon^2} \log \Pr(|T_n - \theta| > \varepsilon) = \frac{1}{2v(\theta)}$$

が成立する.

Bahadur の意味で一次漸近有効な推定量の中で, 区別をつけるためには, より高次の有効性を考えなければならない. その時, 次の定理が成立する.

定理 3.5 (Fu[9], Fu[10])

(1) 正則条件 (RC) において, (ii) と (iv) を, 次の様にかえると, (3.4) が成立する.

(ii)' すべての  $\theta \in \Theta$  に対して, 適当な  $N_{\theta, \delta}$  と,  $A_4(x, \theta)$  が存在して, すべての  $\theta', \theta'' \in N_{\theta, \delta}$  に対して,  $E(A_4^2) < \infty$ ,  $|l^{(4)}(x | \theta'') - l^{(4)}(x | \theta')| \leq A_4 |\theta'' - \theta'|$

(iv)' 偏導関数  $(\frac{\partial}{\partial t})^4 (\frac{\partial}{\partial \theta})^4 \phi(t, \theta, \varepsilon)$  が,  $(t, \theta) \in (-u, u) \times (-w, w)$  に対して, 連続である.

$$(3.4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^i} \{B(\theta, \varepsilon) - \beta(\hat{\theta}_n, \theta, \varepsilon)\} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 1, 2, 3 \\ \frac{1}{8} I^2 \gamma^2 & \text{if } i = 4 \end{cases}$$

(2) 分布が位置母数に対して対称な場合, 位置不変一致推定量  $T_n$  の中で

$$(3.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^4} \{B(\theta, \varepsilon) - \beta(T_n, \theta, \varepsilon)\} \geq \frac{1}{8} I^2 \gamma^2.$$

$T_n = \hat{\theta}_n$  の時, 等号が成立する.

(3.5) で等号が成立する推定量を, Bahadur の意味で二次漸近有効であるという. したがって, MLE は, 二次漸近有効である.

**注意 3.1** exponential rate による比較での限界とバイアスの調整

$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 1$  となる数列  $C_n$  において, 一般に,  $T_n$  と  $C_n T_n$  は同じ exponential rate をもち, Bahadur の意味では, 推定量の良さを区別することはできない.

**例 3.1** 一様分布  $U(0, \theta)$  において, MLE は,  $X_{(n)}$  で, 不偏推定量は,  $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$  である. この 2 つの推定量において,  $n$  が十分に大きいとき,

$$\alpha(X_n, \theta, \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n$$

$$\alpha\left(\frac{n+1}{n} X_n, \theta, \varepsilon\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n$$

となり, exponential rate は共に,  $\log \frac{\theta}{\theta - \varepsilon}$  となる. これは Bahadur bound と一致している. ただし, 集中度  $\alpha(\cdot, \theta, \varepsilon)$  の値では,  $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$  の方が良い.

一般に, バイアスを調整した MLE を, 最適とみなす. この考え方は, 定理 2.1 での Rao-Efron による平均二乗損失の下での主張と一致する.

**注意 3.2** exponential rate と, 漸近分散との対比

命題 3.3 と命題 3.4 より, この 2 つの量での有効性は, ある場合には全く同じになる. また, 一般には, 前者の方が, 得るのが難しく, 有用性に欠けるように思える. しかし, 正則条件が, 満たされない時には, 次の例の様に, 前者の場合のみ, 推定量の良さを比べる事が出来る.

**例 3.2** (Juresčová and kallenberg[11])

$X_1, X_2, \dots, X_n$  は,  $N(\theta, 1)$  の独立同分布に従っている.

$$Y_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n X_i, \quad Z_n = \sum_{i=2}^n (X_i - Y_n)^2, \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$H_n = \begin{cases} 0 & \text{if } Z_n \leq \chi_{n-2, 1-\frac{1}{n}}^2 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad n = 2, 3, \dots$$

と定義する。ここで、 $\chi_{k, \alpha}^2$  は、自由度  $k$  の  $\chi^2$  分布の  $\alpha$  分位点である。そして、推定量  $T_n$  を、

$$T_n = (1 - H_n)Y_n + H_n X_1 \quad n = 2, 3, \dots$$

と定義すると、

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \rightarrow_L N(0, 1) \quad n \rightarrow \infty$$

となり、 $\bar{X}_n$  と同じ漸近分布を持つことがわかる。しかし、この  $T_n$  において

$$\alpha(T_n, \theta, \varepsilon) = \Pr(H_n = 1, |X_1 - \theta| > \varepsilon) + \Pr(H_n = 0, |Y_n - \theta| > \varepsilon)$$

となり、 $Y_n, Z_n, H_n$  の独立性を考えると、

$$\alpha(T_n, \theta, \varepsilon) = \frac{2}{n}\Phi(-\varepsilon) + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\Phi(-\varepsilon\sqrt{n-1}).$$

ここで、 $\Phi(\cdot)$  は、標準正規分布の分布関数を表す。故に、

$$\alpha(T_n, \theta, \varepsilon) \geq \frac{2}{n}\Phi(-\varepsilon)$$

$$\beta(T_n, \theta, \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \frac{2}{n}\Phi(-\varepsilon) = 0$$

従って、exponential rate は、0 となる。このことより、 $\bar{X}_n$  と  $T_n$  とは、漸近分散では区別できないが、exponential rate では、 $\bar{X}_n$  の方が、優れている事がわかる。

### 注意 3.3 Cauchy 分布の有効推定量

Cauchy 分布の位置母数の推定においては、尤度方程式が多解をもつことより (RC)(v) を満たさず定理 3.1 を適応できないが、この場合にも、(3.3) が成立し、MLE が Bahadur の意味で一次有効であることが示されている。(Bai and Fu[2])

### 注意 3.4 超有効推定量の影響

Bahadur の有効性は、漸近分散の場合と違って、超有効推定量の害を除くことができる。

### 例 3.3 $N(\theta, 1)$ の推定における Hodges の超有効推定量

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} \bar{X}_n & \text{if } |\bar{X}_n| \geq n^{-t} \\ \alpha \bar{X}_n & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると ( $0 < \alpha < 1$ ),

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \rightarrow_L N(0, 1),$$

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \rightarrow_L \begin{cases} N(0, 1) & \text{if } \theta \neq 0 \\ N(0, \alpha^2) & \text{if } \theta = 0 \end{cases}$$

となり,  $\theta = 0$  で超有効点をもつ. しかし, Bahadurの有効性に関しては, すべての  $\theta$  に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n\varepsilon^2} \log \Pr(|\tilde{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = \frac{1}{2}$$

となり, 超有効点をもたない.

## 参考文献

- [1] Bahadur, R. R. (1971) *Some limit theorems in statistics.*, Regional Conference Series in Applied Mathematics, 4. SIAM, Philadelphia.
- [2] Bai, Z. D. and Fu, J. C. (1987) On the maximum-likelihood estimator for the location parameter of a Cauchy distribution. *Canadian J. of Stat.*, 15, 137-146.
- [3] Chernoff, H. (1952) A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. *Ann. Math. Stat.*, 23, 493-507.
- [4] Efron, B. (1975) Defining the curvature of a statistical problem. *Ann. Stat.*, 3, 1189-1242.
- [5] Fisher, R. A. (1922) On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A.*, 222, 309-368.
- [6] Fisher, R. A. (1925) Theory of statistical estimation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 22, 700-725.
- [7] Fu, J. C. (1973) On a theorem of Bahadur on the rate of convergence of point estimators. *Ann. stat.*, 1, 745-749.
- [8] Fu, J. C. (1975) The rate of convergence of consistent point estimators. *Ann. Stat.*, 3, 234-240.

- [9] Fu, J. C. (1982) Large sample point estimation: A large deviation theory approach. *Ann. Stat.*, 10, 762-771.
- [10] Fu, J. C. (1985) On exponential rates of likelihood ratio estimators for location parameters. *Stat. & Prob. Let.*, 3, 101-105.
- [11] Jurečková, J. and Kallenberg, W. C. M. (1987) On local inaccuracy rates and asymptotic variances. *Stat. & Dec.*, 5, 139-158.
- [12] Rao, C. R. (1961) Asymptotic efficiency and limiting information. *Proc. fifth Berk. Sympo.*, 1, 531-545.
- [13] Rao, C. R. (1963) Criteria of estimation in large sample. *Sakhyā*, 25, 189-206.
- [14] Sievers, G. L. (1978) Estimates of location: A large deviation comparison. *Ann. Stat.*, 6, 610-618.