数理解析研究所講究録
第 737 巻 1990 年 121-133

Siegel 保型形式に付随した L 関数の特殊値について

東工大・理　水本信一郎 (Shin-ichiro Mizumoto)

$n, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mathfrak{H}_n$ を Siegel upper half space of degree n,

$M_k^n :=$ { holomorphic scalar-valued modular forms of weight k w.r.t. $Sp(n, \mathbb{Z}) = Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ },

$S_k^n :=$ { cusp forms $\in M_k^n$ } とする。

$f \in S_k^n$ を eigenform (:= non-zero common eigenfunction of the Hecke algebra) とすると，各 prime p に対して

$(\alpha_0(p), \cdots, \alpha_n(p)) \in (\mathbb{C}^\times)^{n+1}$: Satake p-parameters of f

が (Weyl group の action を除いて) きまる。

ここで考える (Langlands の意味の) L 関数 (Borel [7] 参照) は次の二つの type である：

$$L_{\mathrm{spin}}(s, f) := \prod_p \Big\{ (1 - \alpha_0(p)p^{-s}) \prod_{r=1}^{n} \prod_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} (1 - \alpha_0(p)\alpha_{i_1}(p) \cdots \alpha_{i_r}(p) p^{-s}) \Big\}^{-1},$$

$$L_{\underline{\mathrm{St}}}(s, f) := \prod_p \Big\{ (1 - p^{-s}) \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j(p)p^{-s})(1 - \alpha_j(p)^{-1}p^{-s}) \Big\}^{-1}.$$

これらの infinite products は $\{ s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \sigma \}$（$\sigma$：十分大）で広義一様に絶対収束する。それぞれ、$f$ に付随した spinor L-function, standard L-function という。

1. Spinor L-functions（ここでは $n=2$ とする）.

$f \in S_k^2$: eigenform に対して

$$\Lambda_{spin}(s,f) := \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\,\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+2)\,L_{spin}(s,f)$$

とする。但し $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$.

これについて、基本的な性質として次のことが知られている：

◎$_1$ (Andrianov [1])

(i) $\Lambda_{spin}(s,f)$ は全 s 平面に meromorphic に解析接続され、関数等式

$$\Lambda_{spin}(2k-2-s, f) = (-1)^k \Lambda_{spin}(s,f)$$

を満たす。

(ii) $\Lambda_{spin}(s,f)$ は $s = k-2,\ k$ で高々 simple poles をもつ他は holomorphic.

◎$_2$ (Evdokimov [9], Oda [11])

$$\Lambda_{spin}(s,f) : \text{entire} \iff f \notin \text{Maass space}.$$

1.1 $L_{spin}(s,f)$ の（Deligne [8] の意味の）critical point は $s = k-1$（関数等式の中心）である。すなわち次のことが予想されている：

$$L_{spin}(k-1, f) = \Omega \cdot A \quad ,$$

ここで Ω は f の "period", A は algebraic number.

この予想は今のところ解かれていない。(Ω の定義法 etc. については Deligne [8] の他. Oda 氏の一連の研究を参照されたい。)

Remarks. (1) f を holomorphic vector-valued cuspidal eigenform of type $\det^k \otimes \mathrm{sym}^\nu$ $(\nu \geq 0)$ w.r.t. $Sp(2, \mathbb{Z})$ とする。ここで $\mathrm{sym}^\nu : GL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(\nu+1, \mathbb{C})$: ν-th symmetric tensor representation. このとき ($k \geq 2$ ならば)

$$\text{critical points} = \{ m \in \mathbb{Z} \mid k-1 \leq m \leq k-1+\nu \}.$$

(2) $f \in$ Maass space $\xleftarrow[\sigma_k]{\sim} S'_{2k-2}$, $f = \sigma_k(g)$ のとき

$$L_{spin}(k-1, f) = -\frac{1}{2} L'(k-1, g).$$

この右辺についても algebraicity result は今のところ知られていない。

1. 2 Böcherer's conjecture.

$f \in S_k^2$: eigenform, $D \in \mathbb{Z}_{<0}$: fundamental discriminant (i.e. D = discriminant of $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$) とし, $\left(\frac{D}{*}\right)$ を $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ に associate した Dirichlet character とする。

この character による twisted L-function

$$L_{spin}(s, f, (\tfrac{D}{*})) := \prod_p \prod_{i,j\in\{0,1\}} (1-\alpha_0(p)\alpha_1(p)^i\alpha_2(p)^j (\tfrac{D}{p})p^{-s})^{-1}$$

を考える。

f の Fourier 展開を

$$f(Z) = \sum_{T\in \mathbb{A}_2} a(T, f) \exp(2\pi i \ \mathrm{trace}(TZ))$$

とかく。ここで $Z \in \mathfrak{H}_2$,

$$\mathbb{A}_2 := \left\{ T = (t_{ij}) \in M_2(\mathbb{Q}) \;\middle|\; \begin{matrix} {}^tT = T > 0, \\ t_{ii},\ 2t_{ij} \in \mathbb{Z} \ (\forall i,j) \end{matrix} \right\}.$$

$U \in SL(2,\mathbb{Z})$ は $\mathbb{A}_2$ に, $T \longmapsto {}^tUTU$ で act する。

$$w_D := \#\{\text{roots of unity in } \mathbb{Q}(\sqrt{D})\}.$$

<u>Conjecture</u> (Böcherer [5]).

$\exists\, c_f \in \mathbb{C}$ s.t.

$$L_{spin}(k-1, f, (\tfrac{D}{*})) = c_f \cdot |D|^{1-k} \cdot \left(\frac{1}{w_D}\sum_{i=1}^{h} a(T_i, f)\right)^2$$

for each $D<0$: fundamental discriminant.

ここで $T_1, \cdots, T_h$ は a complete system of representatives for $\{T\in \mathbb{A}_2 \mid -\det(2T) = D\} / SL(2,\mathbb{Z})$.

<u>Remark</u> f が Maass space か Eisenstein space にはいっているときは正しい [5]。また, f が Yoshida lift の image にはいっているときも正しい, ということを Böcherer 氏から聞いた。

<u>1.3</u> Residues.

$f \in S_k^2$: eigenform に対し，すでに述べたように

$L_{spin}(s,f)$ が $s=k$ で（simple）pole をもつ

$\Longleftrightarrow$ $f \in$ Maass space $\underset{\sigma_k}{\xleftarrow{\sim}}$ S'_{2k-2} .

もし $f = \sigma_k(g)$, $g \in S'_{2k-2}$: normalized eigenform なら

$$\mathrm{res}_{s=k} L_{spin}(s,f) = \zeta(2) L(k,g)$$
$$= (\text{algebraic number}) \cdot \pi^{k+2} \omega_+(g)$$

となる。ここで $\omega_+(g)$ は g のひとつの period.

（たとえば $\omega_+(g)$ として $\int_0^\infty g(it)\,dt$ がとれる。）

2. Standard L - functions ($\forall n \geq 1$).

$f \in S_k^n$: eigenform に対して

$$\Lambda_{\underline{St}}(s,f) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\varepsilon) \prod_{j=1}^{n} \Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-j) L_{\underline{St}}(s,f)$$

とおく。ここで

$$\varepsilon := \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ even}, \\ 1 & \text{for } n \text{ odd}, \end{cases} \qquad \Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

基本的性質として次が知られている：

$\circledast_1$ (Andrianov - Kalinin [2], Piatetski - Shapiro - Rallis [12], Böcherer [4]) $\Lambda_{\underline{St}}(s,f)$ は全 s 平面に meromorphic に解析接続され，関数等式

$$\Lambda_{\underline{St}}(1-s,f) = \Lambda_{\underline{St}}(s,f)$$

を満たす。

⊘₂ ([13], supplementary to: Weissauer [15], Böcherer [6])

$k \geqq n$ とする。$\Lambda_{\underline{St}}(s,f)$ は $s=0,1$ で高々 simple poles をもつ他は holomorphic, さらに

$$\Lambda_{\underline{St}}(s,f) : \text{entire} \iff f \notin B_k^n(2n).$$

ここで

$$B_k^n(2n) := \left\{ \text{theta series } \vartheta_{S,P} \in M_k^n \;\middle|\; S = {}^tS \in GL(2n,\mathbb{Z}),\right.$$

$S>0$, S の diagonal entries はすべて even;

$P : \mathbb{C}^{(2n,n)} \to \mathbb{C}$: spherical harmonic

$\left. \text{polyn. of weight } k-n \right\}.$

<u>Remark</u>. k が $nk \equiv 0 \pmod 2$ をみたしながら $k \to \infty$ となるとき, ある $c_1, c_2 > 0$ に対して

$$\dim B_k^n(2n) \leqq c_1 k^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad \dim S_k^n \sim c_2 k^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

なので $B_k^n(2n) \cap S_k^n$ は S_k^n の中で "非常に小さい"。

<u>2.1</u> $L_{\underline{St}}(s,f)$ の critical points (の右半分)は

$$\{ m \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqq m \leqq k-n, \quad m \equiv n \pmod 2 \}.$$

(ここで $k>n$ と仮定する。)

<u>Theorem 1</u> [13] (supplementary to : Harris [10], Sturm [14], Böcherer [3]). $f \in S_k^n$ を eigenform, $k>n$ とし, $\mathbb{Q}(f) := \mathbb{Q}$ (eigenvalues of $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$ on f) とする。

ここで $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}} :=$ ring of Hecke operators $/\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}(f)$ は totally real finite ext. of $\mathbb{Q}$ となる。いま $\forall$ Fourier coeff. of $f \in \mathbb{Q}(f)$ と仮定する。$m \in \mathbb{Z}$ を

$$1 \leq m \leq k-n, \quad m \equiv n \pmod 2$$

を満たすようにとる；但し

$$m = 1 \text{ のとき } \quad n \equiv 3 \pmod 4 \text{ または } n = 1$$

とする。このとき

$$L^*_{\underline{St}}(m, f) := \frac{L_{\underline{St}}(m, f)}{\pi^{d(m)}(f, f)} \in \mathbb{Q}(f).$$

ここで $\quad d(m) := m(n+1) + nk - \frac{n(n+1)}{2}$,

$$(f, f) := \int_{Sp(n,\mathbb{Z})\backslash \mathfrak{H}_n} |f(Z)|^2 \det(Y)^{k-n-1} \, dX \, dY \qquad (Z = X + iY).$$

<u>Remark</u>. S^n_k の basis $\{f_j\}$ で，f_j : eigenform かつ $\forall$ Fourier coeff. of $f_j \in \mathbb{Q}(f_j)$ となるものがとれる。

<u>Outline of proof</u>. $r \in \mathbb{Z}_{>0}$: even, $s \in \mathbb{C}$ に対し

$$E^{(n)}_r(Z, s) := \det(\mathrm{Im}(Z))^s \sum_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) : \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)\backslash Sp(n,\mathbb{Z})} \det(CZ+D)^{-r} |\det(CZ+D)|^{-2s}$$

$(Z \in \mathfrak{H}_n)$ は $r + \mathrm{Re}(2s) > n+1$ のとき (Z, s) について広義一様に絶対収束する。さらに s の関数としては，全 s 平面に meromorphic に解析接続され，$s = 0$ で holomorphic である。そこで $E^{(n)}_r(Z) := E^{(n)}_r(Z, 0)$ とする。これは

Z に関して holomorphic とは限らない。

Garrett - Böcherer の積分表示 [3][4] により

$$L_{\underline{St}}(m,f)\cdot f(Z)$$
$$= (\text{rational number})\cdot \pi^{d(m)}\left(f, (\mathbb{D}E^{(2n)}_{m+n})\begin{pmatrix}-\bar{Z} & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}\right)$$

となる。ここで $\mathbb{D}$ は $C^{\omega}(\mathfrak{H}_{2n})$ 上の differential operator で

$$\begin{array}{ccc} M^{2n}_{m+n} & \longrightarrow & S^n_k \otimes S^n_k \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ F & \longmapsto & (\mathbb{D}F)\begin{pmatrix} Z_1 & 0\\ 0 & Z_2\end{pmatrix} \end{array}$$

となるものであり、Fourier coeff. の rationality を保つ。

Th. 1 の仮定のもとでは $E^{(2n)}_{m+n}(Z)$ は holomorphic modular form で rational Fourier coeff. をもつ (Weissauer [15]). このことから Th. 1 が出る。

$\underline{2.2}$ Integrality.

Th. 1 の special values について、もう少しわかる:

$\underline{\text{Theorem 2}}$. $f\in S^n_k$ を Th. 1 の通りとし、さらに (一般性を失うことなく) ある Fourier coeff. $=1$ とする。 $m\in\mathbb{Z}$ を Th. 1 の通りとするとき、

$$L^*_{\underline{St}}(m,f)\in c_k(n)^{-\delta_{m,k-n}}\,\xi^n_k(m)^{-1}N^{-1}_{m,n}\cdot\prod_{i=[\frac{n}{2}]+1}^{n}\mathrm{Den}\left(\frac{B_{2k-2i}}{k-i}\right)^{-1}\mathfrak{a}(f)^{-1}\,\mathbb{Z}(f).$$

Notation の説明.

B_ν : ν-th Bernoulli number, i.e., $B_\nu = -\nu\zeta(1-\nu)$ $(\nu>0)$,

$$N_{m,n} := \prod_{\substack{p:\text{prime} \\ (p-1)|(2m+n) \\ p:\text{odd if } n\not\equiv 0 \pmod 4}} p\cdot\left[m+\frac{n}{2}\right]_p \qquad ([\,\cdot\,]_p := p\text{-part}),$$

$$\xi_k^n(m) := 2^{2+\frac{n(n+1)}{2}-nk-m}\,\pi^{-\frac{n}{2}}\,\Gamma_n\left(k-\frac{n+1}{2}\right)\Gamma_{n+1}\left(m+\frac{n}{2}\right)$$

$$\cdot\,\Gamma(n+1)^{2(k-m-n)}\,\Gamma_{2(k-m-n)}\left(k-\frac{n}{2}\right)\Gamma_{2(k-m-n)}(k-n)^{-1}$$

$$\in \mathbb{Q}_{>0},$$

ここで $\Gamma_\nu(s) := \prod_{j=1}^{\nu}\Gamma\left(s-\frac{j-1}{2}\right)$.

M_k^n の subspace W と $R\subset\mathbb{C}$: subring に対して

$$W(R) := \{ f\in W \mid {}^\forall\text{Fourier coeff. of } f\in R \}$$

(R-module),

$\mathbb{T}_R$: ring of Hecke operators $/R$ $\subset \mathrm{End}(S_k^n)$

とする。$[\ \ ]_{n-1}^n : M_k^{n-1}\longrightarrow M_k^n$ を Eisenstein lifting

とするとき

$c_k(n)$: exponent of $[M_k^{n-1}(\mathbb{Z})]_{n-1}^n / [M_k^{n-1}]_{n-1}^n(\mathbb{Z})$.

$V\subset S_k^n(\mathbb{Q})$ を $\mathbb{T}_\mathbb{Q}$-simple component で $V\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{C}\ni f$

なるもの, $V'\subset S_k^n(\mathbb{Q})$ を $\mathbb{T}_\mathbb{Q}$-submodule で $V'\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{C}$

$=(V\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{C})^\perp$ となるものとし.

$\nu(f)$: exponent of $S_k^n(\mathbb{Z})/(V(\mathbb{Z})\oplus V'(\mathbb{Z}))$ とおく。

$\mathbb{Z}(f)$ は $\mathbb{Q}(f)$ の integer ring,

$Tf = \lambda(T, f)f \quad (T \in \mathbb{T}_{\mathbb{Z}})$ とかくとき.

$\kappa(f)$: exponent of $\mathbb{Z}(f)/\mathbb{Z}[\lambda(T, f) \mid T \in \mathbb{T}_{\mathbb{Z}}]$.

また $\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}$ の different を $\mathfrak{D}(\mathbb{Q}(f))$ と書くと, 上の

$\mathfrak{a}(f) := \kappa(f)\nu(f)\mathfrak{D}(\mathbb{Q}(f))$ である。 ▨

Example. $n = 2$, $k = 10$.

$$f_{10} := -4\chi_{10} \text{ (Igusa's notation) } \in S_{10}^2(\mathbb{Z}).$$

このとき f_{10} は eigenform で $a\left(\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, f_{10}\right) = 1$.

Th. の主張は

$$L_{\underline{St}}^*(8, f_{10}) \in \frac{2^{19}}{3^{18} \cdot 5^8 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 43867}\mathbb{Z}.$$

ここで $c_{10}(2) = 43867 \mid B_{18}$.

正確な値は

$$L_{\underline{St}}^*(8, f_{10}) = \frac{2^{36}}{3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 43867}.$$

2.3 Residues

$f \in S_k^n$ を $k \geq n$ なる eigenform で $\forall$ Fourier coeff. $\in \mathbb{Q}(f)$ とする。すでに述べたように

$$L_{\underline{St}}(s, f) \text{ が } s = 1 \text{ で (simple) pole をもつ} \Leftrightarrow f \in B_k^n(2n).$$

このとき

$$\frac{\mathrm{res}_{s=1} L_{\underline{St}}(s, f)}{\pi^{nk - \frac{n(n+1)}{2}}(f, f)} \in \mathbb{Q}(f)$$

となる。

References

1. Andrianov, A.N.: Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2. (English transl.) Russian Math. Surveys, 29, 45-116 (1974).
2. Andrianov, A.N., Kalinin, V.L.: On the analytic properties of standard zeta functions of Siegel modular forms. (English transl.) Math. USSR Sbornik, 35, 1-17 (1979).
3. Böcherer, S.: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II. Math. Z., 189, 81-110 (1985).
4. Böcherer, S.: Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe. J. reine angew. Math., 362, 146-168 (1985).
5. Böcherer, S.: Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß. Mathematica Göttingensis Schriftenreihe SFB's, Geometrie und Analysis, 68 (1986).
6. Böcherer, S.: Siegel modular forms and theta series. Proc. Symp. Pure Math., 49, Part 2, 3-17 (1989).
7. Borel, A.: Automorphic L-functions. Proc. Symp. Pure Math., 33, Part 2, 27-61 (1979).

8. Deligne, P.: Valeurs de fonctions L et périodes d'integrales. Proc. Symp. Pure Math., 33, Part 2, 313-346 (1979).

9. Evdokimov, S. A.: A characterization of the Maass space of Siegel modular forms of second degree. Math. USSR Sbornik, 40, 125-133 (1981)

10. Harris, M.: Special values of zeta functions attached to Siegel modular forms. Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 14, 77-120 (1981).

11. Oda, T.: On the poles of Andrianov L-functions. Math. Ann., 256, 323-340 (1981).

12. Piatetski-Shapiro, I., Rallis, S.: L-functions for the classical groups. In: Lecture Notes in Math., 1254. Springer 1987.

13. Mizumoto, S.: Poles and residues of standard L-functions attached to Siegel modular forms. preprint (1990).

14. Sturm, J.: The critical values of zeta functions associated to the symplectic group. Duke Math. J., 48, 327-350 (1981).

15. Weissauer, R.: Stabile Modulformen und Eisensteinreihen. Lecture Notes in Math., <u>1219</u>. Springer 1986.