数理解析研究所講究録
第 746 巻 1991 年 22-28

$J_0(z)-iJ_1(z)=0$ の数値解法と誤差解析について

筑波大電情　池辺八洲彦 (Yasuhiko Ikebe)
筑波大大学院　菊池　靖 (Yasushi Kikuchi)
筑波大電情　藤代　一成 (Issei Fujishiro)

1. はじめに

$f(z)=J_0(z)-iJ_1(z)=0$ の根の局所化の必要性は，深さの変化する水面上の重力波の解析，あるいは，傾斜した海岸での孤立波の遡上の解析に現れる [1][9]．根は，複素平面上の下半分のみに存在し，また虚軸に対して対称に分布する，すなわち $Im(z)<0$，$f(z)=0$ ならば $f(-\bar{z})=0$ であることが知られている [6][8]．さらに [5] ではの根の漸近展開形が与えられ、第 4 象限の原点に近い 30 根が最高 8 桁の精度で計算されている．本稿では，$J_0(z)-iJ_1(z)=0$ を解く問題を無限複素対称三重対角行列の固有値問題として定式化し，近似根の計算法と誤差解析について述べる．本論文はベッセル関数及びその導関数の零点計算法として考え出された手法 [2][3] の延長線上にあるが，問題の行列は複素対称非正規行列であるため，誤差解析が相当複雑化する．誤差解析に中心的役割を果たすのは，一般化レイリー商 [10, p.179] である．

2. 手法

定理2.1. 任意の $z \neq 0$ に対して次式が成り立つ．

$$Av = \frac{2}{z}v - \begin{bmatrix} J_0(z) - iJ_1(z) \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

ここに

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} i & f_2 & & 0 \\ f_2 & 0 & f_3 & \\ & f_3 & 0 & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad f_k = \dfrac{1}{\sqrt{k(k-1)}}, \quad k = 2, 3, \cdots, \\ v = [J_1(z), \sqrt{2}J_2(z), \sqrt{3}J_3(z), \cdots]^T \end{cases} \tag{2.2}$$

また，任意の $z \neq 0$ に対して $v \neq 0$ かつ $v \in l^2$. また A は非正規行列であり，$x \mapsto Ax$ は l^2内のコンパクト写像を表す.

定理2.2.

(a) $J_0(z) - iJ_1(z) = 0$ が成立するための必要十分条件は、$z \neq 0$ かつ $2/z$ が A の固有値であることである．

(b) A の固有値はすべて単純固有値である．すなわち，A は二階の一般固有ベクトルを持たず，かつ，A の各固有値に対応する一次独立な固有ベクトルは一個しかない．

(c) 行列 A は，適当な対角相似変換によって次のような非対称実三重対角行列$\tilde{A}$に変換される．

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & f_2 & & 0 \\ -f_2 & 0 & f_3 & \\ & -f_3 & 0 & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

次の定理はコンパクト写像に対して良く知られた定理の特別の場合である [4, Theorems 18.1, 18.3]．

定理2.3. λが A の固有値である必要十分条件は，適当なA_nの固有値λ_nの列が $n \to \infty$ のときλに収束することである．また $v \in l^2$が A の固有ベクトルであるための必要十分条件は，適当なA_nの固有ベクトルの列 v_nが $n \to \infty$ のとき，vに収束することである．

実際の近似計算では$\tilde{A}$の $n \times n$ 主座小行列$\tilde{A}_n$ (A の $n \times n$ 主座小行列 A_nに相似) の固有値λ_nを，EISPACK[7] 中の QR アルゴリズムルーチン HQR を使用して計算し，$\lambda_n \to \lambda\ (n \to \infty)$ のとき，$z_n = 2/\lambda_n$を $z = 2/\lambda$の近似とする．

3. 誤差解析

近似根の相対誤差は次式で精密に評価される．

定理3.1. 近似根 z_nの相対誤差は，

$$\frac{z_n - z}{z} = \frac{J_n(z)J_{n+1}(z)}{iJ_0^2(z)}(1 + O(n^{-2})) \simeq \frac{\pi}{2}J_n(z)J_{n+1}(z) \ \to 0\ (n \to \infty) \tag{3.1}$$

で与えられる．ここに第 4 象限の根 zに対して，漸近的に $J_0^2(z) \simeq i(-2/\pi)$ である．

A の固有値をλ, A_nの固有値をλ_nとすると，相対誤差は

$$\frac{z_n - z}{z} = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda - \lambda_n) \simeq \frac{1}{\lambda}(\lambda - \lambda_n), \quad (\lambda = \frac{2}{z}, \lambda_n = \frac{2}{z_n}) \tag{3.2}$$

で与えられる．ここで，A_nの一般化レイリー商$\mu_n = v_n^T A_n v_n / v_n^T v_n$ (但し $v_n = [J_1(z), \sqrt{2}J_2(z), \cdots, \sqrt{n}J_n(z)]^T$) [10,p.179] を用いて，

$$\lambda - \lambda_n = (\lambda - \mu_n) + (\mu_n - \lambda_n) \tag{3.3}$$

と分解すると，

$$|\lambda-\mu_n| \gg |\mu_n-\lambda_n| \tag{3.4}$$

であることが証明できる．(3.1) の最後の量 $(\pi/2)J_n(z)J_{n+1}(z)$ は，$(\lambda-\mu_n)$ の近似に相当するものである．

Fig.1, Fig.2 にそれぞれ，第 4 象限での $log_{10}|J_0(z)|$ と $log_{10}|J_1(z)|$ の等高線を示す．また，Fig.3 に $log_{10}|J_0(z)-iJ_1(z)|$ の等高線を示す．これより，$f(z)=0$ の根は，定理 3.1 の主張どおり，ほぼ $|J_0(z)|=\sqrt{2/\pi}$ の等高線に沿って分布していることが見て取れる．

誤差評価式 (3.1) の評価例を Table 1 に掲げる．この例では (3.1) が誤差の精密な評価を与えていることがわかる．

References

[1] G. F. Carrier, Gravity Waves on Water of Variable Depth, *J. Fluid Mech.* , **24** (1966) 641-659.

[2] J. Grad and E. Zakrajšek, Method for Evaluation of Zeros of Bessel Functions, *J. Inst. Maths. Applics*, **11** (1973) 57-72.

[3] Y. Ikebe, Y. Kikuchi and I. Fujishiro, Computing Zeros and Orders of Bessel Functions, *Submitted for Publication* .

[4] M. A. Krasnosel'skii, G. M. Vainikko, P. P. Zabreiko, Ya. B. Rutitskii and V. Ya. Stetsenko, *Approximate Solution of Operator Equations* (Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972). English Translation.

[5] D. A. Macdonald, The Roots of $J_0(z)-iJ_1(z)=0$, *Quart. Appl. Math.*, **47** (1989) 375-378.

[6] A. D. Rawlins, Note on the Roots of $f(z)=J_0(z)-iJ_1(z)$, *Quart. Appl. Math.*, **47** (1989) 323-324.

[7] B. T. Smith, J. M. Boyle, J. J. Dongarra, B. S. Garbow, Y. Ikebe, V. C. Klema and C. B. Moler, *Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide,Second Edition* (Springer-Verlag, Berlin, 1976).

[8] C. E. Synolakis, On the Roots of $f(z) = J_0(z) - iJ_1(z) = 0$, *Quart. Appl. Math.*, **46** (1988) 105-107.

[9] C. E. Synolakis, The Runup of Solitary Waves, *J. Fluid Mech.*, **185** (1987) 523-545.

[10] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem* (Clarendon, Oxford, 1965).

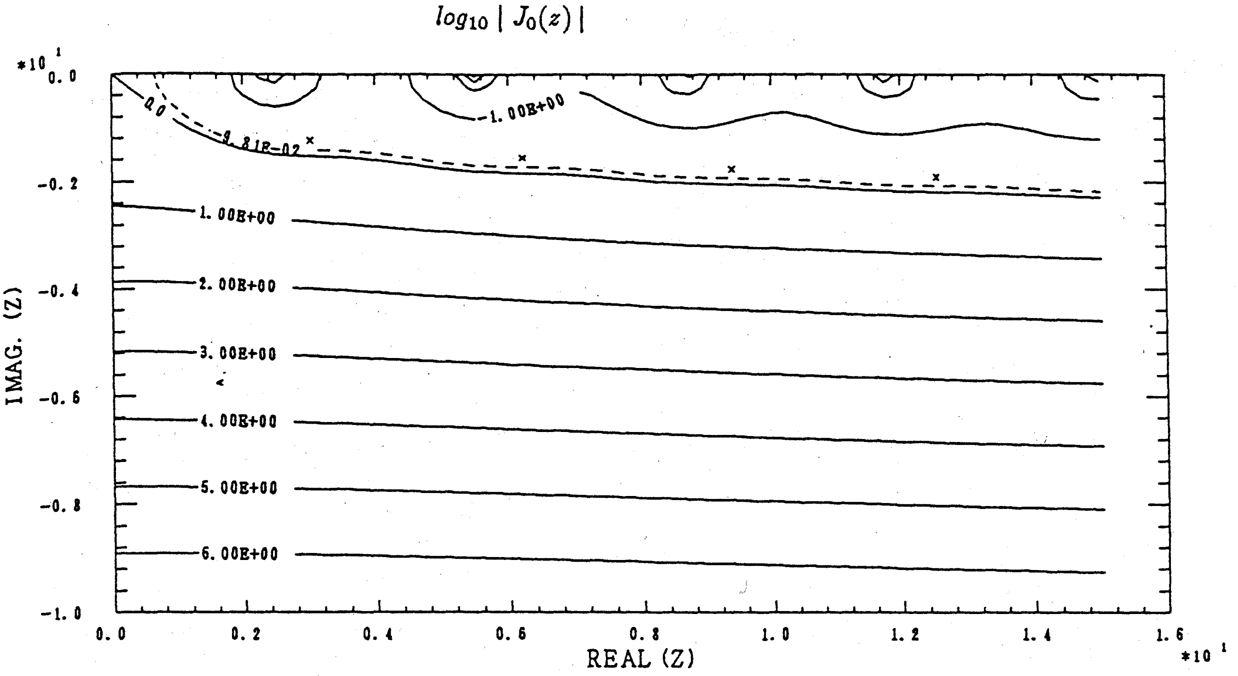

Fig.1 第 4 象 限 で の $log_{10}\,|\,J_0(z)\,|$ の 等 高 線 . ×印 は $J_0(z)-iJ_1(z)=0$ の 根 , 点 線 は $|\,J_0(z)\,|=\sqrt{2/\pi}$を 表 す.

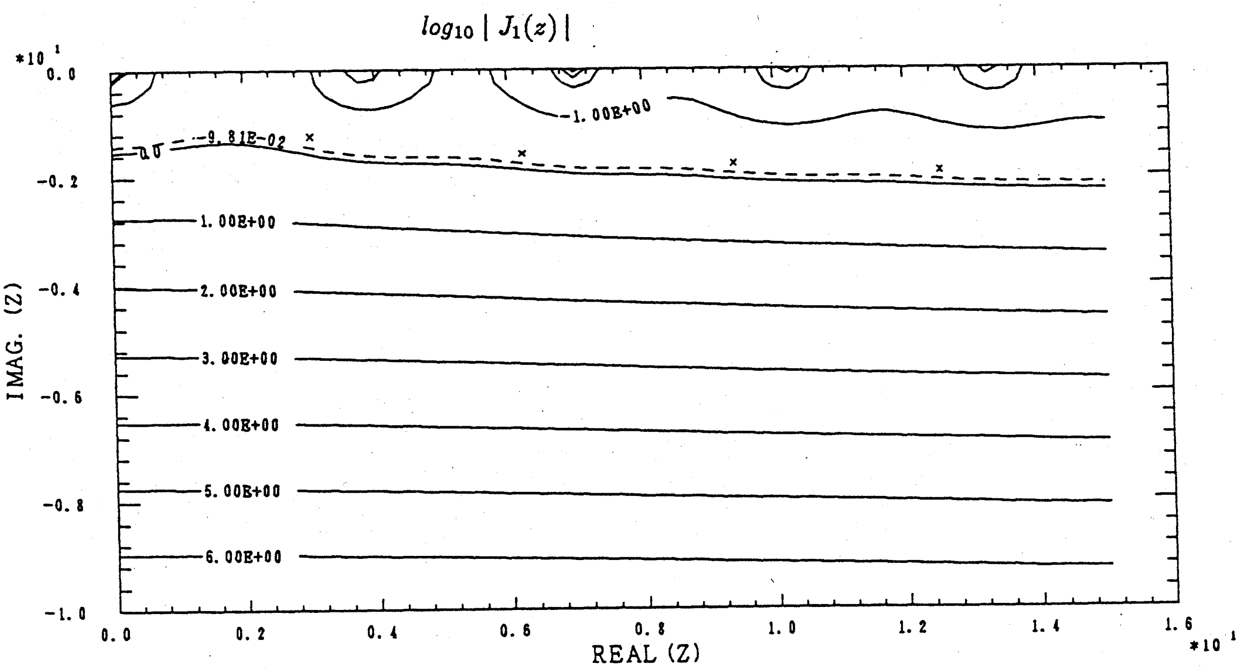

Fig.2 第 4 象 限 で の $log_{10}\,|\,J_1(z)\,|$ の 等 高 線 . ×印 は $J_0(z)-iJ_1(z)=0$ の 根 , 点 線 は $|\,J_1(z)\,|=\sqrt{2/\pi}$を 表 す.

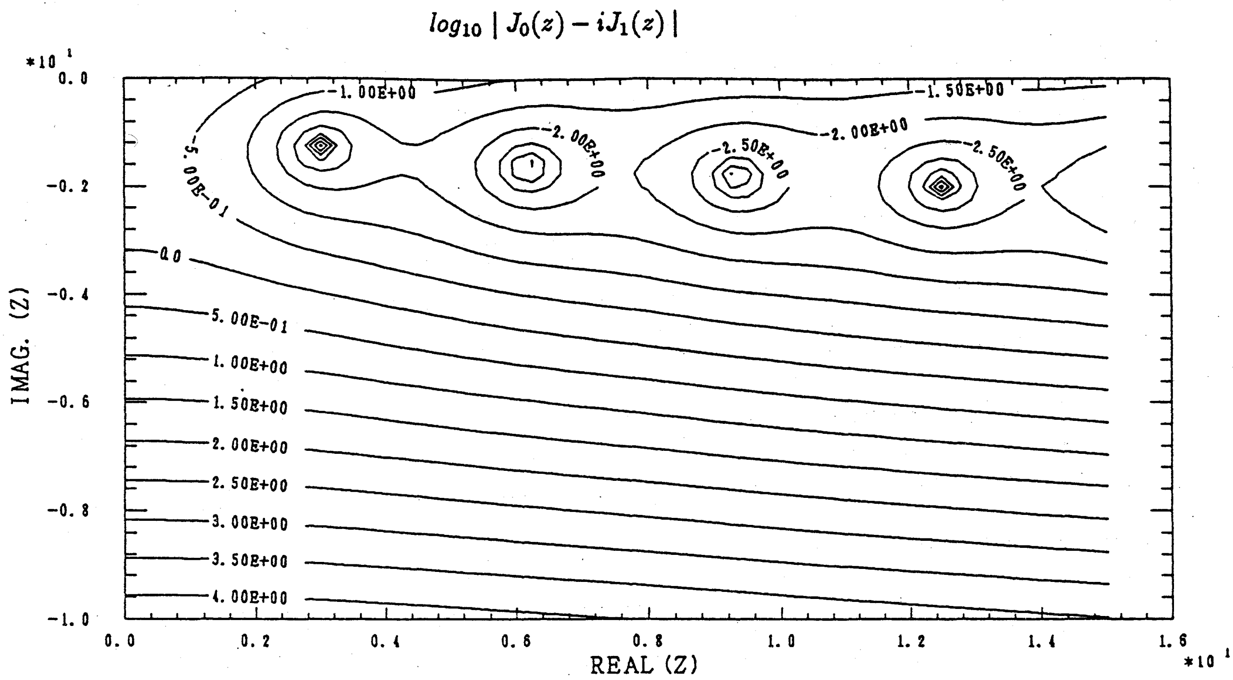

Fig.3 第 4 象限での $log_{10} \mid J_0(z) - iJ_1(z) \mid$ の等高線．

第 4 象限第 1 根

	$(z_n - z)/z$		$J_n(z)J_{n+1}(z)/iJ_0^2(z)$		$(\pi/2)J_n(z)J_{n+1}(z)$	
n	Real	Imag.	Real	Imag.	Real	Imag.
4	$-0.181e-01$	$-0.385e-02$	$-0.227e-01$	$-0.182e-02$	$-0.213e-01$	$-0.498e-02$
8	$+0.262e-06$	$-0.867e-07$	$+0.265e-06$	$-0.970e-07$	$+0.267e-06$	$-0.543e-07$
12	$-0.620e-13$	$+0.393e-13$	$-0.622e-13$	$+0.405e-13$	$-0.651e-13$	$+0.297e-13$
16	$+0.111e-20$	$-0.101e-20$	$+0.111e-20$	$-0.103e-20$	$+0.121e-20$	$-0.820e-21$
20	$-0.245e-29$	$+0.366e-29$	$-0.283e-29$	$+0.350e-29$	$-0.320e-29$	$+0.293e-29$

第 4 象限第 2 根

4	$-0.216e+00$	$-0.561e+00$	$+0.603e+00$	$+0.119e+00$	$+0.584e+01$	$+0.163e+00$
8	$-0.482e-02$	$-0.147e-03$	$-0.580e-02$	$+0.742e-03$	$+0.576e-02$	$+0.287e-03$
12	$+0.428e-06$	$+0.305e-06$	$+0.470e-06$	$+0.304e-06$	$-0.439e-06$	$+0.335e-06$
16	$-0.234e-12$	$-0.318e-11$	$+0.314e-12$	$-0.329e-11$	$+0.584e-13$	$-0.326e-11$
20	$-0.197e-17$	$+0.158e-17$	$-0.199e-17$	$+0.164e-17$	$-0.210e-17$	$+0.147e-17$

Table 1 相対誤差と評価式の値