数理解析研究所講究録
第 749 巻 1991 年 1-14

Comparison of Ratio Estimator, Least Squares Estimator and Grouped Jackknife Estimator for Regression Model

防災科学技術研究所　河合　伸一 (Shinichi Kawai)
筑波大・数学系　赤平　昌文 (Masafumi Akahira)

1．はじめに

線形モデル $Y=\alpha+\beta X+U$ のもとで，比 $\rho=E(Y)/E(X)$ を推定する問題は，多くの人々によって研究された．特に，標本をランダムにブロックに分けるという Quenouille (1956) のジャックナイフの方法を用いて問題が考えられ，最適なブロックの数が調べられた．また，ジャックナイフ推定量は，比推定量とも比較された．(たとえば， Durbin (1959), Rao (1965), Rao and Webster (1966), Gray and Schucany (1972), Rao (1988) を参照されたい．)

ここでは，まず， ρ の推定量として，比推定量，ジャックナイフ推定量， α,β の最小2乗推定量をもとにして作った推定量の3つを考え，平均2乗誤差によって比較を行う．次に，Akahira and Kawai (1990) に従って，ジャックナイフ推定量の最適性に関する結果ついて述べ，そこで与えられた正規分布の例について上の3つの推定量の比較を考える．さらにその論文では取り扱わなかった逆ガウス分布の例について述べる．

2．問題の設定

$(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ を大きさ n の無作為標本とし， X_i と Y_i の間に次の回帰式が成り立つと仮定する．

$$Y_i=\alpha+\beta X_i+U_i \qquad (i=1,\ldots,n)$$

$$E(X_i)=k_0\neq 0 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

$$E(U_i\,|\,X_i)=0 \quad (i=1,\ldots,n)\,, \qquad E(U_i^2\,|\,X_i)=n\delta \quad (i=1,\ldots,n)$$

$$E(U_iU_j\,|\,X_i,X_j)=0 \quad (i\neq j;i,j=1,\ldots,n).$$

ここで，$E(\cdot|\cdot)$ は条件付期待値を表し， δ は定数で，$\delta=O(n^{-1})$ とし，さらに， $h=O(n^{-1})$ とする．このとき

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad \bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i \qquad \bar{U}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U_i$$

とおいて

$$\rho = \frac{E(\bar{Y})}{E(\bar{X})} = \beta + \frac{\alpha}{k_0}$$

を推定する問題を考える.

3．推定量とその比較

ρ の推定量として，比推定量やジャックナイフ推定量が知られている．比推定量は，

$$r = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \beta + \frac{\alpha + \bar{U}}{\bar{X}}$$

で与えられる.

一方，大きさ n の標本を，大きさ m の g 個のグループに分ける．よって，$n = mg$ である．ここで，$g \geq 2$ とする．各 $j = 1, \ldots, g$ について，$\bar{X}'_j, \bar{Y}'_j$ を，j 番目のグループを除いた，残りのグループの標本平均とする.

$$r'_j = \frac{\bar{Y}'_j}{\bar{X}'_j} \qquad (j = 1, \ldots, g)$$

とすると，ジャックナイフ推定量 r_{JK} は，

$$r_{\mathrm{JK}} = g\,r - \frac{g-1}{g}\sum_{j=1}^{g} r'_j$$

で与えられる.

また，ρ の推定量として，α, β をそれぞれの最小 2 乗推定量 $\hat{\alpha}_{\mathrm{LSE}}, \hat{\beta}_{\mathrm{LSE}}$ で推定したもの すなわち，

$$\hat{\rho} = \hat{\beta}_{\mathrm{LSE}} + \frac{\hat{\alpha}_{\mathrm{LSE}}}{k_0}$$

を考える．ここで，

$$\hat{\beta}_{\mathrm{LSE}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}, \qquad \hat{\alpha}_{\mathrm{LSE}} = \bar{Y} - \hat{\beta}_{\mathrm{LSE}}\bar{X}$$

である．このとき，$E(\hat{\rho}) = \rho$ となるので，$\hat{\rho}$ は ρ の不偏推定量である.

いま，$X_1, \ldots, X_n$ が互いに独立に，いずれも平均 1，分散 σ^2，k 次のモーメント $\mu_k = E\{(X_i - 1)^k\}\ (i = 1, \ldots, n; k = 3, 4, 5, 6)$ をもつ分布に従うと仮定する．このとき，$\hat{\rho}, r, r_{\mathrm{JK}}$ の平均 2 乗誤差を $O(n^{-3})$ まで比較する.

まず$\hat{\rho}$の平均２乗誤差を求めるために，次の補題３．１を与える．

補題３．１． $X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立に，いずれも平均１，分散 σ^2， k 次のモーメント $\mu_k = E\{(X_i - 1)^k\}$ $(i = 1, \ldots, n; k = 3, 4, 5, 6)$ をもつ分布に従うと仮定する．このとき，

$$E\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right\} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right)$$

が成り立つ．ただし， $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ である．

証明の概略． まず，$W_n = \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2 / \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ とおくと，

$$W_n = 1 + \frac{n(\bar{X} - 1)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

となる．次に， $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - 1)$， $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n$ とおくと，

$$W_n = 1 + \frac{Z^2}{nS^2} = 1 + \frac{Z^2}{n\sigma^2 \left\{ 1 + \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{n}} \sqrt{n}(S^2 - \sigma^2) \right\}}$$

となり， $U = \sqrt{n}(S^2 - \sigma^2)$ とすれば，

$$\begin{aligned} W_n &= 1 + \frac{Z^2}{n\sigma^2 \left(1 + \frac{U}{\sigma^2 \sqrt{n}} \right)} \\ &= 1 + \frac{1}{\sigma^2 n} Z^2 - \frac{1}{\sigma^4 n \sqrt{n}} U Z^2 + \frac{1}{\sigma^6 n^2} U^2 Z^2 + o_p\left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

になる． $E(Z^2) = \sigma^2$ であることは明らかである．さらに $E(UZ^2) = O(1/\sqrt{n})$, $E(U^2 Z^2) = O(1)$ であることを示す．まず，

$$\begin{aligned} E(UZ^2) &= n\sqrt{n} E\{(S^2 - \sigma^2)(\bar{X} - 1)^2\} \\ &= n\sqrt{n} E\{S^2 (\bar{X} - 1)^2\} - \sigma^2 n \sqrt{n} E\{(\bar{X} - 1)^2\} \\ &= n\sqrt{n} E(\bar{X}^2 S^2) - 2n\sqrt{n} E(\bar{X} S^2) + n\sqrt{n} E(S^2) - \sigma^4 \sqrt{n} \end{aligned}$$

である．このとき，

$$E(S^2) = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sigma^2,$$

$$E(\bar{X} S^2) = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sigma^2 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \mu_3,$$

$$E(\bar{X}^2 S^2) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)\mu_4 + (n-1)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)\sigma^4$$
$$+ 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\mu_3 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2$$

であるから，

$$E(UZ^2) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\mu_4 - 4\sigma^4) - \frac{1}{n\sqrt{n}}(\mu_4 - 3\sigma^4) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{3.2}$$

となる．また，

$$\begin{aligned} E(U^2 Z^2) &= n^2 E\{(S^2 - \sigma^2)^2 (\bar{X} - 1)^2\} \\ &= n^2 \left[E\{S^4 (\bar{X} - 1)^2\} - 2\sigma^2 E\{S^2 (\bar{X} - 1)^2\} + \frac{\sigma^6}{n}\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

である．このとき，

$$\begin{aligned} E\{S^4(\bar{X}-1)^2\} = \frac{1}{n^4}\Bigg[& E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2\right\}^2 \left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)\right\}^2\right] \\ & - 2n^3 E\left\{(\bar{X}-1)^4 \sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2\right\} + n^4 E\{(\bar{X}-1)^6\}\Bigg] \end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned} E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2\right\}^2 \left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)\right\}^2\right] &= n\mu_6 + 3n(n-1)\sigma^2\mu_4 \\ &\quad + n(n-1)(n-2)\sigma^6 + 2n(n-1)\mu_3^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left\{(\bar{X}-1)^4 \sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2\right\} &= \frac{1}{n^3}\{\mu_6 + 7(n-1)\sigma^2\mu_4 \\ &\quad + 2(n-1)(n-2)\sigma^6 + 4(n-1)\mu_3^2\}. \end{aligned}$$

$$E\{(\bar{X}-1)^6\} = \frac{1}{n^5}\{\mu_6 + 15(n-1)\sigma^2\mu_4 + 15(n-1)(n-2)\sigma^6 + 10(n-1)\mu_3^2\}$$

であるから，

$$\begin{aligned} E\{S^4(\bar{X}-1)^2\} = \frac{1}{n^4}\Bigg[& \left(n - 2 + \frac{1}{n}\right)\mu_6 \\ & + \left\{3n(n-1) - 14(n-1) + \frac{15(n-1)}{n}\right\}\sigma^2\mu_4 \\ & + \left\{n(n-1)(n-2) - 4(n-1)(n-2) + \frac{15(n-1)(n-2)}{n}\right\}\sigma^6 \\ & + \left\{2n(n-1) - 8(n-1) + \frac{10(n-1)}{n}\right\}\mu_3^2\Bigg] \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる．一方，

$$E\{S^2(\bar{X}-1)^2\} = \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)\mu_4 + (n-1)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^3}\right)\sigma^4$$

となるから，(3.3),(3.4)より，

$$E(U^2Z^2) = \sigma^2\mu_4 + \sigma^6 + 2\mu_3^2 + O\left(\frac{1}{n}\right) = O(1). \qquad (3.5)$$

従って(3.1),(3.2),(3.5)から，

$$E(W_n) = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となる．■

補題3．1を用いて，$\hat{\rho}$ の平均2乗誤差は，次のようになる．

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\rho}) &= V(\hat{\rho}) \\
&= E\{V(\hat{\rho}\,|\,X_1,\ldots,X_n)\} + V\{E(\hat{\rho}\,|\,X_1,\ldots,X_n)\} \\
&= E\{V(\hat{\rho}\,|\,X_1,\ldots,X_n)\} \\
&= E\{V(\hat{\beta}_{\mathrm{LSE}}\,|\,X_1,\ldots,X_n) + V(\hat{\alpha}_{\mathrm{LSE}}\,|\,X_1,\ldots,X_n) \\
&\quad + Cov(\hat{\beta}_{\mathrm{LSE}}, \hat{\alpha}_{\mathrm{LSE}}\,|\,X_1,\ldots,X_n)\} \\
&= \delta E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2} + \frac{n}{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2} + \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}\right\} \\
&= \delta E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-1)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}\right\} \\
&= \delta + \frac{\delta}{n} + O(n^{-3}).
\end{aligned}$$

次に，比推定量 r の平均2乗誤差を求める． $Z=\sqrt{n}(\bar{X}-1)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
E(r-\beta) &= E\left(\frac{\alpha+\bar{U}}{\bar{X}}\right) \\
&= \alpha E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) \\
&= \alpha E\left(\frac{1}{1+\frac{Z}{\sqrt{n}}}\right) \\
&= \alpha\left\{1 - \frac{E(Z)}{\sqrt{n}} + \frac{E(Z^2)}{n} - \frac{E(Z^3)}{n\sqrt{n}} + \frac{E(Z^4)}{n^2}\right\} \\
&\quad + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \alpha\left\{1 + \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n^2}(-\mu_3 + 3\sigma^4)\right\} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

である．また，

$$
\begin{aligned}
E(r-\beta)^2 &= E\left(\frac{\alpha+\bar{U}}{\bar{X}}\right)^2 \\
&= (\alpha^2+\delta)E\left(\frac{1}{\bar{X}^2}\right) \\
&= (\alpha^2+\delta)E\left(\frac{1}{1+\frac{Z}{\sqrt{n}}}\right)^2 \\
&= (\alpha^2+\delta)\left\{1-\frac{2E(Z)}{\sqrt{n}}+\frac{3E(Z^2)}{n}-\frac{4E(Z^3)}{n\sqrt{n}}+\frac{5E(Z^4)}{n^2}\right\} \\
&+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= (\alpha^2+\delta)\left\{1+\frac{3}{n}\sigma^2+\frac{1}{n^2}(-4\mu_3+15\sigma^4)\right\}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

である．よって r の平均２乗誤差は，

$$
\begin{aligned}
MSE(r) &= E\{(r-\beta)-\alpha\}^2 \\
&= E(r-\beta)^2-2\alpha E(r-\beta)+\alpha^2 \\
&= \alpha^2\left\{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{1}{n^2}(-2\mu_3+9\sigma^4)\right\}+\delta\left(1+\frac{3}{n}\sigma^2\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

である．

最後に，ジャックナイフ推定量 r_{JK} の平均２乗誤差を求める． $Z=\sqrt{n}(\bar{X}-1)$, $Z_j'=\sqrt{n-m}(\bar{X}_j'-1)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
E(r_{JK}-\beta) &= \alpha\left\{gE\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)-\frac{g-1}{g}\sum_{j=1}^{g}E\left(\frac{1}{\bar{X}_j'}\right)\right\} \\
&= \alpha\left\{gE\left(\frac{1}{1+\frac{Z}{\sqrt{n}}}\right)-(g-1)E\left(\frac{1}{1+\frac{Z_j'}{\sqrt{n-m}}}\right)\right\} \\
&= \alpha\left[g\left\{1-\frac{E(Z)}{\sqrt{n}}+\frac{E(Z^2)}{n}-\frac{E(Z^3)}{n\sqrt{n}}+\frac{E(Z^4)}{n^2}\right\}\right. \\
&\left.-(g-1)\left\{1-\frac{E(Z_j')}{\sqrt{n-m}}+\frac{E(Z_j'^2)}{n-m}-\frac{E(Z_j'^3)}{(n-m)^{3/2}}+\frac{E(Z_j'^4)}{(n-m)^2}\right\}\right] \\
&+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \alpha \left[g \left\{ 1 + \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n^2}(-\mu_3 + 3\sigma^4) \right\} \right.$$
$$\left. -(g-1)\left\{ 1 + \frac{1}{n}\frac{g}{g-1}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\left(\frac{g}{g-1}\right)^2 (-\mu_3 + 3\sigma^4) \right\} \right]$$
$$+ O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$= \alpha \left\{ 1 + \frac{1}{n^2}\frac{g}{g-1}(\mu_3 - 3\sigma^4) \right\} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

である. また,

$$E(r_{JK} - \beta)^2 = \alpha^2 E\left(\frac{g}{\bar{X}} - \frac{g-1}{g}\sum_{j=1}^{g}\frac{1}{\bar{X}'_j}\right)^2 + E\left(\frac{g\bar{U}}{\bar{X}} - \frac{g-1}{g}\sum_{j=1}^{g}\frac{\bar{U}'_j}{\bar{X}'_j}\right)^2$$
$$= \alpha^2 \left\{ g^2 E\left(\frac{1}{\bar{X}^2}\right) - 2g(g-1)E\left(\frac{1}{\bar{X}}\frac{1}{\bar{X}'_j}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{(g-1)^2}{g}E\left(\frac{1}{\bar{X}'^2_j}\right) + \frac{(g-1)^3}{g}E\left(\frac{1}{\bar{X}'_i}\frac{1}{\bar{X}'_j}\right) \right\}$$
$$+ \delta \left\{ g^2 E\left(\frac{1}{\bar{X}^2}\right) - 2g(g-1)E\left(\frac{1}{\bar{X}}\frac{1}{\bar{X}'_j}\right) \right.$$
$$\left. + (g-1)E\left(\frac{1}{\bar{X}'^2_j}\right) + (g-1)(g-2)E\left(\frac{1}{\bar{X}'_i}\frac{1}{\bar{X}'_j}\right) \right\}$$
$$= \alpha \left\{ 1 + \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2}\frac{g}{g-1}(\mu_3 - 2\sigma^4) \right\} + \delta \left(1 + \frac{1}{n}\frac{g}{g-1}\sigma^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

である. よって r_{JK} の平均2乗誤差は,

$$MSE(r_{JK}) = E\{(r_{JK} - \beta) - \alpha\}^2$$
$$= E(r_{JK} - \beta)^2 - 2\alpha E(r_{JK} - \beta) + \alpha^2$$
$$= \alpha^2 \left(\frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2}\frac{g}{g-1}\sigma^4 \right) + \delta \left(1 + \frac{1}{n}\frac{g}{g-1}\sigma^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

である.

以上のことをまとめて, 次の定理3.1を得る.

定理3.1. $X_1, \ldots, X_n$ が互いに独立に, いずれも平均1, 分散 σ^2, k 次のモーメント $\mu_k = E\{(X_i - 1)^k\}$ $(i = 1, \ldots, n; k = 3, 4, 5, 6)$ をもつ分布に従うと仮定する. この

とき， $\hat{\rho}, r, r_{JK}$ の平均２乗誤差は， $O(n^{-3})$ までそれぞれ次のようになる.

$$MSE(\hat{\rho}) = V(\hat{\rho}) = \delta + \frac{\delta}{n} + O(n^{-3})$$

$$MSE(r) = \left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n} + \delta\right) + \left\{\frac{\alpha^2}{n^2}(-2\mu_3 + 9\sigma^4) + \frac{3\delta}{n}\sigma^2\right\} + O(n^{-3})$$

$$\begin{aligned} MSE(r_{JK}) &= \left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n} + \delta\right) + \left\{\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{2g}{g-1}\sigma^4\right) + \frac{\delta}{n}\frac{g}{g-1}\sigma^2\right\} + O(n^{-3}) \\ &\geq \left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n} + \delta\right) + \left(\frac{2\alpha^2\sigma^4}{n^2} + \frac{\delta}{n}\sigma^2\right) + O(n^{-3}) \qquad (g = n \text{ のとき}) \end{aligned}$$

従って， $\hat{\rho}, r, r_{JK}$ $(g = n$ のとき$)$ の平均２乗誤差を $O(n^{-3})$ まで比較すると次のようになる.

$\alpha \neq 0, \mu_3 \leq (7/2)\sigma^4 + \delta n\sigma^2/\alpha^2$ のとき， $MSE(\hat{\rho}) \leq MSE(r_{JK}) \leq MSE(r)$,

$\alpha \neq 0, \mu_3 > (7/2)\sigma^4 + \delta n\sigma^2/\alpha^2$ のとき， $MSE(\hat{\rho}) \leq MSE(r) \leq MSE(r_{JK})$,

$\alpha = 0, 0 < \sigma^2 \leq 1/3$ のとき， $MSE(r_{JK}) \leq MSE(r) \leq MSE(\hat{\rho})$,

$\alpha = 0, 1/3 < \sigma^2 \leq 1$ のとき， $MSE(r_{JK}) \leq MSE(\hat{\rho}) \leq MSE(r)$,

$\alpha = 0, \sigma^2 > 1$ のとき， $MSE(\hat{\rho}) \leq MSE(r_{JK}) \leq MSE(r)$.

注意３．１．　定理３．１から， ρ の推定問題において， $\alpha \neq 0$ のとき，あるいは $\alpha = 0$ かつ $\sigma^2 > 1$ のときには， $\hat{\rho}$ が他の推定量より良いことが分かる. もちろん α, σ^2 は未知であるから一概には言えないかもしれないが，そのことを考慮しても $\hat{\rho}$ は r_{JK} と比べても簡便でもあり ρ の推定量として推奨されるであろう.

４．ジャックナイフ推定量の最適性

今，ジャックナイフ推定量 r_{JK} が，ある推定量のクラスの中で，分散を最小にするという意味で，最適な推定量であることを示す. なお，ここでは結果のみを示し，詳しくは Akahira and Kawai (1990) を参照されたい.

推定量のクラスとして， r と r'_j $(j = 1, \ldots, g)$ の一次結合 $\hat{r}$ の集合 $\mathcal{R}$ を考える. つまり，

$$\mathcal{R} = \left\{ \hat{r} = w_0 r + \sum_{j=1}^{g} w_j r'_j \;\middle|\; -\infty < w_j < \infty \qquad (j = 0, 1, \ldots, g) \right\}$$

である.

補題4．1． 次の条件を仮定する．

$$k_0 E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)-1=h+o(h)$$

$$k_0\left\{E\left(\frac{1}{\bar{X}'_j}\right)-E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)\right\}=\frac{h}{g-1}+o(h) \qquad (j=1,\ldots,g)$$

このとき，$\mathcal{R}$ に属する任意の推定量 $\hat{r}=w_0\,r+\sum_{j=1}^{g}w_j\,r'_j$ は，

$$\sum_{j=0}^{g}w_j=1+o(h), \qquad \sum_{j=1}^{g}w_j=-(g-1)+o(g)$$

を満たすとき，$o(h)$ の偏り削減をもつ．

いま，$\mathcal{R}$ の部分クラス $\mathcal{R}_1$ を次のように定義する．

$$\mathcal{R}_1=\left\{\tilde{r}=g\,r+\sum_{j=1}^{g}w_j\,r'_j\;\middle|\;\sum_{j=1}^{g}w_j=-(g-1)\right\}.$$

これは，$o(h)$ の偏り削減をもつ $\mathcal{R}$ に属する推定量の中で，もっとも簡単なものである．

補題4．1より，$\mathcal{R}_1$ に属する任意の推定量は n^{-1} の偏り削減をもつ．次の定理4．1では，$\mathcal{R}_1$ に属する任意の推定量は $O(g\,h^4)$ の次数まで偏りが一致することを示す．

定理4．1． 次の条件を仮定する．

$$k_0 E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)-1=h+c_1h^2+c_2h^3+O(h^4)$$

$$k_0\left\{E\left(\frac{1}{\bar{X}'_j}\right)-E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)\right\}=\frac{h}{g-1}+c_3h^2+c_4h^3+O(h^4) \qquad (j=1,\ldots,g).$$

ここで，c_1, c_2 は定数，c_3, c_4 は g に依存する $O(1)$ の量とする．このとき任意の $\tilde{r}\in\mathcal{R}_1$ に対して，

$$E(\tilde{r})=\rho+\frac{\alpha}{k_0}\left[\{c_1-c_3(g-1)\}h^2+\{c_2-c_4(g-1)\}h^3\right]+O(g\,h^4)$$

である．

推定量 $\tilde{r}\in\mathcal{R}_1$ の漸近分散を求めるために，次の定理4．2が必要となる．

定理４．２．　次の期待値が $O(h^4)$ まで漸近的に存在する，すなわち

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}^2}\right)=k_1+O(h^4)\,,\qquad E\left(\frac{1}{\bar{X}_j'^2}\right)=k_2+O(h^4)\ \ (k_2>0;j=1,\ldots,g)\,,$$

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}}\frac{1}{\bar{X}_j'}\right)=k_3+O(h^4)\ \ (j=1,\ldots,g)\,,$$

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}_i'}\frac{1}{\bar{X}_j'}\right)=k_4+O(h^4)\ \ (i\neq j;i,j=1,\ldots,g).$$

であると仮定する．このとき，任意の $\tilde{r}\in\mathcal{R}_1$ に対して，

$$\begin{aligned}E\{(\tilde{r}-\beta)^2\}=&\left(\sum_{j=1}^{g}w_j^2\right)\left[\alpha^2(k_2-k_4)+\delta\left\{\frac{k_2 g}{g-1}-\frac{k_4 g(g-2)}{(g-1)^2}\right\}\right]\\&+\alpha^2\{k_1g^2-2k_3g(g-1)+k_4(g-1)^2\}\\&+\delta\{k_1g^2-2k_3g(g-1)+k_4g(g-2)\}\\&+O(g^2h^4)\end{aligned}\tag{4.1}$$

である．

注意４．１．　Schwarz の不等式によって，$k_2-k_4\geq 0$ であることがわかる．さらに，

$$\frac{k_2 g}{g-1}-\frac{k_4 g(g-2)}{(g-1)^2}\geq\frac{gk_2}{(g-1)^2}>0$$

である．これは (4.1) の右辺における $\sum_{j=1}^{g}w_j^2$ の係数が正であることを意味する．

定理４．１と定理４．２より，次の定理を得る．

定理４．３．　定理４．１，定理４．２の条件を仮定し，$k_i\ (i=1,2,3,4)$ が $O(h^4)$ まで存在するとする．このとき，推定量

$$\tilde{r}^*=gr-\frac{g-1}{g}\sum_{j=1}^{g}r_j'$$

はクラス $\mathcal{R}_1$ の中で，$O(g^2h^4)$ まで最小漸近分散をもつ．

証明の概略. 定理4．1と定理4．2より，$\tilde{r} \in \mathcal{R}_1$ の漸近分散は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
V(\tilde{r}) &= V(\tilde{r}-\beta) \\
&= E\{(\tilde{r}-\beta)^2\} - \{E(\tilde{r}-\beta)\}^2 \\
&= \left(\sum_{j=1}^{g} w_j^2\right)\left[\alpha^2(k_2-k_4)+\delta\left\{\frac{k_2 g}{g-1}-\frac{k_4 g(g-2)}{(g-1)^2}\right\}\right] \\
&\quad +\alpha^2[\{k_1 g^2 - 2k_3 g(g-1)+k_4(g-1)^2\} \\
&\quad -\{1+(c_1-c_3(g-1))h^2+(c_2-c_4(g-1))h^3\}^2/k_0^2] \\
&\quad +\delta\{k_1 g^2 - 2k_3 g(g-1)+k_4 g(g-2)\} \\
&\quad +O(g^2h^4).
\end{aligned}
$$

注意4．1より，クラス $\mathcal{R}_1$ の中で，$O(g^2h^4)$ まで最小漸近分散をもつような推定量 $\tilde{r}^*$ を求めるには，$\sum_{j=1}^{g} w_j = -(g-1)$ という条件のもとで $\sum_{j=1}^{g} w_j^2$ を最小にするような w_j $(j=1,\dots,g)$ を求めれば良い. Lagrange の未定乗数法により，このような w_j $(j=1,\dots,g)$ は,

$$
w_j = -\frac{g-1}{g} \qquad (j=1,\dots,g)
$$

であることがわかる. したがって，推定量 r_{JK} は，$O(g^2h^4)$ まで最小漸近分散をもつ. ■

5．例

Akahira and Kawai (1990) において，正規分布とガンマ分布の場合の例が与えられているが，ここでは正規分布の場合を述べ，ρ の3つの推定量 $\hat{\rho}$, r, r_{JK} の平均2乗誤差による比較も行う. また新たに逆ガウス分布の場合にジャックナイフ推定量の最適性について述べる.

例5．1. $X_1,\dots,X_n$ は独立に，いずれも平均1，分散 nh の正規分布にしたがうとする. ここで，h は定数で，$h=O(n^{-1})$ とする. このとき，十分大きな n に対して,

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) &= 1+h+3h^2+15h^3+O(h^4), \\
E\left(\frac{1}{\bar{X}_j'}\right) &= 1+\frac{g}{g-1}h+3\frac{g^2}{(g-1)^2}h^2+15\frac{g^3}{(g-1)^3}h^3+O(h^4), \\
E\left(\frac{1}{\bar{X}^2}\right) &= 1+3h+15h^2+105h^3+O(h^4) = k_1+O(h^4),
\end{aligned}
$$

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}_j'^2}\right)=1+3\frac{g}{g-1}h+15\frac{g^2}{(g-1)^2}h^2+105\frac{g^3}{(g-1)^3}h^3+O(h^4)=k_2+O(h^4)\,,$$

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}}\frac{1}{\bar{X}_j'}\right)=1+\frac{3g-2}{g-1}h+\frac{15g^2-20g+8}{(g-1)^2}h^2$$

$$+\frac{3(35g^3-70g^2+56g-16)}{(g-1)^3}h^3+O(h^4)=k_3+O(h^4)\,,$$

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}_i'}\frac{1}{\bar{X}_j'}\right)=1+\frac{g(3g-4)}{(g-1)^2}h+\frac{g^2(15g^2-40g+27)}{(g-1)^4}h^2$$

$$+\frac{g^3(105g^3-420g^2+567g-258)}{(g-1)^6}h^3+O(h^4)=k_4+O(h^4)$$

である．このとき，定理４．３の条件が満たされるから，ジャックナイフ推定量

$$r_{JK}=gr-\frac{g-1}{g}\sum_{j=1}^{g}r_j'$$

は，クラス $\mathcal{R}_1$ の中で，$O(g^2h^4)$ の次数まで最小漸近分散をもつ．

また，$\hat{\rho}$ の分散は次のようになる．

$$V(\hat{\rho})=\delta E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-1)^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right\}$$

$$=\delta E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-1)^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right\}$$

$$=\delta\left[1+\frac{1}{n-1}E\left[\frac{\{(\bar{X}-1)/\sqrt{h}\}^2}{\sum_{i=1}^n\{(X_i-\bar{X})/\sqrt{nh}\}^2/(n-1)}\right]\right]$$

であるが，$\{(\bar{X}-1)/\sqrt{h}\}^2/[\sum_{i=1}^n\{(X_i-\bar{X})/\sqrt{nh}\}^2/(n-1)]$ は，自由度 $1, n-1$ の F 分布に従うので，$\hat{\rho}$ の分散は $\delta\{1+1/(n-3)\}$ $(n>3)$ となる．

$\hat{\rho}$, r, r_{JK} の平均２乗誤差を $O(n^{-3})$ まで比較すると定理３．１より次のようになる．なお，r, r_{JK} の平均２乗誤差の値は，Rao (1965) によるものと一致する．

$$MSE(\hat{\rho})=\delta+\frac{\delta}{n}+O(n^{-3})\,,$$

$$MSE(r)=\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n}+\delta\right)+\left(\frac{9\alpha^2\sigma^4}{n^2}+\frac{3\delta\sigma^2}{n}\right)+O(n^{-3})\,,$$

$$MSE(r_{JK})=\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{n}+\delta\right)+\left(\frac{\alpha^2\sigma^4}{n^2}+\frac{2\delta\sigma^2}{n}\right)+O(n^{-3})\,.$$

したがって，次のことが，$O(n^{-3})$ までいえる．

$\alpha \neq 0$, または，$\alpha = 0, \sigma^2 > 1$ のとき，$V(\hat{\rho}) \leq V(r_{JK}) \leq V(r)$.

$\alpha = 0, 0 < \sigma^2 \leq 1/3$ のとき，$V(r_{JK}) \leq V(r) \leq V(\hat{\rho})$.

$\alpha = 0, 1/3 < \sigma^2 \leq 1$ のとき，$V(r_{JK}) \leq V(\hat{\rho}) \leq V(r)$.

例５．２．　X がパラメータ (μ, λ) $(\mu > 0, \lambda > 0)$ をもつ逆ガウス分布に従うとき，この分布を $IG(\mu, \lambda)$ と書く．密度関数は，$x > 0$ のとき，$\sqrt{\lambda/(2\pi x^3)}\exp\{-\lambda(x-\mu)^2/(2\mu^2 x)\}$ である．

いま，$X_1, \ldots, X_n$ が独立に，いずれも $IG(\mu, \lambda)$ に従うとき，$\bar{X}$ は $IG(\mu, n\lambda)$ に従う．このとき，

$$\begin{aligned}
k_0 &= E(\bar{X}) = \mu \\
E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{n\lambda} \\
E\left(\frac{1}{\bar{X}'_j}\right) &= \frac{1}{\mu} + \frac{g}{n(g-1)\lambda} \\
E\left(\frac{1}{\bar{X}^2}\right) &= \frac{1}{\mu^2} + 3\frac{1}{\mu}\frac{1}{n\lambda} + 3\frac{1}{n^2\lambda^2} \\
E\left(\frac{1}{\bar{X}'^2_j}\right) &= \frac{1}{\mu^2} + 3\frac{1}{\mu}\frac{g}{n(g-1)\lambda} + 3\frac{g^2}{n^2(g-1)^2\lambda^2}
\end{aligned}$$

である．さらに，Schwarz の不等式より，$E\{(1/\bar{X})(1/\bar{X}'_j)\}, E\{(1/\bar{X}'_i)(1/\bar{X}'_j)\}$ が存在することがわかる．このとき，

$$k_0 E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) - 1 = \frac{\mu}{n\lambda},$$

$$k_0\left\{E\left(\frac{1}{\bar{X}'_j}\right) - E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)\right\} = \frac{\mu}{n\lambda}\frac{1}{g-1}$$

である．$\mu/(n\lambda)$ の偏り削減を考えると，補題４．１が成り立つ．また，定理４．１より，任意の $\tilde{r} \in \mathcal{R}_1$ に対して，

$$E(\tilde{r}) = \beta + \frac{\alpha}{\mu} = \rho$$

となる．従って，任意の $\tilde{r} \in \mathcal{R}_1$ は ρ の不偏推定量である．さらに，定理４．２と定理４．３が厳密な期待値と分散で成り立つ．ゆえにジャックナイフ推定量 r_{JK} は，クラス $\mathcal{R}_1$ で最小分散をもつ．

参 考 文 献

[1] Akahira, M. and S. Kawai (1990). The optimality of the grouped jackknife estimator of ratio in some regression model. *J. Japan Statist. Soc.* **20** 149-157.

[2] Durbin, J. (1959). A note on the application of Quenouille's method of bias reduction to estimation of ratios. *Biometrika* **46** 477-480.

[3] Gray, H. L. and W. R. Schucany (1972). *The Generalized Jackknife Statistic.* New York: Marcel Dekker.

[4] Quenouille, M. H. (1956). Notes on bias in estimation. *Biometrika* **43** 353-360.

[5] Rao, J. N. K. (1965). A note on esimation of ratios by Quenouille's method. *Biometrika* **52** 647-649.

[6] Rao, J. N. K. and J. T. Webster (1966). On two methods of bias reduction in the estimation of ratios. *Biometrika* **53** 571-577.

[7] Rao, P. S. R. S. (1988). Ratio and regression estimators. In P. R. Krishnaiah and C. R. Rao, Eds., *Handbook of Statistics,* Vol. 6. Amsterdam: North-Holland, 449-468.