数理解析研究所講究録
第751巻 1991年 1-12

Extensions of Unbounded Representations

福岡大・理　黒瀬秀樹
(Hideki Kurose)

§1 序

ある $*$-多元環 $\mathcal{A}$ のヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上での（一般に有界でない）表現が与えられた時，それを同じ $\mathfrak{H}$ 上の表現に拡大する方法を考える。$*$-環の表現とは下の意味で使う。

定義　π が（多元）環 $\mathcal{A}$ のヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ における表現であるとは $\mathfrak{H}$ の dense な部分空間 $\mathcal{D}(\pi)$ があって

i) 任意の $a \in \mathcal{A}$ に対し，$\pi(a)$ は $\mathcal{D}(\pi)$ を定義域とする可閉線型作用素，

ii) $\pi(a)\mathcal{D}(\pi) \subset \mathcal{D}(\pi)$ $(\forall a \in \mathcal{A})$

iii) $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \pi(\mathcal{A})$ は 準同型

を満たすときを言う。さらに $\mathcal{A}$ が $*$-環であり，$\pi(a^*) \subset \pi(a)^*$ $(a \in \mathcal{A})$ を満たすとき π は $*$-preserving または π を $*$-表現という。環 $\mathcal{A}$ の2つの表現 π, ρ が同じヒルベルト空間において与えられたとき，ρ が π の拡大（$\rho \supset \pi$）であるとは

$$\mathcal{D}(\rho) \supset \mathcal{D}(\pi) \quad \text{かつ} \quad \rho(a)|_{\mathcal{D}(\pi)} = \pi(a) \quad (a \in \mathcal{A})$$

を満たすときを言う。

我々の問題を述べる前に、実に簡単な例をあげる。$\mathcal{P}(x)$ を x の複素係数多項式全体のなす $*$-環とし、

$$\mathfrak{H} = L^2[0,1]$$

$$\mathcal{D}(\pi) = \{ f \in C^\infty[0,1] \,;\ f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots) \}$$

$$\mathcal{D}(\rho) = \{ f \in C^\infty[0,1] \,;\ f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) \quad (n = 0,1,2,\cdots) \}$$

$$\pi(\Sigma c_k x^k) = \Sigma c_k \left(i\frac{d}{dt}\right)^k \Big|_{\mathcal{D}(\pi)}$$

$$\rho(\Sigma c_k x^k) = \Sigma c_k \left(i\frac{d}{dt}\right)^k \Big|_{\mathcal{D}(\rho)}$$

とすれば π, ρ は $\mathcal{P}(x)$ の $*$-表現で ρ は π の拡大になっている。

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(x)$ の表現，特に $*$-表現の情況は非常に簡単である。π を $\mathcal{P}(x)$ の $*$-表現とすれば $\pi(x)$ は $\mathcal{D}(\pi)$ を不変にする対称作用素であり、π の $*$-表現としての拡大は、$\pi(x)$ の対称作用素としての拡大と その不変定義域を問題にすればよい。従って $\mathcal{P}(x)$ の $*$-表現の拡大の議論は、Cayley 変換を使った対称作用素の拡大の議論に帰着される。しかし $\mathcal{P}(x)$ 以外の $*$-環に対する $*$-表現とその拡大については事情が一変する。例えば 2 変数の多項式環 $\mathcal{P}(x,y)$ の $*$-表現 π を考えた時、$\pi(x), \pi(y)$ は $\mathcal{D}(\pi)$ を不変定義域とする可換な対称作用素であ

るが、その構造は非常に複雑であることは良く知られているし、可換性を保ったまま $\pi(x), \pi(y)$ の対称作用素として拡張することも非常に困難である。我々がここで問題にしたいのは、ある$*$-環 $\mathcal{A}$ の$*$-表現が与えられた時，それを$*$-表現として拡張する一つの方法を与えることである。特にそれを使って、対称作用素の自己共役作用素への拡張と同じことを、$*$-表現において考えるのが目的である。

<u>§2</u>　環 $\mathcal{A}$ の表現の議論は、前セクションの話から類推されるように、可閉作用素の議論とある程度平行に行なうことができる。

<u>定義</u>　$\mathcal{A}$ を環，π を $\mathcal{A}$ のヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ における表現とする。

$$\|\xi\|_a = \|\pi(a)\xi\| + \|\xi\| \qquad (a\in\mathcal{A},\ \xi\in\mathcal{D}(\pi))$$

と定義し、semi-norms $\{\|\cdot\|_a : a\in\mathcal{A}\}$ による $\mathcal{D}(\pi)$ の位相を $\pi(\mathcal{A})$ による induced 位相（t_π）と呼ぶ。$\mathcal{D}(\pi)$ の t_π による完備化を $\mathcal{D}(\tilde{\pi})$ と書けば　$\mathcal{D}(\tilde{\pi}) \subset \mathfrak{H}$，$\mathcal{D}(\tilde{\pi}) \subset \mathcal{D}(\overline{\pi(x)})$ である。

$$\tilde{\pi}(x) = \overline{\pi(x)}\big|_{\mathcal{D}(\tilde{\pi})} \qquad (x\in\mathcal{A})$$

とおけば　$\tilde{\pi}$ は $\mathcal{A}$ の表現となる。$\tilde{\pi}$ を π の閉包，$\tilde{\pi}=\pi$ のとき π は閉であるという。

<u>定義</u>　$\mathcal{A}$, π は前のとおりとし、

$$\mathcal{D}(\pi^*) = \bigcap_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{D}(\pi(x)^*) , \quad \pi^*(x) = \pi(x^*)^* \big|_{\mathcal{D}(\pi^*)} \quad (x \in \mathcal{A})$$

とする。$\mathcal{D}(\pi^*)$ が $\mathfrak{H}$ で dense のとき、π^* はやはり $\mathcal{A}$ の表現になっている。π^* を π の adjoint 表現という。

$*$-環 $\mathcal{A}$ の表現 π が $*$-preserving であることは $\pi \subset \pi^*$ と同値である。非有界作用素との対応をかんたんに書いておく。

可閉作用素 T	$\longleftrightarrow$	表現 π
$\overline{T}$	$\longleftrightarrow$	$\tilde{\pi}$
T^*	$\longleftrightarrow$	π^*
対称作用素	$\longleftrightarrow$	$*$-表現

π が $*$-表現ならば、対称作用素と同様に、$\pi \subset \tilde{\pi} \subset \pi^*$ となっている。自己共役作用素に相当する表現は $\pi = \pi^*$ で定義すればよさそうである。（実際これを満たすとき自己共役表現と呼ぶ。）2つの $*$-表現 π, ρ が $\pi \subset \rho$ ならば $\pi \subset \rho \subset \rho^* \subset \pi^*$ であるから、自己共役表現 π は $*$-表現として極大なものである。しかし、自己共役表現にはある意味で病的なものをたくさん含むから、実際には自己共役作用素に相当するものではない。いくつかの $*$-環のクラスに対し、自己共役作用素に相当する表現と、その表現への拡大の方法を次セクション以下で考える。

§3 可換 *-環 とその表現の induced extension

$\mathcal{A}$ を *-環、π をその *-表現とする。

$$\pi(\mathcal{A})'_w = \{B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})\,;\ (B\pi(x)\xi, \eta) = (B\xi, \pi(x^*)\eta) \quad \text{for } {}^\forall x \in \mathcal{A},\ \xi, \eta \in \mathcal{D}(\pi)\}$$

$$\pi(\mathcal{A})'_s = \{B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})\,;\ B\pi(x) \subset \pi(x)B \quad \text{for } {}^\forall x \in \mathcal{A}\}$$

とおき、それぞれ $\pi(\mathcal{A})$ の weak, strong commutant と呼ぶ。換言すれば

$$B \in \pi(\mathcal{A})'_w \iff B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}),\ B\mathcal{D}(\pi) \subset \mathcal{D}(\pi^*),\ B\pi(x) = \pi^*(x)B \text{ on } \mathcal{D}(\pi)$$

$$B \in \pi(\mathcal{A})'_s \iff B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}),\ B\mathcal{D}(\pi) \subset \mathcal{D}(\pi),\ B\pi(x) = \pi(x)B \text{ on } \mathcal{D}(\pi)$$

かんたんにわかるように

$\pi(\mathcal{A})'_w$ は *-不変、弱閉、線型空間(一般に環ではない。)

$\pi(\mathcal{A})'_s$ は(π: 閉なる)強閉線型空間(一般に *-不変でない。)

3-1. $\pi(\mathcal{A})'_w$ を使って表現 π の拡大の方法を与える。

$1 \in \mathfrak{M} \subset \pi(\mathcal{A})'_w$ なる任意の $\mathfrak{M}$ について

$$\mathcal{D}(\pi^\circ_{\mathfrak{M}}) = \text{linear span of } \mathfrak{M}\mathcal{D}(\pi)$$

$$\pi^\circ_{\mathfrak{M}}(x)\left(\sum C_k \xi_k\right) = \sum C_k \pi(x)\xi_k \qquad (C_k \in \mathfrak{M},\ \xi_k \in \mathcal{D}(\pi))$$

とおくと $\pi^\circ_{\mathfrak{M}}$ は π の表現としての拡大となっている。($\pi^\circ_{\mathfrak{M}}(x) \subset \pi^*(x)$ for ${}^\forall x \in \mathcal{A}$ に注意) $\pi_{\mathfrak{M}} = \widetilde{\pi^\circ_{\mathfrak{M}}}$ ($\pi^\circ_{\mathfrak{M}}$ の閉包)を π の $\mathfrak{M}$ による induced extension という。

一般に $\pi(\mathcal{A})'_s \subset \pi(\mathcal{A})'_w$ であるが、上の $\mathfrak{M}$ が、$\mathfrak{M} \not\subset \pi(\mathcal{A})'_s$ のとき、$\pi_{\mathfrak{M}}$ は π の真の拡大となっている。

3-2 命題　3-1において表現$\pi_{\mathfrak{M}}$が$*$-preservingとなるには$\mathfrak{M}^*\mathfrak{M}\subset\pi(\mathcal{A})'_\omega$が必要十分。
（$\mathfrak{M}\subset\pi(\mathcal{A})'_\omega$ならば$\mathfrak{M}^*\subset\pi(\mathcal{A})'_\omega$であるが一般に$\pi(\mathcal{A})'_\omega$は積で閉じていないので、$\mathfrak{M}^*\mathfrak{M}\subset\pi(\mathcal{A})'_\omega$も一般には成立しない。）

3-3 定義　$\mathcal{A}$を可換な$*$-環とする。$\mathcal{A}$の表現πがstandardであるとは$\overline{\pi(x)}=\pi(x^*)^*$が任意の$x\in\mathcal{A}$で成立するときをいう。これは任意の$\mathcal{A}$のエルミート元$x$に対して$\pi(x)$が本質的自己共役であるという条件と同値である。
（integrableと言ってもよい。c.f. 次セクション）

§1で述べた例におけるρは$P(x)$のstandard表現になっている。§2での閉作用素と表現の対応で言えば、$*$-環$\mathcal{A}$が可換のとき、standard表現が自己共役作用素に相当するものである。

3-4 定理（Schmüdgen）　πを可換な$*$-環$\mathcal{A}$の$*$-表現とし、πは$\mathcal{A}$のstandard表現ρをその拡大としてもつとする。このときρはπのinduced extensionとして実現できる。

（証明）　ρがstandardより、任意の$a=a^*, b=b^*\in\mathcal{A}$に対して自己共役作用素$\overline{\rho(a)}, \overline{\rho(b)}$のspectral projectionは互い

に可換となる。$\{\overline{\rho(a)}\}$ ($a=a^*\in\mathcal{A}$) の spectral projection 全体の生成する可換 v. Neumann 環を $\mathcal{M}$ とすれば $1\in\mathcal{M}\subset\rho(\mathcal{A})_s'\subset\pi(\mathcal{A})_w'$。このとき $\rho=\pi_{\mathcal{M}}$ を得る。 ///

§4 Induced extension の問題点とその一般化

前セクションでは、$\mathcal{A}$ が可換のとき、induced extension を使って我々の目的が達成できたのを見た。このセクションでは、$\mathcal{A}$ を CCR-algebra としたとき、induced extension では我々の目的が果せないことを見て、induced extension の拡大の方法を一般化することを試みる。

$\mathcal{A}$ をいま有限自由度をもつ CCR-algebra とする。すなわち、$\mathcal{A}$ を次の交換関係をみたす hermite 元 $\{p_i, q_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ と単位元 1 から生成される $*$-環とする。

$$
\begin{aligned}
&[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0 \\
&[p_i, q_j] = -i\delta_{ij}1
\end{aligned}
\qquad (\text{正準交換関係})
$$

この CCR-algebre $\mathcal{A}$ に対するたちのよい表現は次の Schrödinger 表現である。

$$\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{D}(\rho_s) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$(\rho_s(p_i)f)(t) = -i\frac{\partial f}{\partial t_i}(t),$$

$$(\rho_s(q_i)f)(t) = t_i f(t)$$

とすれば ρ_s は CCR-algebre $\mathcal{A}$ の $\mathcal{D}(\rho_s)$ を定義域とする $*$-表現となる。これを Schrödinger 表現とする。

さてこの CCR-algebra と Schrödinger 表現に対して定理 3-4 の類似が成立するかどうかをみよう。

命題 4-1. $\mathcal{A}$, ρ_s は上のものとする。

いま $\mathcal{D}(\pi) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ ; \ f^{(k)}(0) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \cdots, 0\}$

$$\pi = \rho_s|_{\mathcal{D}(\pi)}$$

とおく。この時

$$\pi(\mathcal{A})'_w = \begin{cases} \mathbb{C}1 & (n \geqq 2) \\ \{M_h \ ; \ h は \{x>0\}, \{x<0\} 上でそれぞれ定数\} & (n=1) \end{cases}$$

ここで M_h は関数 h によるかけ算作用素である。従って $\mathcal{D}(\pi)$ を $\pi(\mathcal{A})'_w$ は不変にする。よって ρ_s は π の induced extension としては実現できない。

上の命題が示すように、$\mathcal{A}$ が非可換のときには induced extension はそれほど強力な拡大の方法ではない。以下この拡大の方法を一般化することを試みる。

以下, $\mathcal{A}$ は一般の $*$-環, π をその $*$-表現とする。$\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$ に対して

$$(\pi(\mathcal{A}), \alpha)'_w = \{A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) ; (A\pi(\alpha(x))\xi, \eta) = (A\xi, \pi(x^*)\eta) \text{ for } x \in \mathcal{A},\ \xi, \eta \in \mathcal{D}(\pi)\}$$

$$(\pi(\mathcal{A}), \mathrm{End})'_w = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{A})} (\pi(\mathcal{A}), \alpha)'_w$$

$$(\pi(\mathcal{A}), \mathrm{Aut})'_s = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})} (\pi(\mathcal{A}), \alpha)'_w$$

とおく。

定理 4-2 ([IKO], [K]) $1 \in \mathfrak{M} \subset (\pi(\mathcal{A}), \mathrm{End})'_w$ なる $\mathfrak{M}$ に対して

$$\mathcal{D}(\pi^\circ_{\mathfrak{M}}) = \text{linear span of } \mathfrak{M}\mathcal{D}(\pi)$$

$$\pi^\circ_{\mathfrak{M}}(x)(\Sigma A_i \xi_i) = \Sigma A_i \pi(\alpha_i(x))\xi_i$$

$$(A_i \in \mathfrak{M},\ A_i \in (\pi(\mathcal{A}), \alpha_i)'_w,\ \xi_i \in \mathcal{D}(\pi))$$

と定義すれば $\pi^\circ_{\mathfrak{M}}$ は $\mathcal{D}(\pi^\circ_{\mathfrak{M}})$ を定義域とする $\mathcal{A}$ の表現で、これは π の拡大となっている。

$\pi^\circ_{\mathfrak{M}}$ の閉包をとることによって得られるものを $\pi_{\mathfrak{M}}$ とかき、これを π の $\mathfrak{M}$ による g-(一般化された) induced extension と呼ぶことにする。

定義 4-3. $\mathfrak{M} \subset (\pi(\mathcal{A}), \mathrm{End})'_w$ が $*$-consistent であるとは

$$(A\pi(\alpha(x))\xi, B\eta) = (A\xi, B\pi(\beta(x^*))\eta)$$

$$\text{for } {}^\forall A, B \in \mathfrak{M},\ {}^\forall x \in \mathcal{A},\ {}^\forall \xi, \eta \in \mathcal{D}(\pi)$$

が成立するときをいう。ただし $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$ は $A \in (\pi(\mathcal{A}), \alpha)'_\omega$, $B \in (\pi(\mathcal{A}), \beta)'_\omega$ をみたすものである。

命題 4-4. $1 \in \mathfrak{M} \subset (\pi(\mathcal{A}), \mathrm{End})'_\omega$ に対して π の $\mathfrak{M}$ による g-induced extension $\pi_{\mathfrak{M}}$ が $*$-表現となるためには $\mathfrak{M}$ が $*$-consistent であることが必要十分。

注意 特に $\mathfrak{M} \subset (\pi(\mathcal{A}), \mathrm{Aut})'_\omega$ のとき $\mathfrak{M}$ が $*$-consistent であるのは任意の $A, B \in \mathfrak{M}$ に対し $A \in (\pi(\mathcal{A}), \alpha)'_\omega$, $B \in (\pi(\mathcal{A}), \beta)'_\omega$ となるよう $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ をとった時 $B^*A \in (\pi(\mathcal{A}), \alpha \circ \beta^{-1})'_\omega$ が成立することと同値である。

$\mathfrak{M} \subset (\pi(\mathcal{A}), id_{\mathcal{A}})'_\omega = \pi(\mathcal{A})'_\omega$ のときを考えると g-induced extension は確かに induced extension の一般化になっていることがわかるし、命題 4-4 は命題 3-2 に対応している。

定理 4-2 に述べた g-induced extension を §4 の最初に述べた CCR-algebra $\mathcal{A}$, Schrödinger 表現 ρ_s, π $(\subset \rho_s)$ に適用してみると ρ_s は π の g-induced extension で実現されることがわかる。以下でもっと一般的な定理を述べる。

定義 4-5 $\mathcal{A}$ を前ヒルベルト空間 K 上の CCR-algebra とする。$\mathcal{A}$ には Schrödinger 表現の一般化にあたる Fock 表現というたちのよい表現がある。(c.f. [BR]) $\mathcal{A}$ の表現が normal とは、その表現が Fock 表現の直和に書けることを言う。

定理 4-6 [K] $\mathcal{A}$ を CCR-algebra over K, π を $\mathcal{A}$ のヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上の $*$-表現で、$\mathcal{A}$ の normal 表現 ρ をその拡大としてもつとする(同じ空間 $\mathfrak{H}$ 上で)。このとき ρ は π の g-induced extension として実現できる。

最後に定理 3-4 の一般化を述べよう。

G を Lie 群、$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環, $\mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の包絡環とする。G の unitary 表現があれば、それに対する C^∞ 級ベクトル全体を定義域とする $\mathcal{A}$ の $*$-表現 ρ が自然に作れる。これを $\mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ の integrable 表現という。

定理 4-7 [K] π を $\mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ の $*$-表現で同じ表現空間の上に integrable 表現 ρ をその拡大として持つとする。この時 ρ は π の g-induced extension で実現できる。

References

[BR] O. Bratelli and D.W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Mechanics II, Springer (1981)

[IKO] A. Inoue, H. Kurose and S. Ôta, Extensions of unbounded representations, preprint (1990)

[K] H. Kurose, A Generalization of induced extensions of unbounded representations, in preparation.

[S] K. Schmüdgen, Unbounded Operator algebras and Representation Theory, Birkhäuser (1990)