数理解析研究所講究録
第 751 巻 1991 年 161-177

Structure of Subfactors and *-endomorphisms

大阪教育大　長田まりゑ（Marie CHODA）

超有限連続型有限因子環Mの部分因子環 N は，有限次元でない限り，Connes の結果により超有限連続型因子環となるから，von Neumann の結果により，N は常にMと同型である。従って，MからNへの＊－同型写像，即ち，Nを値域とするMの＊－endomorphism が，多く存在する。その様な＊－endomorphism で，MとNの関係を，最もよく反映するものは，どの様な特徴を持っているのだろうか？　この疑問は，次の事実が動機となっている。即ち，Jonesの指数理論が導入されて以来，超有限連続型有限因子環の部分因子環で，相対可換子環が，自明なものゝ取り得る指数の値が問題となっており，Jones, Wenzl, Goodman－Harpe－Jones, Ocneanu, Haagerup－Schou等により，新らしい部分因子環が構成されてきたが，それ等は，或る＊－endomorphism と密接に結びついている。ここでは，その様な＊－endo morphism について，述べる。

§1. Standard $*$-isomorphisms.

全体を通して，M は II_1-factor で canonical trace τ をもつものとする。 $\mathrm{End}(M,\tau)$ によって，τ を保存する M の $*$-endomorphism 全体を示す。 τ の忠実性と正規性により，$\rho\in\mathrm{End}(M,\tau)$ に対して，$\rho(M)$ は，M の subfactor となる。 $\rho(M)'\cap M=\mathbb{C}1$ となるとき，ρ は既約であるという。 Powers にならって，ρ の指数を $[M:\rho(M)]$ で定義し，$\mathrm{Ind}\,\rho$ と記す。 $\rho,\sigma\in\mathrm{End}(M,\tau)$ に対して，$\rho(x)=u\sigma(x)u^*$ を全ての $x\in M$ に対して充すユニタリ $u\in M$ が，存在するとき，ρ と σ はユニタリ同値であるという。 $M\supset\rho(M)$ が finite depth な関係にあるとき，ρ は finite depth であるといい $M\supset\rho(M)$ の depth でもって，depth ρ を定義する。 M から $\rho(M)$ への条件付期待値を，E_ρ で，記す。

$$E_\rho(e)=(\mathrm{Ind}\,\rho)^{-1}1 \quad \text{かつ} \quad \rho^2(M)=\{e\}'\cap\rho(M)$$

を充す射影 $e\in M$ が存在するとき，ρ は basic であるといいこの様な条件を充す e を basic projection for ρ と呼ぼう。

$$M=\sigma\text{-weak closure of } \bigcup_j(\rho^j(M)'\cap M)$$

を充すとき，ρ は generating property を充すという。 basic かつ generating property を充す ρ を，standard な $*$-endomorphism と呼ぶ。

補題 1. 指数と性質 basic, generating property 及び depth は unitary 同値に関して，不変である。

補題 2. $\rho \in \mathrm{End}(M, \tau)$ が generating property を充すならば，ρ は Powers の意味で，shift である；

$$\bigcap_j \rho^j(M) = \mathbb{C}1.$$

§2. 例

ここでは，以下基本的な役割を果すいくつかの例について調べる。最初に掲げる例 1 は，Goodman－Harpe－Jones が，用いたものである。

例 1. $C_0 \subset B_0$ は有限次元 von Neumann 環で，inclusion matrix のノルムの二乗 β が $2 \leqq \beta \leqq 4$ となっているものとする。$\beta = 2 + q + q^{-1}$ を充す数 q が存在する。この対に対する modulus β のマルコフトレースを τ とする。B_0 から C_0 への τ に関する条件付期待値に対応する射影を e_0 とする。$B_1 = \langle B_0, e_0 \rangle$ とし，$B_0 \subset B_1$ に対する basic extension の列

$$B_0 \subset B_1 \subset \cdots\cdots \subset B_j = \langle B_{j-1}, e_{j-1} \rangle \subset \cdots\cdots$$

と射影の列 $e_0, e_1, e_2, \cdots\cdots$ を得る。$g_j = (q+1) e_j - 1$ とおき，$C_1 = g_0 B_0 g_0^{-1}$，$C_j = \{C_{j-1}, e_{j-1}\}$ の生成する algebra とおけば増大列：$C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_j = \mathrm{alg}\{C_{j-1}, e_{j-1}\} \subset \cdots$ が得られる。τ のマルコフ性により，τ は各 B_j に拡張され

る。 τに係るGNS表現πに対し，$B = \pi(\bigcup_j B_j)''$，$C = \pi(\bigcup_j C_j)''$とすると，$B \supset C$はII_1－因子環で，$[B:C]=\beta$を充す。ρを$x \in B$に対して次の様に定義する；

$$\rho(x) = \lim_{k \to \omega} g_0 g_1 \cdots g_k x g_k^* \cdots g_1^* g_0^*$$

__補題3.__ ρはbasicであるが，generating propertyをもたない。ただし$\dim C_0 \geqq 2$とする。

証明は，$\rho(B) = C$なることと，$\rho(g_j) = g_{j+1}$なることを用いて，e_0がρに対するbasic projectionであることを示す。又$\rho(x) = x$がすべての$x \in C_0$に対して成立することと補題2により，generating propertyをもたない事が判る。//

__例2.__ $M \supset N$をII_1－因子環の対で，$[M:N] < +\infty$とする。Jonesのbasic constructionを繰り返して得られるtowerを

$$N \subset M \subset M_1 = \langle M, e_1 \rangle \subset \cdots \subset M_j = \langle M_{j-1}, e_j \rangle \subset \cdots$$

とする。以下この小文では，M_j，e_jは，ここで表わされるものを示す。Mのcanonical trace τはマルコフ性により，各M_jにまで拡張され，それに関する$\bigcup_j M_j$のGNS表現πを用いて，$M_\infty = \pi(\bigcup_j M_j)''$とおく。各$M_j$における$J_j$（canonical conjugation）を用いて，

$$\Gamma(x) = J_{j+1} J_j x J_j J_{j+1} \qquad (x \in M' \cap M_{2j})$$

で定義される$M' \cap M_\infty$から$M_2' \cap M_\infty$への＊－isomorphism Γは，Ocneanuのcanonical shiftと呼ばれる。

このcanonical shiftは，standardである。

実際，e_2がΓに対して basic projection となり，generating property を充すことも簡単に示せる。

例3. Jones による射影列 $\{e_j ; j \geq 1\}$により生成されるII_1-型因子環を R とし，$\theta(e_j) = e_{j+1}$ $(\forall j)$ とおけば，θはRのτ-不変な$*$-endomorphismになる。$\theta(R) = \{e_j ; j \geq 2\}''$であり，$e_1$は$\theta$に対する basic projection となる。$\{e_j ; j\}$の充す基本的な性質により，θはgenerating property をもち，standard $*$-endomorphism となる。

この standard $*$-endomorphism θは，Ind $\theta < 4$のときには，例1で定義された形式で表わすことができる；

$$\theta(x) = \lim_{k\to\infty} u_1 u_2 \cdots u_k\, x\, u_k^* \cdots u_2 u_1 \qquad (x \in R),$$

ただし $u_k = (q+1)e_k - 1$， $(q + q^{-1} + 2) = \mathrm{Ind}\,\theta$。

例4. Ocneanu は指数<4となる超有限型II_1-因子環の部分因子環の分類を行なう為に，相対可換子環の tower

$$M'\cap M_1 \subset M'\cap M_2 \subset \cdots \subset M'\cap M_j \subset \cdots$$

の解析を行ない，string algebra上のflat connection を用いて，各$M'\cap M_j$上で$*$-endomorphism ρを定義することにより，彼の不変量を持つ部分因子環を与える方法を述べている。定義は，簡単ではないので，彼の文献を参照して下さい。この$*$-endomorphism ρは，$M'\cap M_\infty$から$M_1'\cap M_\infty$への

最も興味深い standard なものの例となる。尚，例2に於ける Γ は，φ^2 によっても定義され得ることを Ocneanu は記している。

§3. 有限可換群による接合積に対する basic extension

II_1 型因子環の対 $M \supset N$ に対する Jones basic extension 及び相対可換子環の tower は $M \supset N$ の関係が，接合積又は fixed point algebra で与えられる場合には，$M' \cap M_\omega$ の standard $*$-endomorphism を調べるのに有用な，他の表示が，可能である。ここでは，それについて記す。

N は有限因子環，G は N の外部自己同型写像のなす可換有限群，M を N の G による接合積とする。$g \in G$ に対する M の canonical なユニタリを $u(g)$ と表わす。u は G の M の中へのユニタリ表現となる。G の相対 $\hat{G}$ の元 γ は次の定義により M の自己同型写像と考えることができる。$\gamma(u(g)a) = \langle \gamma, g \rangle u(g)a$，$(a \in N,\ g \in G)$。このとき，自己同型写像 $\gamma \in \hat{G}$ は，$u_1(\gamma)x\xi_0 = \gamma(x)\xi_0$ $(x \in M)$ を充す $L^2(M,\tau)$ 上のユニタリ $u_1(\gamma)$ を induce する，ただし ξ_0 は $L^2(M,\tau)$ における M に対する cyclic vector である。$L^2(M,\tau)$ 上の M と $u_1(\hat{G})$ により生成される von Neumann 環は因子環となるが，これが，対 $M \supset N$ から basic extension により得られる環 M_1 に他ならず，Jones projection e_1 は $e_1 = \sum_{\gamma \in \hat{G}} u_1(\gamma)/|G|$ で与えられる。この方法を繰り返すことにより，ユニタリの列

$\{u_{2i-1}(\gamma) : \gamma \in \hat{G}\}$ と $\{u_{2i}(g) ; g \in G\}$ で

$$M_{2i} = \{M_{2i-1}, u_{2i}(G)\}'', \quad M_{2i+1} = \{M_{2i}, u_{2i+1}(\hat{G})\}''$$

を充すものが得られる。Jones projection e_i は夫々

$$e_{2i} = \sum_g u_{2i}(g) / |G|, \quad e_{2i+1} = \sum_\gamma u_{2i+1}(\gamma) / |G|$$

で与えられる。

補題4. すべての j に対して，次が成立する；

$$M_{2j} = \{u_{2j+2i}(G), u_{2j+2i+1}(\hat{G}) ; i \geq 1\}' \cap M_\infty$$

$$M_{2j+1} = \{u_{2j+2i+1}(\hat{G}), u_{2j+2(i+1)}(G) ; i \geq 1\}' \cap M_\infty$$

$$J_{2j} u_{2j}(g) J_{2j} = u_{2j+2}(g), \quad J_{2j+1} u_{2j+1}(\gamma) J_{2j+1} = u_{2j+3}(\gamma)$$

$$J_{2j+1} u_{2j+2}(g) J_{2j+1} = u_{2j+2}(g), \quad [J_{2j+2}, u_{2j+3}(\gamma)] = 0$$

証明 M_{2j}, M_{2j+1} が上記の様な関係をもつことは，定義により，簡単に示すことができる。次に $M_{2i} \supset M_{2i-2}$ に対する projection (即ち $M_{2i} = \langle M_{2i-2}, e\rangle$) を e とすると，e は

$$e = \sum_{t \in \hat{G}} \sum_{k \in G} (\langle k, t\rangle / |G|^2)\, u_{2i}(k)\, u_{2i+1}(t)\, u_{2i+2}(k)$$

で与えられる。この e を用いると，$u_{2i}(g) \in M_{2i-2}' \cap M_{2i}$ なる事実に注目すれば，次の式を得ることができる；

$$J_{2i} u_{2i}(g) J_{2i} = \sum_{t \in \hat{G}} \sum_{h \in G} u_{2i-1}(t)\, u_{2i}(h)\, e\, u_{2i}(hg)^* u_{2i-1}(t)^*$$

この等式を用いることにより，求める関係式が出てくる。//

次に $M' \cap M_\infty$ における standard $*$-isomorphism の例を掲

げる。

<u>例5.</u> Gは有限可換群だから，Gから$\hat{G}$の上への同型写像ψが存在する。$g\in G$, $\gamma\in\hat{G}$とすべてのiに対して，

$$\rho(u_{2i}(g)) = u_{2i+1}(\psi(g)),\quad \rho(u_{2i+1}(\gamma)) = u_{2i+2}(\psi^{-1}(\gamma))$$

とおけば，ρは$M'\cap M_\infty$から$M_1'\cap M_\infty$への$*$-isomorphismで，basicかつgenerating propertyをもつ。basic projectionは，$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u_2(g)$で与えられる。

§4. M_∞におけるMの正規性

von Neumannのdouble commutant定理の一般化として，Kadisonはvon Neumann環Aの部分環Bが次の条件を充すとき，BはAで正規であると呼んだ；$(B'\cap A)'\cap A = B$。この§では，MがM_∞で正規であることを示す。この正規性は，以下で，self-conjugate (Longoの意味で) な$*$-endomorphismの決定に，基本的な役割を果たす。

<u>命題5。</u> $M\supset N$をII_1-因子環の対で次の条件のうちのどちらかを充すとする；

(i) $[M:N]\leqq 4$

(ii) MはNの有限可換な群Gによる外部作用に関する接合積である。

そのときMはM_∞の中で正規である。

<u>証明。</u> (i)の場合はSkauの補題$\{e_1, e_2, \cdots,\}'\cap M_\infty = N$

を用いる。(iii) の場合には，補題4を用いる。 //

§5. standard $*$-isomorphism の特徴付け

この節では，standard $*$-isomorphism ρ が $M \supset N$ のある種の対に対しては決定されることについて述べる。
$\rho \in \mathrm{End}(M)$ が finite depth のときには，$M \supset \rho(M)$ の関係を調べることは，$M \supset N = \rho(M)$ に対する相対可換子環の tower に対して $M' \cap M_\infty \supset M_1' \cap M_\infty$ での関係を調べることと同値であり，又 $M' \cap M_\infty$ から $M_1' \cap M_\infty$ への $*$-isomorphism を調べることと，$M \supset N$ が超有限連続型有限因子環のときには，同値である。従って $M' \cap M_\infty \supset M_1' \cap M_\infty$ における議論が，本質的な役割を果す。記号の簡略化のため，

$\rho \in \mathrm{End}(M, \tau)$ に対し，$M \supset \rho(M)$ に対する paragraph を，ρ の graph と呼び，$\mathrm{Graph}(\rho)$ で，記すことにする。$\mathrm{Graph}(\rho)$ が A型の coxeter graph のときには，standard なものは，例2で掲げた $\theta(\rho)$ 本質的にはないことを先づ示す。

補題 6. e を $\rho \in \mathrm{End}(M, \tau)$ に対する basic projection とする。$e_j = \rho^{j-1}(e)$ とおくと，列 $\{e_j ; j \geq 1\}$ は $\lambda = (\mathrm{Ind}\,\rho)^{-1}$ に対する Jones の関係（即ち次の関係）を充す；

$$e_i e_j e_i = \begin{cases} \lambda e_i & (|i-j| = 1) \\ e_i e_j & (|i-j| \neq 1) \end{cases}$$

命題 7. M を hyperfinite II_1-factor とし，$\rho \in \mathrm{End}(M, \tau)$ が

standard, Ind $\rho < 4$ とする。Graph(ρ) が Type A ならば，ρ は例2のθである．

<u>証明.</u> e を ρ の basic projection とすると，補題6により $\rho^j(e) = e_j$ は Jones の関係を充す。$\rho(M)' \cap M \supset \{1, e_0, \cdots, e_{j-1}\}''$ で Graph(ρ) が Type A かつ Ind $\rho < 4$ なることより $\rho^j(M)' \cap M = \{1, e_0, \cdots, e_{j-1}\}''$ が得られる．他方 ρ は generating property をもつから $M = \{e_j ; j \geq 0\}''$。従って $\rho = \theta$。 //

次の補題は，$M' \cap M_\infty \supset M_1' \cap M_\infty$ 上の Longo の意味での self-conjugate な $*$-endomorphism は，θ と密接な関係を持つことを示す．

<u>補題 8.</u> $M \supset N$ は II_1-factor の対で，次の (i), (ii) の，いづれかを充すとする；

(i) $[M : N] \leq 4$,

(ii) M は N の外部自己同型写像の有限可換群による接合積．

$M' \cap M_\infty$ から $M_1' \cap M_\infty$ への $*$-isomorphism σ が $\sigma^2(M' \cap M_\infty) = M_2' \cap M_\infty$ を充すならば，次式を充す；

$$\sigma(M_i' \cap M_j) = M_{i+1}' \cap M_{j+1} \qquad (i \leq j).$$

<u>証明.</u> 命題5を用いる事により示せる．

<u>定理 9.</u> M が II_1-factor N の外部自己同型写像の有限可換群による接合積ならば，次の二つの集合の間に，1対1の

対応Φが存在する：

$$\{\rho : *\text{-isomorphism of } M'\cap M_\omega \text{ onto } M_1'\cap M_\omega,\ \rho^2=\Gamma\}/\text{unitary equiv.}$$

$$\Big\updownarrow \Phi$$

$\{(\gamma,\psi)\,;\,\gamma\in\hat{G},\ \psi$ は G から $\hat{G}$ の上への同型写像$\}$.

<u>証明。</u> 補題4により $\Gamma(u_{2i}(g))=u_{2i+2}(g)$ かつ $\Gamma(u_{2i+1}(\gamma))=u_{2i+3}(\gamma)$ $(g\in G,\ \gamma\in\hat{G})$ が判る。 G から $\hat{G}$ への同型写像 ψ と $\gamma\in\hat{G}$ に対して,

$$\begin{cases}\rho(u_{2i}(g))=\langle\gamma,g\rangle\, u_{2i+1}(\psi(g)) & (g\in G)\\ \rho(u_{2i+1}(\chi))=\langle\gamma,g\rangle^{-1}\, u_{2i+2}(\psi^{-1}(\chi)) & (\chi\in\hat{G})\end{cases}$$

と定義する。 この ρ は求める条件を充すこと, 条件を充す ρ は必らずこの関係を充すような $\{\gamma,\psi\}$ を持つこと 又, この様な $\rho\longleftrightarrow\{\gamma,\psi\}$ なる関係は1対1なること等が示せる. //

<u>系10.</u> M を命題9に於けるものとする。 $M'\cap M_\omega$ から $M_1'\cap M_\omega$ への $\rho^2=\Gamma$ を充す $*$-isomorphism は $\rho(e_i)=e^{\gamma}_{i+1}$ $(\gamma\in\hat{G})$ を充す. ただし e^{γ}_{i+1} は次で定義される.

$$e^{\gamma}_{2i}=\frac{1}{|G|}\sum_g\overline{\langle\gamma,g\rangle}\,u_{2i}(g),\quad e^{\gamma}_{2i+1}=\frac{1}{|G|}\sum_g\langle\gamma,g\rangle\,u_{2i+1}(\psi(g)),$$

ψ は G から $\hat{G}$ の同型写像。 この e^{γ}_{2i+1} は ψ の取り方に依らぬ.

<u>定理11.</u> $M\supset N$ は II_1-factor の対で $[M:N]\leqq 4$ とする。 σ を $M'\cap M_\omega$ から $M_1'\cap M_\omega$ への $*$-isomorphism で $\sigma^2(M'\cap M_\omega)=M_2'\cap M_\omega$ を充すとする。

(1) $[M:N]=2$ ならば $\sigma(e_i)=e_{i+1}$ $(\forall i)$ であるか又は

$\sigma(e_i) = 1 - e_i$ $(\forall i)$ かである。

(ii) $[M:N] \neq 2$ かつ $\dim(M' \cap M_2) = 2$ ならば,

$\sigma(e_i) = e_{i+1}$ $(\forall i)$ である。

証明. 先づ $[M:N] = 2$ ならば $\dim(M' \cap M_2) = 2$ が成立する事に注意する. の条件より補題8を用いて, $\sigma(M_i' \cap M_j) = M_{i+1}' \cap M_{j+1}$ 従って, $\sigma(\{e_i\}'') = \{e_{i+1}\}''$ が成立する。この事より (ii)の場合は簡単に成立する。(i)は, 系10による。//

補題12. $R \subset A$ を II_1-factor の対で, $[M:R] > 2$ かつ $\dim(R' \cap \langle A, e_R \rangle) = 2$ とする。$\sigma, \rho \in \mathrm{End}(A, \tau)$ が R 上で一致し $\sigma(A) = \rho(A)$ を充すならば $\sigma = \rho$。

定理11と補題12により, self-conjugate な $*$-endomorphism, 即ち $\rho^2 = \top$ となる様な ρ は, 決定できる事が判る。それを指数4以下の hyperfinite II_1-factor の対に対して示す。尚, 定理11を適用できる様な hyperfinite でない II_1-factor の対の面白い例としては, popa が最近与えたものがある。以下でする議論は他の指数の場合にも, 適用可能である。詳しくは, 他の場所で, 示す積りである。

応用1. $M \supset N$ が paragraph A_n を持つ場合.

$\dim(M' \cap M_2) = 2$ が成立する。$[M:N] = 2$ ならば, 定理11により $\sigma(e_i) = e_{i+1}$ $(\forall i)$ か $\sigma(e_i) = 1 - e_{i+1}$ $(\forall i)$ かが成立する。従って, 定理9により, $\sigma^2 = \top$ となるものは,

2つ存在する。$[M:N] \neq 2$ ならば定理11により $\sigma^2 = \mathrm{I}$ となるσは唯一つだけ存在し，それは例2のθでなければならぬ。

<u>応用2.</u> <u>$M \supset N$ の paragraph が D_n のとき.</u>

$A = M' \cap M_\infty \supset B = M_1' \cap M_\infty$ とし，$R = \{e_i ; i \geqq 2\}'' \supset R_\lambda = \{e_i ; i \geqq 3\}''$ とする。$\begin{matrix} A & \supset & B \\ \cup & & \cup \\ R & \supset & R_\lambda \end{matrix}$ は commuting square をなし

$R \supset R_\lambda$ の paragraph は A_{2n-3} である。このとき $A \supset B$ と $R \supset R_\lambda$ の関係は，Okamoto の結果により，D_n と A_{2n-3} との関係のみによって決定される。所で D_n と A_{2n-3} の関係は，それを Bratteli diagram とみなすことにより，D_n は A_{2n-3} の周期2の outer automorphism による接合積とみなされるから $A \supset B$ は $R \supset R_\lambda$ の周期2の outer automorphism による接合積と考えられる。

<u>補題13.</u> $\sigma \in \mathrm{End}(A, \tau)$ に対し，$E_\sigma(e) = (\mathrm{Ind}\,\sigma)^{-1}1$ となる射影 $e \in R$ が存在するとする。$E_R(u) = 0$ となるユニタリ $u \in M$ に対して，$E_R(\sigma(u)) = 0$ が常に成立する。

<u>補題14.</u> A が II_1-因子環 R の外部自己同型写像のなす有限可換群の接合積で $\sigma \in \mathrm{End}(A, \tau)$ は既約であるとする。すると $\hat{G}$ と $\{\rho \in \mathrm{End}(A, \tau) ; \rho(A) = \sigma(A), \rho|R = \sigma|R\}$ との間には1対1の対応が存在する。

$M \supset N$ の paragraph が D_n 型のとき，n は偶数でなければ

ならぬことが，Ocneanu，河東，泉等により示されているが，D_4 と D_n $(n \neq 4)$ とでは，self dual $*$-endomorphism の決定に，大きな違いが生じる。理由は，D_4 のときには，$\dim(M' \cap M_2) = 3$ で，D_n $(n \neq 4)$ のときには，$\dim(M' \cap M_2) = 2$ に依る。

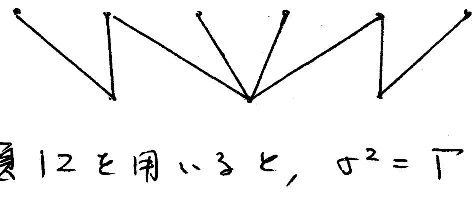
paragraph が D_4 のときには，定理9により，$\sigma^2 = \mathrm{I}$ となる A から B への $*$-isomorphism σ は6個存在する。paragraph が D_n $(n \neq 4)$ のときには，定理11，補題13，補題14により，求める σ は2個で，互いに可換である。

<u>応用3.</u>　<u>$M \supset N$ の paragraph が E_6 のとき</u>.

$[M:N] > 2$ かつ $\dim(M' \cap M_2) = 2$ なることが，E_6 のグラフから判る。応用2のときと同様な形で，A，B，R，R_λ を置く。このとき $R \supset R_\lambda$ の包含関係は，A_{11} なるグラフによって，決定される。従って，$A \supset R$ の関係は，十分大きな n に対して，

$$\begin{matrix} \{e_2, \cdots, e_{2n}\}'' & \subset & \{M' \cap M_{2i}\} \\ \cup & & \cup \\ \{e_3, \cdots, e_{2n}\}'' & \subset & \{M_1' \cap M_{2i}\} \end{matrix}$$

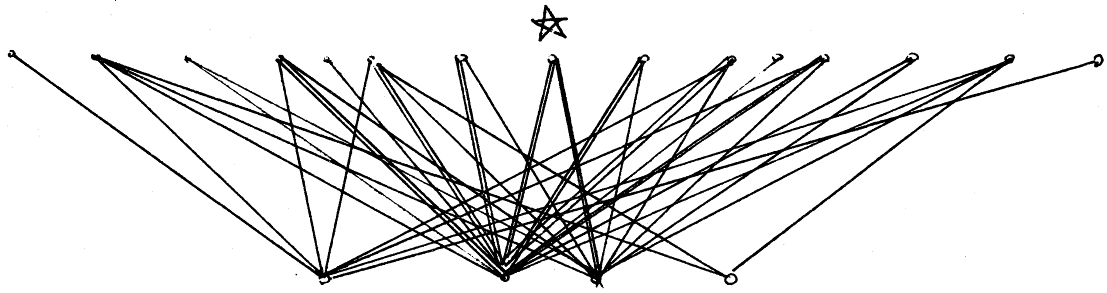
なる commuting square で決まるが，これらは，Evans-Gould，Okamoto，pasquier 等の結果を用いると，次のグラフで表わされる；



この事と補題12を用いると，$\sigma^2 = \mathrm{I}$ となるものは，Ocneanu による $*$-endomorphism 1個ないことが判る。

応用4. $M \supset N$ の paragraph が E_8 のとき

応用3のときと同様に、$[M:N]>2$ かつ $\dim(M' \cap M_2)=2$ となることが E_8 のグラフから判る。 A, B, R, R_λ を応用2のときと同様に定めると、求める $*$-isomorphism (AからBへの)は R を R_λ に移し、R上では、unique であることが判る(定理11)。 又 $A \supset R$ の関係は、応用3のときと同様な方法で求められ、グラフ A_{29} から求まる環のグラフ E_8 から求まる環へのうめこみにより、決定される。 Evans-Gould の結果を用いると、それは、次の様なグラフで表わすことが可能になる。



図では見えにくいかも知れないので、このグラフを行列で表わすと、次の様になる。 ただし紙面の都合上、転置行列を示す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

グラフの☆を中心にして、上段の頂点を左右対称に移し☆と下段の頂点は動かさない様な写像はグラフの自己同型写

像となり，Ocneanuの不変量て，μ, w を保存するので，Aの自己同型写像で，Rを不変にする。又上のグラフから $R' \cap \langle A, e_R \rangle$ の中に，e_R とトレースの値が等しい射影は，他にもう一つしか存在しないことが判る。以上のことを総合すると，$\sigma^2 = \Gamma$ となる $M' \cap M_\infty$ から $M_1' \cap M_\infty$ への同型写像は2つであることが導ける。

Ocneanuの結果より，$M \supset N$ が $[M:N] < 4$ なる hyperfinite II_1-factor の組のときには，上のどれかでなければならないことより，その様な組についてのみ議論した。この方法により，$A \supset R$ の関係が決定できる組合せならば，他の場合についても議論可能である。

参考文献（順不同）

⊙ V. F. R. Jones : Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1–15.

⊙ F. Goodman, P. dela Harpe, V. F. R. Jones; Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI publications 14, Springer, 1989

⊙ A. Ocneanu ; Quantized group string algebras and Galois theory for algebras, in "Operator algebras and applications", vol. 2 (Warwick, 1987), London Math. Soc. Lecture note 136.

⊙ S. Popa, Classification of subfactors : reduction to commuting squares, Invent. Math. 101 (1990), 19–43.

⊙ D. Evans, J. D. Gould; Embeddings and dimension group of non-commutative AF algebras associated to models in classical statistical Mechanics, preprint

⊙ S. Okamoto; Invariants for subfactors arising from coxeter graphs, preprint.

⊙ R. Longo; Index of Subfactors and statistics of Quantum fields, I, II. Commun. Math. Phys. 126 (1989) 217—247, 130 (1990), 285—309.

⊙ M. Pimsner, S. Popa; Iterating the basic construction, Trans, Amer. Math. Soc., 310 (1988), 127—133.

⊙ Y. Kawahigashi; On flatness of Ocneanu's connections on the Dynkin diagrams and classification of subfactors preprint.

⊙ M. Izumi; in preparation.

⊙ M. Choda; Entropy for canonical shifts, to appear in Trans, Amer, Math. Soc.

⊙ M. Choda, Hiai; Entropy for canonical shifts II, to appear in RIMS, Kyoto Univ.

⊙ M. Choda; Duality for finite bipartite graphs.

⊙ R. T. Powers; An index theory for semigroups of $*$-endomorphisms of $B(H)$ and Type II_1 factors, Canad. J. Math., 40 (1988), [illegible]