数理解析研究所講究録
第754巻 1991年 237-246

n点コンフィグレーションの単体分割における単体数の評価

東京大学理学部情報科学科　青木保一(Yasukazu Aoki)

要約

d次元空間内のあるn点コンフィグレーションを単体分割して得られる単体の数は、$d=2$の場合には一定の値になるが、$d \geqq 3$の場合には単体分割の方法により変化する。ここでは、d次元空間内の一般の位置におかれたn点コンフィグレーションに対して単体分割の方法を変えることにより得られる単体の数の最大値や最小値を、さらにn点の与え方を変えることによって最大かあるいは最小化するという問題について考える。単体分割方法に関する単体数の最小値をn点の与え方に関して最大化したときの値をMaximin(d,n)のように表すものとする。これまでの研究により、Minimin$(d,n)=n-d$, Maximax$(d,n)=O(n^{[(d+1)/2]})$という結果が得られているが、Maximin や Minimax については具体的な評価が難しく、あまり詳しい結果は得られていない。本稿では特に$d=3$の場合を中心にこれらの値の評価を行い、n点のうちc点が凸包境界上にある場合は、Minimax$\geqq 3n+c-25$, Maximin$\leqq 3n-c-7$ ($c>12$の場合に限れば、Maximin$\leqq 3n-c-10$) という新しい結果を得ている。

1. はじめに

平面上にn点が与えられており、どの3点も同一直線上にはないものとする。いま、それらのn点が作る凸包の境界上の点の数をcとする（即ち、凸包はc角形となっている）。

ここで、与えられたn点を頂点とする三角形によりその凸包内部を分割するという問題について考えてみる。三角形分割の方法は何種類も存在するが、分割によって得られる三角形の数は分割の方法によらず一定の値となる。得られる三角形の数を$T_2(n, c)$と表すことにすると、2次元のオイラーの公式を用いて計算することにより、

$$T_2(n, c) = 2n - c - 2$$

となる。この問題を一般化して考えてみることにする。即ち、d次元空間内にどのd＋1点も同一超平面上にはないようにn点が与えられており、それらのn点のうちのc点が与えられたn点の作る凸包境界上にある時、その凸包内部を与えられたn点を頂点とする単体により分割して得られる単体の数は幾らか、という問題を考えてみる。3次元以上の空間においてはそもそもこのような単体分割が常に可能であることすらそれほど明白ではない。3次元空間内の凸ではない多面体の中にはこのような単体分割が不可能なものも存在するということが知られており[2, 4]、さらに、多面体が4面体分割できる場合でも分割方法によって得られる多面体の数は変化してしまう。一般に凸包の単体分割は常に可能ではあるが、dが3以上の場合には$d = 2$の場合とは異なりn点の与え方を固定しても分割の方法によって得られる単体の数は変化してしまい、2次元の場合のように等式の形で単体数を表すことはできなくなる。いま、n点の与え方を固定して可能なすべての単体分割を行い、その際に得られる単体数の最大値を$T_d(n, c)$，最小値を$t_d(n, c)$と表すことにする。ここで、Maximax, Maximin, Minimax, Miniminを次のように定義する。次の式の中のminやmaxは、nとcの値を一定に保ったままn点の与え方をすべての場合に渡って変化させて得られる最小値や最大値であるとする。

$$\mathrm{Maximax}(d, n; c) = \max T_d(n, c)$$
$$\mathrm{Maximin}(d, n; c) = \max t_d(n, c)$$
$$\mathrm{Minimax}(d, n; c) = \min T_d(n, c)$$
$$\mathrm{Minimin}(d, n; c) = \min t_d(n, c)$$

Maximax(d, n)のようにcの部分を省略した場合には、上の式の中の min や max の意味としてnの値のみを一定に保ったままでn点の与え方をすべての場合に渡って変化させた時の最小値や最大値を考えてそれらの値を定義したものであるとする。点の数を固定した場合に面の数の上限値を与える多面体や下限値を与える多面体についてはこれまで数多くの研究がなされており、それらの結果から上で定義した Maximax や Minimin に関しては次の式のようにほぼその値を求めることができる。

(1) $\mathrm{Maximax}(d, n) = O(n^{[(d+1)/2]})$
(2) $\mathrm{Minimin}(d, n) = n - d$

(1)の結果は次元が一つ大きい空間内の超多面体の面の数を評価することによって得られる。面の数の上限は超多面体のfベクタ、hベクタに関する関係式から計算により得られ、面の数の下限は実際にそれだけの数の面を持つような超多面体を具体的に構成することにより(すべての点がモーメントカーブ上に位置するような超多面体がそれにあたる)得られる。両者のオーダーは上の(1)の右辺に一致し、その結果、(1)の式が得られることになる。(2)の結果は単体分割の双対グラフが木となる場合に対応している。ここで言う単体分割の双対グラフとは、分割により生じる各単体をグラフの点集合とし、単体と単体が面(超平面)で接している時に対応する点どうしを辺で結ぶことにより得られるグラフのこ

とである。

残念ながら、Maximin や Minimax に関しては一般のd次元において値を評価することは難しく、関連する結果もあまり得られていない。本稿では $d=3$ の場合についてこれらの値を評価し、その方法を一般のd次元に拡張して、Maximin や Minimax といった値の評価を行うことがどの程度まで可能なのかを議論することにする。

2． Maximin(3, n ; c)の値の評価

Maximin の値を上から評価するにはn点を一般の位置でどのように与えても必ずある決まった数以下の単体に分割することができるような単体分割のアルゴリズムが存在することを示せばよい。ここでは具体的にそのようなアルゴリズムを構成して値の評価を行うことにする。

まず、与えられたn点がすべて凸包境界上にある場合、つまり、$n=c$ の場合を考える。

補題 1　$\mathrm{Maximin}(3, c ; c) \leq 2c-7$
特に、$c>12$ の場合には、
$\mathrm{Maximin}(3, n ; c) \leq 2c-10$

［証明概略］　c点からなる凸多面体を実際に $2c-7$ 個以下の4面体に分割する方法を示す。それには、多面体の頂点と辺が作るグラフの次数最大の点をvとし、多面体の面のうちで頂点としてvを含まないようなものすべてに対してvとそれらの三角形が作る4面体を考えればよい。このような4面体はもとの多面体を分割しており、その数は多面体の面の数から頂点vの次数を引いたものに等しくなる。多面体の各

面は三角形であり、オイラーの公式を用いて計算すれば、面の数は$2c-4$であることがわかる。またグラフの最大次数は一般に3以上、特に$c>12$の場合には次数の和を計算することにより6以上となることが分かる。このようにして得られる4面体の数は一般に$2c-7$以下、特に$c>12$の場合には$2c-10$以下となる。■

この結果をもとに凸包内部に点がある場合について考えることにより、次の定理を得る。

定理 1 $\mathrm{Maximin}(3, n; c) \leqq 3n-c-7$
特に、$c>12$の場合には、
$\mathrm{Maximin}(3, n; c) \leqq 3n-c-10$

［証明概略］ まず、補題1で述べた方法により凸包境界上のc点のみを用いて凸包内部の4面体分割を行う。次に、内部の点vについてはその点が含まれている4面体を考え、その4面体1個の代わりに4面体の各三角形の面と点vとが作る4個の4面体を用いて凸包全体の4面体分割を行うことにする［1］。内部の各点に対してこのようにして4面体1個を4面体4個に置き換えることにより最終的に得られる4面体分割における4面体の数は、

$$2c-7+3(n-c)=3n-c-7$$

以下（$c>12$の場合は$3n-c-10$以下）となる。■

$\mathrm{Maximin}(3, n; c)$の値についての下からの評価に関しては次の結果が知られている［5］。

$$\mathrm{Maximin}(3, c; c) \geq 2c-10$$
（cは十分大で$c=10k^2+2$の形をしている場合）

この結果は、3次元の双曲線幾何を利用してc点からなる多面体の最大体積を考えることにより得られ、$c>12$の場合すべてについて成り立つだろうと予想されている。これらのことから$c=n$の場合に関しては、Maximinの値の上からの評価と下からの評価は多くの場合に一致し、その場合には、Maximinの値を正確に求めることができることになる。

3. Minimax(3, n; c)の値の評価

Maximinの場合と同様にMinimaxの値を下から評価するにはn点を一般の位置でどのように与えても必ずある決まった数以上の単体に分割することができるような単体分割のアルゴリズムが存在することを示せばよい。ここではそのようなアルゴリズムを具体的に示すことにする。

まず、与えられたn点がすべて凸包境界上にある場合、つまり、$n=c$の場合を考える。

補題2 $\mathrm{Minimax}(3, c; c) \geq 4c-25 \quad (c>12)$

［証明概略］ $c>12$のとき、c点からなる凸多面体を実際に$4c-25$個以上の4面体に分割する方法を示す。まず、多面体の頂点と辺が作るグラフの次数最大の点をvとし、点v以外の$(n-1)$点が作る凸包境界上の面で点vから見えるすべてに対して点vとそれらの三角形が作る4面体を考えると、これらの4面体はもとの凸多面体の内部で、かつ点v以外の$(n-1)$点が作る凸包の外部にある部分を4面体分割している。これらの4面体の数は頂点vの次数から2を引いたものに等

しく、 $c>12$ の場合にはグラフの最大次数が6以上であることから、その数は4以上であることが分かる。点vの残りの点が作る凸包に対してこれと同様な方法を繰り返して次々と4面体を作ることにより、もとの凸多面体の4面体分割を行うことができる。 $c\leqq 12$ 以下の場合を別に考えることにより、このようにして作られる4面体分割において、最終的に得られる4面体の数は $4c-25$ 以上となる。 ■

この結果をもとに Maximin の場合と全く同じ方法を用いて凸包内部に点がある場合の4面体分割を行うことにより、次の定理を得る。

定理 2 $\mathrm{Minimax}(3,n;c)\geqq 3n+c-25\quad(c>12)$

残念ながら、 $\mathrm{Minimax}(3,n;c)$ の値に関する上からの評価に関しては次の自明な結果しか知られていない。

$$\mathrm{Minimax}(3,n;c)\leqq \mathrm{Maximax}(3,n;c)$$

4. 一般のd次元空間におけるMaximinやMinimaxの評価

これまでに述べたような方法を一般のd次元に拡張して適用することにより、 Maximin や Minimax に関して次のような評価を得ることができる。

定理 3 (1) $\mathrm{Maximin}(d,n;c)$

$$\leqq d(n-c)+\mathrm{Maximin}(d-1,c;d)+1-d$$

(2) $\mathrm{Minimax}(d,n;c)$

$$\geqq d(n-c)+\mathrm{Minimax}(d-1,c;d)+1-d$$

この定理を用いてだいたいの評価を行うと次のようになる。

(1) Maximin(d,n) ≦ dn
(2) Minimax(d,n) ≧ dn

(1)の結果は、Maximin(d,n) ≧ Minimin(d,n) = n−d ということと合わせて考えると、ある固定されたdに対してはMaximinのオーダーはnに関する1次式で表されることを意味している。しかし、残念ながら(2)の結果はMinimaxの値についてあまり意味のある情報を提供しているとはいえない。定理3の(2)の不等式自体、それほどよい評価ではなく、Minimaxの値の評価に関してはd＝3の場合の方法を一般の次元にまで拡張して適用することの利点はほとんどないといえる。

5. むすび

計算幾何学的な問題を解こうとする場合、単体分割は最も基本的な道具の一つである。計算幾何学的な数多くの問題において問題解決のための手段として単体分割が利用され、しかもそういった場合に、計算時間や計算に必要な記憶スペースといった点からみて単体分割問題自体が問題そのものの本質的な部分となっていることも多い。そのような問題の複雑さを正しく評価するためには、単体分割問題の時間的、空間的複雑さを正確に評価することが必要になってくる。単体分割問題のそういった複雑さは単体分割により生じる単体の数にほぼ比例すると考えることができるので、単体数の正確な評価はこの点からも必要性があるといえる。特にMaximinのようになるべく少ない数の単体によって与えられたn点の作る凸包を単体分割しようとした場合に最悪のコンフィギュレ

ーションに対してはどのくらい多くの単体ができてしまうかといった値を正確に評価することが大切である。Maximaxのような形に問題を単純化してしまってはこのような意味での正確な評価を与えることは難しくなってしまう。最後に、今後の研究課題として考えられるものを挙げておくことにする。

（1）Maximin(3，c；c)の下からの評価の式におけるcの条件の改善や、より一般的にMaximin(3，n；c)をnとcの式として下から評価すること、さらに、双曲線幾何を用いた評価方法を一般のd次元に拡張して、Maximin(d，n；c)の下からの評価を行うこと。

（2）d＝3の場合も含めて、Minimax(d，n；c)の自明でない上からの評価を行うこと。d＝3でc＝nの場合についてですらこの値に関する意味のある上からの評価は得られていない。

（3）Minimax(d，n；c)の下からの評価のオーダーを改善すること。予想としては、Minimax(d，n；c)の値のオーダーがnやdに関する1次式ではないと考えられている。

参考文献

[1] D.Avis and H.Eigindy, "Triangulating simplicial point sets in space", Discrete Computational Geometory 2,99-111,(1987)

[2] B.Chazelle and L.Palios,"Triangulating a Nonconvex Polytope", Proceeding of the 5th Annual ACM Symposium on Computational Geometry,393-400,(1989)

[3] B.L.Rothschild and E.G.Straus,"On triangulation of the convex hull of n points", Combinatorica 5(2), 167-179,(1985)

[4] J.Ruppert and R.Seidel, "On the difficulty of tetrahedralizing 3-dimensional Non-Convex Polyhedra", Proceedings of the 5th Annual ACM Symposium on Computational Gemetry,380-392,(1989)

[5] D.D.Sleator,R.E.Tatjan and W.P.Thurston,"Rotation distance, triangulation, and hyperbolic geometry", Proceedings of the 18th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 122-135,(1986)