数理解析研究所講究録
第756巻1991年 172-184

射影空間への埋め込みの構造問題の周辺

― Syzygyと Normal束 ―

高知大 理 遊佐 毅

(Takeshi Usa)

§0 全体について

本稿では、まず§1で、これまでに得られた結果のうちのいくつかをふりかえり、それらから現在(作業仮設として)考察している「射影空間への埋め込み」が持つ一般的な”構造”に関する「問題」(c.f. (1.5))を述べ、次に§2で、それへのひとつのアプローチとして最近得られた結果を説明し、最後に§3でその証明の概要を述べることにする。

§1 これまでの結果と「問題」について

まず本稿を通して使用される記号、状況設定、及び仮定について整理、確認しておく。

(1.0) Notation, Convention, and Assumption

X … non-singular projective variety / $\mathbb{C}$

$\dim X = n > 0$.

$j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = P$ … arithmetically normal embedding

($i.e.$ $H^0(P, \mathcal{O}_P(m)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ surj. $\forall\ m \geq 0$)

※本来の主旨からいえば、一般の埋め込みに比べ相当きつい条件を課していることになるが、これはどんな X に対しても、適当な修正によりこの条件を満たす埋め込みが構成できるという理由で、研究の第一歩としては全体像を大まかにスケッチすることを優先し、敢えて理想的な条件を科すのである。

$\omega \in H^1(X, \Omega^1{}_X)$ … 埋め込み jの誘導する Hodge-Kahler 類

$\mathcal{O}_X(1) = j^*\mathcal{O}_P(1)$ … 埋め込み j の誘導する ample直線束

E … X 上の正則ベクトル束 ($= \mathcal{O}_X$-locally free sheaf)

$$L : H^q(X, \Omega^p{}_X(E)) \xrightarrow[\wedge\,\omega]{\sim} H^{q+1}(X, \Omega^{p+1}{}_X(E))$$ … ω の定める Lefschetz 作用素

これから我々が話題としたいのは、法ベクトル束 $N_{X/P}$ を手懸かりとして埋め込み j の持つ幾何的な性質を調べることにある。もう少し詳しくいうと、$E = N^{\vee}{}_{X/P}(m)$ として上記の Lefschetz作用素を考え、その退化の様子を元に、そ

れが生じる幾何的な状況を理解していこうという立場に立つのである。まず一般の E について、事実の確認する。

(1.1) Fact. (i) $E = \mathcal{O}_X$ の場合 ⇒ 強Lefschetz 定理（あるいは Lefshetz 分解定理）

(ii)一般の E において適当に Hermite内積を与え、対応する Laplace-Beltrami 作用素 $\overline{\Box}_E$ と曲率（作用素）Θ_E に対し、公式 $[\overline{\Box}_E, L] = \sqrt{-1}\,\Theta_E$ が成立する。随って、曲率が零となる Hermite内積を持つ E に対しては同様の強 Lefschetz 定理が得られるが、例えば、Chern 類が消えないような E に対しては直ちに一般化を行なうわけにはいかないことが予見される。そして以下で見るように、実際に、強 Lefschetz 定理から類推される程度以上に Lefschetz 作用素の kernel が大きくなることが起こり得る。

今度は、$E = N^{\vee}{}_{X/P}(m)$ （$^{\vee}$ は dual の意味）の場合について考えると、次のような定理が成立する。

(1.2) Theorem. 上記 (1.0) の状況設定と仮定の下に…

$k \geq 1,\quad L^k : H^0(X, N^{\vee}{}_{X/P}(m)) \to H^k(X, \Omega^k{}_X(N^{\vee}{}_{X/P}(m)))$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(L^k) = s$

$\Rightarrow \exists F_1, \cdots, F_s \in H^0(P, I_X(m)),$

$\{L^k([F_j]) \mid j=1, \cdots, s\}$ が $\mathrm{Im}(L^k)$ を張る。

ここで $[F_\gamma] \in H^0(X, N^\vee{}_{X/P}(m))$ は X の m次斉次方程式 $F_\gamma \in H^0(P, I_X(m))$ の自然な像を表す。実はさらに、この $\{F_1, \cdots, F_s\}$は、$H^0(P, I_X(*))$ を $H^0(P, O_P(*)) \simeq \mathbb{C}[Z_0, \cdots, Z_N]$ の斉次イデアルとして見た時に必ず<u>極小生成系の一部</u>(このようなものに属する元を"projective equation"と呼ぶ)となっていることも示せる。

ついでに次のような概念も定義しておく。

<u>(1.3) Definition</u>. X の projective equation $F \in H^0(P, I_X(m))$について $L^k([F]) \neq 0$ であってしかも $L^{k+1}([F]) = 0$ の時、F の<u>透過次数(penetration order)</u>は k であるといい、 $\mathrm{pent}(F) = k$ とかく。

この概念を利用して、我々の状況設定(1.0)のもとで、X の projective equation で透過次数が k 以下のものを集めて、それが定義する P の閉部分スキームを W_k とすることにより、常に次のような(一般には一意的とは限らないが) X を含む P の閉部分スキームの昇鎖列が生じることが分かる。

$$X = W_n \subseteq W_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq W_0 \subseteq P$$

この閉部分スキームの列の詳しい性質はまだよく分からない

が X の内在的な性質とも深く係わり(e.g. X の中の特殊な代数的サイクルの存在…)、arithmetically normal な埋め込みの幾何学的な性質を調べようという我々の立場からすれば非常に興味の持てる対象であると思われる。例えば、簡単に示せる興味深い一般的な性質のひとつとして、次の完全列が常に分裂することが示せる。

$$0 \to \mathrm{Im}(N^{\vee}_{W_{n-1}} \otimes \mathcal{O}_X) \to N^{\vee}_X \underset{\curvearrowleft\ \text{split}}{\to} N^{\vee}_{X/W_{n-1}} \to 0$$

$$N^{\vee}_{X/W_{n-1}} = \mathcal{O}_X(-m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(-m_t)$$

ここで $t = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}[L^n : H^0(X, N^{\vee}_{X/P}(*)) \to H^n(X, \Omega^n_X(N^{\vee}_{X/P}(*)))]$ 。

この性質と関連していると思われる典型的な例をひとつ与えておく。

<u>(1.4) Example.</u> $W := \mathrm{Im}[\Phi_d : \mathbb{P}^{n+t}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = P]$ $d \geq 3$, Φ_d は d次 Veronese 埋入。 $S_1, \cdots, S_t$ を P の超曲面で $\deg S_j = m_j$, $X := W \cap S_1 \cap \cdots \cap S_t$ (transversal)とおく。 $\Rightarrow$ $X = W_n \subset W_{n-1} = \cdots = W_0 = W \subset P$. (この時は $W_0, \cdots, W_{n-1}$ は一意的に定まる)

ここで最初に述べた「問題」について説明する。

(1.5) Working Problem. 状況設定 (1.0)において…

(1.5.1) 各 W_k が既約かつ被約な P の閉部分多様体であって、しかも $\mathrm{Reg}(W_k) \supset X$ となるようにとれるか？

(1.5.2) $N^{\vee}_{X/P} = \mathcal{O}_X(-m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(-m_t) \oplus E$

$\Rightarrow$? $\exists S_1, \cdots S_t$ (P の超曲面 ; $\deg S_j = m_j$)

$\exists W$ (Pの既約かつ被約な閉部分多様体, $\mathrm{Reg}(W) \supset X$)

$X = S_1 \cap \cdots \cap S_t \cap W$ (transversal)

これらの問題のうち、後者の (1.5.2) は前者の (1.5.1)の特殊な場合とほぼ見なせることは直ちに分かる。ここでは、この問題(1.5.2) に関連した事項を列挙しておく。

(1.6) Remark. (ア) 上の状況で $E = \phi$ の場合は (1.2) Theorem により O.K. となる。

(イ) 埋め込み j の arithmetically normal という仮定をせぬ場合の既知の結果などについては以下のとおり。

◎ (Faltings) $n \geqq N/2$, $E = \phi$ $\Rightarrow$ $X = S_1 \cap \cdots \cap S_t$

(完全交叉)

◎ (Griffiths, Harris, Hulek) $\mathrm{rk}(E) = 1$, 超曲面 $S_1, \cdots, S_t$が存在し $S_1 \cap \cdots \cap S_t$ が smooth な完全交叉

$\Rightarrow \exists W$ (実際には超曲面), $X = S_1 \cap \cdots \cap S_t \cap W$

(dimX = 1 の時だけが問題！)

（ウ）rk(E) ≧ 2 については今のところ結果はなし。

（余次元の高い代数的サイクルの統制をつける手段が今のところ見当たらない…）

（エ）F を $N^{\vee}_{X/P}$ の部分ベクトル束と見て、formal neighborhood の手法を適用すると higher obstructions, convergence, algebraizability … などの各部分においてかなり深刻な困難が生じる。

さて、スキーム論の立場からものを考える場合、一番の鍵となるのは、W_{n-1} の次元の評価である。随って、一つのアプローチとして、（余）法ベクトル束の情報からどれだけ多くの X や W_{n-1} のそれとみなせる syzygy の情報をひきだせるかを研究するという方法が挙げられる。以下の§2に挙げた最近の結果もその線に乗ったものである。

§2 最近の結果

次の主定理が最近得られた結果である。

(2.1) Main Theorem. X, $j: X \hookrightarrow P$ は (1.0) と同様の設定及び仮定をする。 $m, q \in \mathbb{Z}$, $q \geqq 0$。今 $\phi \in H^0(X, \Omega^{q+1}_P(m) \otimes O_X)$ を勝手に選び一つ固定する。

以下のこのϕに関する三つの条件はすべて互いに同値。

(2.1.1) $\exists\, \psi^{\#} \in H^0(P, \Omega^{q+1}{}_P(m) \otimes O_P/I_X{}^2)$, $\psi^{\#}|_X = \phi$.

(2.1.2) $\exists\, \psi^{\wedge} \in \mathrm{Inv.}\lim_{a} H^0(P, \Omega^{q+1}{}_P(m) \otimes O_P/I_X{}^a)$,

$\psi^{\wedge}|_X = \phi$.

(2.1.3) $\exists\, \psi \in H^0(P, \Omega^{q+1}{}_P(m))$, $\psi|_X = \phi$.

この結果についていくつか補足しておく。

(2.2) Remark. (ア) 与えられたϕに対し、たとえ$\psi^{\#}$が得られても、その$\psi^{\#}$から直接に$\psi^{\wedge}$やψが構成できるとは限らない(∃higher obstruction !)。

(イ) 実は (2.1.1)~(2.1.3) の条件が成立しない ϕ は以下に見るように syzygy の極小生成系に由来して生じる。そのため同一の空間 $H^0(X, \Omega^{q+1}{}_P(m) \otimes O_X)$ 内に P における"大局的な"条件(2.1.3)を満足する元と、そうでない元が一般には混在しており、それらを条件(2.1.1)、すなわち X の P 内での無限小1次近傍の情報を用いて判別できる点でこの結果の利用価値が生じてくる。

(ウ) 条件 (2.1.2)と(2.1.3)の同値性はより一般的な Hironaka-MatsumuraのG-3 Theorem によっても導かれる。

(エ) q=0 の場合は以前に公表した結果と一致し、これはその一般化となっている。

(2.3) Corollary. X, $j : X \hookrightarrow P$, m, q については上の主定理(2.1)と同様の仮定。

$R = H^0(X, \mathcal{O}_X(*))$, $S = H^0(P, \mathcal{O}_P(*)) \simeq \mathbb{C}[Z_0, \cdots, Z_N]$,

$J_+ = (Z_0, \cdots, Z_N)S$,

$L_\cdot$: $\cdots \to L_{q+1} \to L_q \to \cdots \to L_0 = S \to R \to 0$ (Rの極小次数付 S-自由分解)

K_{q+1} := [the $(q+1)$-th syzygy module of R over S]

$= \mathrm{Ker}[L_q \to L_{q-1}]$ (便宜上 $L_{-1} = R$ とする)

この時、以下のような標準的な単射及び全単射写像が存在する。

$$[K_{q+1} \otimes S/J_+]_{\langle m \rangle} \simeq$$

$$H^0(X, \Omega^{q+1}{}_P(m) \otimes \mathcal{O}_X)/\mathrm{Im}[H^0(P, \Omega^{q+1}{}_P(m) \otimes \mathcal{O}_P/I_X{}^2)] \xhookrightarrow{\delta^{(q+1)}_{LFT}}$$

$$H^1(X, \Omega^{q+1}{}_P(m) \otimes N^\vee{}_{X/P})$$

ここで $\langle m \rangle$ はその加群の $\deg = m$ の元全体のなす部分加群を表す。

(2.4) Remark. この(2.3)の結果は R の $(q+1)$番目のsyzygy加群の極小生成系の次数 m の元の個数がちょうど $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(\delta^{(q+1)}_{LFT})$ と一致することを示している。この $\mathrm{Im}(\delta^{(q+1)}_{LFT})$ の次元を評価する手段がいくつかある (e.g.

Lefschetz 作用素）。以上の結果の問題(1.5)への応用については現在進行中であり、いずれ別の処で報告するつもりでいる。

§3　証明の概要について

ここでは主定理(2.1)の証明に表れる際立つ特徴を持った部分を列挙してみるにとどめる。

$P=\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ における Euler完全系列を思い出す。

$$0\to\Omega^1{}_P\to\bigoplus_{a=0}^{N}\mathcal{O}_P(-1)e_a\to\mathcal{O}_P\to 0$$

ここで自由基底 $\{e_a\,|\,a=0,\cdots,N\}$ は P の斉次座標 $Z_0,\cdots Z_N$ に自然に対応するものとする。これの q+1次歪対称積をとって

(3.0.1)
$$0\to\Omega^{q+1}{}_P(m)\xrightarrow{\alpha_{EU}}\bigoplus^{\binom{N+1}{q+1}}\mathcal{O}_P(m-q-1)\xrightarrow{\beta_{EU}}\Omega^q{}_P(m)\to 0$$

この完全列に対して、次の結果が成立する。

<u>(3.1) Key Lemma</u>.

$\exists\,\gamma:\bigoplus^{\binom{N+1}{q+1}}\mathcal{O}_P(m-q-1)\to\Omega^{q+1}{}_P(m)$　a homomorphism of abelian sheaves,　$\gamma\cdot\alpha_{EU}=(-m)\mathrm{id}$.

<u>(3.2) Remark</u>. もちろん、γ は $\mathcal{O}_P$-加群としての層準同型では<u>ない</u>。これから（少々脱線になるが）例えば $m\neq 0\Rightarrow$

abelian sheaf として $\overset{\binom{N+1}{q+1}}{\oplus} \mathcal{O}_P(m-q-1) \simeq \Omega^q{}_P(m) \oplus \Omega^{q+1}{}_P(m)$ となる。もちろんこの同型は $m=0$ の時は成立しない。この多少奇異な感じのする結果は、例えば $N=m=1,\ q=0$ の時、$\gamma: \mathcal{O}_P e_0 \oplus \mathcal{O}_P e_1 \to \Omega^1{}_P \otimes \mathcal{O}_P(1)$ $(P=\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ として P 上の（定義域は局所的でもよい）関数 f_0, f_1 に対して $\gamma(f_0 e_0 + f_1 e_1) = df_0 \otimes Z_0 + df_1 \otimes Z_1$ として、計算してみれば、$\gamma \cdot \alpha_{EU} = (-1)\,id$ となっており少しは納得がいくと思われる。実はこれは $q=0$ の場合は、はるか昔に Atiyah等がやっていた 1-jetの基本的な完全列で、各加群を $\mathcal{O}_{P\times P}$- 加群とみて、左作用のかわりに右作用で見た時の標準的な分裂であることを藤木先生にご注意頂いた。

ここで、外微分 d_{EX} を用いて次のような層の準同型 d_I を定義すると、これは $\mathcal{O}_P$-linear になる。

$$d_I : I_X \hookrightarrow \mathcal{O}_P \xrightarrow[d_{EX}]{} \Omega^1{}_P \xrightarrow[\text{(制限)}]{} \Omega^1{}_P \otimes \mathcal{O}_X$$

従って $d_I := (\text{wedge}) \cdot (1 \otimes d_I) : \Omega^q{}_P(m) \otimes I_X \to \Omega^q{}_P(m) \otimes \Omega^1{}_P \otimes \mathcal{O}_X \to \Omega^{q+1}{}_P(m) \otimes \mathcal{O}_X$ （☜簡単のため同じ記号 d_I を再度使う）が定義され、しかも $\overline{d_I} : \Omega^q{}_P(m) \otimes N^\vee{}_{X/P} \to \Omega^{q+1}{}_P(m) \otimes \mathcal{O}_X$ と自然な準同型 $\Omega^q{}_P(m) \otimes I_X \to \Omega^q{}_P(m) \otimes N^\vee{}_{X/P}$ に分解することもわかる。 実は上記の γ を

$\overset{\binom{N+1}{q+1}}{\oplus} 0_P(m-q-1)$ から $\overset{\binom{N+1}{q+1}}{\oplus} I_X(m-q-1)$ に制限することで、図式(3.0.1)から、次のような可換図式が得られる。

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_X \otimes \Omega^{q+1}(m) \arrow[r] & \Omega^{q+1}(m) \arrow[r] & \Omega^{q+1}|_X \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_X \otimes \Omega^{q+1}(m) \arrow[r] \arrow[u, "\times(-m)"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \oplus I_X(m-q-1) \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] & I_X \otimes \Omega^{q}(m) \arrow[r] \arrow[u, "d_1"'] & 0 \\
 & \Omega^{q+1}(m) \arrow[r, "\alpha_{EU}", "\wr"'] & \oplus 0_P(m-q-1) & &
\end{tikzcd}
$$

ここで、$\Omega^{q+1} = \Omega^{q+1}{}_P$, $\Omega^{q+1}|_X = \Omega^{q+1}{}_P \otimes 0_X$ などと略記した。この可換性を使うことにより最後のページに掲げた大きな図式に出現する非可換な部分(実はここが我々の証明において一番の要点となる(2.2)Remark(ア)で述べたhigher obstructionの存在が引き起こす困難性が集中している部分である)を仮定を使いながら幾つかの可換な部分に分解して議論することが可能になる。

<u>**Diagram**</u> $(\; I = I_X,\quad N^\vee = N^\vee_{X/P} \;)$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\oplus H^0(\Omega^1_P(m-q-1)) \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dddd, "f_4"'] & & & \\
& \oplus H^0(\Omega^1_P|_X(m-q-1)) \arrow[dddd, "f_5"] & & \\
& & \oplus H^0(N^\vee(m-q-1)) \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[dddd, "\overline{\beta}_{EN}"] & \\
& & & \oplus H^0(I(m-q-1)) \arrow[ul, "f_3"'] \arrow[dddd, "\beta_{EN}"] \\
H^0(\Omega^1_P \otimes \Omega^q_P(m)) \arrow[dr, "f_6"] \arrow[dddd, "\lambda"'] & & & \\
& H^0(\Omega^1_P \otimes \Omega^q_P|_X(m)) \arrow[dddd, "\overline{\lambda}"] & & \\
& & H^0(N^\vee \otimes \Omega^q_P(m)) \arrow[ul, "f_7"'] \arrow[dd, "\overline{\delta}_{EN}"] & \\
& \text{non-commutative part} & & H^0(I \otimes \Omega^q_P(m)) \arrow[ul, "f_8"'] \arrow[ddd, "\delta_{EN}"] \\
H^0(\Omega^{q+1}_P(m)) \arrow[dr, "\beta_{LFT}"] \arrow[dd, "f_9"'] & & H^1(N^\vee \otimes \Omega^{q+1}_P(m)) & \\
& H^0(\Omega^{q+1}_P|_X(m)) \arrow[ur, "\overline{\delta}^{(q+1)}_{LFT}"] \arrow[drr, "\delta_{LFT}"] & & \\
H^0(\Omega^{q+1}_P(m) \otimes O_P/I^2) \arrow[ur, "\overline{\beta}^{(q+1)}_{LFT}"'] & & & H^1(I \otimes \Omega^{q+1}(m)) \arrow[uul, "f_{10}"']
\end{tikzcd}
$$

—END—