数理解析研究所講究録
第758巻 1991年 72–75


# Homotopically stable homeomorphisms について

愛媛大理　平出 耕一

$M$は位相閉多様体とし、$f:M\to M$は同相写像で不動点$m_0\in M$を持つとする。次が成り立つとき、$f$をホモトピー安定(homotopically stable)と呼ぶことにする： 同相写像 $g:M\to M$, $g(m_0)=m_0$, が$\{m_0\}$を固定して$f$とホモトピックならば、恒等写像とホモトピックな連続写像 $h:M\to M$ が存在して $f\circ h = h\circ g$ , i.e. 図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

が可換になる。この様な性質をもつ同相写像の例として$n$次元トーラスの双曲的自己同型写像あるいはもっと一般に infra-nil-manifold の双曲的 infra-nil-automorphism がある。これらの同型写像はそのホモトピー類の中でいろいろな力学的数量例えば、位相エントロピー、$n$周期点の個数、Nielsen数等の最小値を与える。閉曲面の pseudo-Anosov 同相写像も上の数量を最小にしているけれども、後で述べる様にホモトピー安定

でないので注意を要する。(注、pseudo−Anosov 同相写像は不動点をもつ)

ここでは、ホモトピー安定な同相写像はどのような写像であるかについて考える。以後 $M$ の距離 $d$ を一つ固定する。

$\pi : \overline{M} \to M$ は普遍被覆空間，$\overline{f} : \overline{M} \to \overline{M}$ は $f$ の持ち上げとする。$\overline{d}$ を $\pi$ による $d$ の持ち上げ，即ち、次の a)〜d) が成立する $\overline{M}$ の距離とする：

a) $\exists \eta_0 > 0$ s.t. $\overline{d}(x,y) < \eta_0 \Rightarrow d(\pi(x),\pi(y)) = \overline{d}(x,y)$

b) $\forall \alpha \in \pi_1(M)$ に対して $\overline{d}(\alpha(x),\alpha(y)) = \overline{d}(x,y)$ , $\forall x, y \in \overline{M}$

c) $(\overline{M},\overline{d})$ は完備距離空間

d) $\forall x, y \in \overline{M}$ に対して $\displaystyle \overline{d}(x,y) = \inf_{\substack{\eta_0\text{-chain} \\ \text{from } x \text{ to } y}} \sum_{i=0}^{\ell-1} \overline{d}(x_i, x_{i+1})$

ここで $x = x_0, x_1, \cdots, x_\ell = y$ : $\eta_0$-chain $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\overline{d}(x_i, x_{i+1}) < \eta_0$ $\quad 0 \le {}^\forall i \le \ell-1$

<u>定理1.</u> $\overline{f} : \overline{M} \to \overline{M}$ は次の A, B を満たすとする。

A. $\forall c > 0$ に対し $\overline{d}(\overline{f}^i(x), \overline{f}^i(y)) \le c \ (\forall i \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = y$

B. $\forall K > 0$ , $\exists \delta_K > 0$ s.t. $\forall (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$: $K$-擬軌道 (i.e. $\overline{d}(\overline{f}(x_i), x_{i+1}) < K$, $\forall i \in \mathbb{Z}$) , $\exists x \in \overline{M}$ s.t.

$$\overline{d}(\overline{f}^i(x), x_i) < \delta_K , \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

このとき $X$ : コンパクト，連結，局所弧状連結，弱局所単連結ハウスドルフ空間

$g : X \longrightarrow X$ 同相写像 , $g(x_0) = x_0$

$\phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(M, m_0)$ 準同型写像

に対して

$f_* \circ \phi = \phi \circ g_*$ が成立するならば、一意的に連続写像 $h : X \to M$ が存在して $h(x_0) = m_0$ , $h_* = \phi$ , $f \circ h = h \circ g$ となる。特に $f : M \to M$ はホモトピー安定である。

双曲的 infra-nil-automorphism に対し A, B が成立するので、定理1よりこの写像はホモトピー安定であることが分かる。

<u>定理2.</u> $\bar{f} : \bar{M} \to \bar{M}$ は A, B を満たすとすると, M は infra-nil-manifold と同相で f は双曲的 infra-nil-automorphism と位相共役である。

したがってホモトピー安定な同相写像に対し A, B が成立するか否かが問題となる。これに関して

<u>補題3. (shadowing lemma)</u> 同相写像 $f : M \to M$ がホモトピー安定ならば、$\bar{f} : \bar{M} \to \bar{M}$ は B の性質を持つ。

pseudo-Anosov 同相写像に対し A が成立するので, 定理2と補題3より次が得られる。

<u>系 4.</u> $M^2$ は閉曲面とし $f : M^2 \to M^2$ は pseudo-Anosov 同相写像とする。このとき $M^2 \neq T^2$ (2次元トーラス) ならば f はホモトピー安定でない。

一方、Handel は次を示している。

<u>定理 ([3, 4])</u> $f : M^2 \to M^2$ は pseudo-Anosov とし, $g : M^2 \to M^2$ は同相写像で f とホモトピックとする。このとき g-不変な閉集合 $Y \subset M^2$ ( $g(Y) = Y$ ) と上への連続写像 $h : Y \to M^2$

が存在して

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "h"] \\ M^2 \arrow[r, "f"'] & M^2 \end{tikzcd}$$

かつ $h$ は $id|_Y$ とホモトピックである（[3]）。さらに $f$ と $g$ の位相エントロピーが等しいならば $Y = M^2$ （[4]）。

また Fathi [1] は Handel よりも分かり易い方法で上の定理の前半を示した。Fathi の証明方法は、基本的に、（双曲的 infra-nil-automorphism の特別な場合である）双曲的トーラス自己同型に対するものと同じで Franks [2] の結果を利用している。また定理１の証明方法を適用することもできる。

## References

[1] A. Fathi. Homotopical stability of pseudo-Anosov diffeomorphisms, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1990), 10, 287-294.

[2] J. Franks. Anosov diffeomorphisms, Proc. Symp. in Pure Mathematics 14 (1970), 61-94.

[3] M. Handel. Global shadowing of pseudo-Anosov diffeomorphisms. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 5 (1985), 373-377.

[4] M. Handel. Entropy and semi-conjugacy in dimension two, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 8 (1988), 585-596.

[5] K. Hiraide. Positively expansive open maps of Peano spaces, Topology and its Appl. 37 (1990), 213-220.