数理解析研究所講究録
第 759 巻 1991 年 25-35

球面組紐群のガロア剛性について

東大・理　中村博昭 (Hiroaki Nakamura)

§1. Statement.

射影直線 $\mathbf{P}^1$上の順序付き n 点分布のモジュライ空間 $M_{0,n}$を考える:

$$M_{0,n} = (\mathbf{P}^1)^n - diagonals/PGL_2 \quad (n\geq 3).$$

すると $M_{0,3}$ = 一点, $M_{0,4} = \mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$, $M_{0,5} = \mathbf{P}^2 -$ { 完全四角形 }, $M_{0,6}$ =種数 2 レベル 2 の代数曲線のモジュライ,... と続き, 一般に $M_{0,n}$ は $\mathbf{P}^{n-3}$からいくつかの超平面を除いた形をしている。その基本群は種数 0 の Teichmüller modular 群または写像類群（の pure part ）と呼ばれる無限離散群と同型である。ここでは Harer にならってこれをΓ_0^nとかくことにする。これは up to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 直因子で純球面組紐群とも同型になる。さて有限次代数体 k 及び奇素数 lを固定し, 絶対ガロア群 $Gal(\bar{k}/k)$ を G_kとかき, 上の群の pro-l完備化を$\Gamma_0^{n,pro-l}$と記すことにすると, 自然なガロア表現

$$\varphi_n : G_k \to Out\Gamma_0^{n,pro-l}$$

がえられる。この時,

Theorem. ガロア像 $\varphi_n(G_k)$ の $Out\Gamma_0^{n,pro-l}$ における中心化群 *(centrtalizer)* は $n=4$ のとき *3* 次対称群 に、$n \geq 5$ のとき n 次対称群に同型になる。(特に有限群になる。)

講演時には $n \geq 6$ のときは予想としていましたが，その際に提案した方法(伊原" 推進" 定理 [Ih3] を用いる方法) によってまもなく一般の場合も解決しましたので本稿では上の形で御報告することに致します。ちなみに $n=4$ の $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}$ の場合は以下述べるように一昨年の北大における代数学シンポジウムで触れた予想に関連します ([N5] §5)。証明の技巧の詳細は [N3],[N4] を見て頂ければ幸いです。

§2. Motivation.

X を k上定義された代数多様体,$X_{\bar{k}}=X\otimes\bar{k}$ とし profinite 基本群の完全系列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X_{\bar{k}}) \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{p_{X/k}} G_k \to 1$$

を考える。そして Xが曲線の場合も含めて「非常に双曲的」ならばこの Galois augmentation $p_{X/k}$ は $\pi_1(X_{\bar{k}})$ に群論的に強い剛性を与えるだろうと大まかな仮設をたててみる (cf.[G],[Bo])。この際 $\pi_1(X(\mathbb{C}))$ が residually finite であることが望ましいが, さらに residually l-finite な場合 (我々のΓ_0^nはそうである) は, $\pi_1(X_{\bar{k}})$ をその pro-l完備化 $\pi_1(X_{\bar{k}})^{pro-l}$に置き換え, $\pi_1(X)$ を

$$\pi_1^{(l)}(X):=\pi_1(X)/ker(\pi_1(X_{\bar{k}}))\to\pi_1(X_{\bar{k}})^{pro-l})$$

で置き換えても同様のことが期待できるだろう。(一般に object を問題にするときは profinite のままが有利だが morphism をやるときはこの方が打ち消すべきズレが少なくなる分有利である。) そこで完全系列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X_{\bar{k}})^{pro-l} \longrightarrow \pi_1^{(l)}(X) \xrightarrow{p'_{X/k}} G_k \longrightarrow 1$$

を考えることにする。強剛性といっても次に何を考えるかが問題であるが，一つの方向として「自己同型」の大きさを調べることが挙げられる。Mostow や Ivanov の強剛性定理により離散群としての"π_1" は有限な外部自己同型群をしばしば持つが，一方でその profinite 乃至 pro-l 完備化は Belyi や 伊原先生により巨大なガロア対称性を持つことが知られている ([Be],[Ih1])。 従って考える自己同型はガロア両立的なものに限るのが自然である。それでもそれらが本質的に有限になるというアプリオリな保証は何もないが。

DEFINITION: $\pi_1^{(l)}(X)$ の連続群自己同型 fが条件 $p'_{X/k} \circ f = p'_{X/k}$を満たすとき fはガロア両立的であるといい，ガロア両立的な自己同型全体がなす群を $Aut_{G_k}\pi_1^{(l)}(X)$ とかく。

基本群の関手性から X/kの k-自己同型 gに対して

$$\pi_1(g) : \pi_1(X,\eta) \to \pi_1(X, g(\eta))$$

が導かれる。この domain と codomain との (chemin によるガロア両立的な) 同型は幾何的な内部自己同型を up to として決まることから canonical な準同型写像

$$\Phi_X : Aut_k X \to E_k(X)^{pro-l} := \frac{Aut_{G_k}\pi_1^{(l)}(X)}{Inn\pi_1(X_{\bar{k}})^{pro-l}}$$

が定まる。今 Xが $K(\pi,1)$ とすれば右辺の $E_k(X)^{pro-l}$は自己ホモトピー同値類群の pro-l 版とみることができる。右辺が左辺をどう反映しているかと問う場合、左辺の $Aut_k(X)$ に連続パラメーターがあってもそれは右辺のホモトピー集合には trivial にしか映らないから，Xに双曲性を課したくなる。Lang-Voita 予想を見ると hyperbolicity にもいろいろな version があるが例えば小林双曲

的に埋め込まれた完備双曲型複素空間や飯高対数一般型代数多様体の場合自己同型群は有限になることが知られているからである ([K],[野口],[飯高])。ただし双曲性から $K(\pi,1)$ を導く Hadamard-Cartan 型の含意のためにはもう少し強い意味の双曲性が必要になる (Brody-Green)。次にいつ Φ_X が injective になるかに関して, closed aspherical manifold については A.Borel の定理があるが, open な場合も調和写像のエネルギー汎関数を用いた議論により例えば有界対称領域の算術商の場合は肯定されるようである ([野口])。$X = M_{0,n}$ の場合 $Aut_k(X)$ は $n \geq 5$ の時 n 次対称群 S_n になることが寺田氏 [T] により確かめられている ($n=4$ のときは S_4 の自然な作用は S_3 を経由する)。$\Phi_{M_{0,n}}$ が injective になることは H_1 への作用から直接見える。

ところで群論的考察により (1) $\pi_1(X_{\bar{k}})^{pro-l}$ が centerfree で (2) $p'_{X/k}$ が群切断を持つ, ならば $E_k(X)^{pro-l}$ はガロア表現 $G_k \to Out\pi_1(X_{\bar{k}})^{pro-l}$ の像の中心化群と等しくなることが示される ([N4] Proposition 4.2)。この (2) の条件のためには X が有理点を持てばよい。条件 (1) は、我々の $\Gamma_0^{n,pro-l}$ の場合 free pro-l group の順次拡大群であることから従う。以上の一般的な背景のもとで §1 で述べた定理は次のことを主張している。

Theorem. *$\Phi_{M_{0,n}}$ は bijection を与える ($n \geq 4$)。*

講演時に述べたように証明は, まず "premier etage" $M_{0,4}$ の場合を解決し, 得られた剛性を伊原推進定理 [Ih3] により順次 n を増やした場合に持ち上げていくことでなされる。

$M_{0,n}$ を 射影空間の hyperplane complement とみなし一般の超平面切断を

とると Lefschetz 型の Zariski の定理により基本群が保たれる。しかし S_n による対称性がこの部分多様体にまで残るわけないから 2 次元以上では Φ_X の全射性は双曲性だけからは望めないかも知れない。曲線の場合を含めてある種の双曲性が $E_k(X)^{etale}$ の有限性を imply する可能性はあると思う。

§3. Le premier étage.

$X = M_{0,4} = \mathbf{P}^1 = \{0, 1, \infty\}$, $\pi_1 = \Gamma_0^{4,pro-l}$ とし, 上半平面内の基点から出発して点 0,1,∞ を左巻き一周りして戻るループのホモトピー類を x, y, z とかく。すると

$$\pi_1 =< x, y, z \mid xyz = 1 > \text{の } pro - l \text{ 完備化.}$$

自然なガロア表現

$$\varphi = \varphi_4 : G_k \to Out\pi_1 = \frac{Aut\pi_1}{Inn\pi_1}$$

は Belyi [Be] によって

$$\varphi_{Belyi} : G_k \to Brd\pi_1 \subset Aut\pi_1$$

に一意的に持ち上げられる。但しここで $Brd\pi_1$ とは

$$Brd\pi_1 = \left\{ f \in Aut\pi_1 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, a \in \mathbb{Z}_l^\times,\ \exists\, t \in [\pi_1, \pi_1],\ \exists\, s \in \pi_1 \\ f(x) = sx^a s^{-1}, f(y) = ty^a t^{-1}, f(z) = z^a \end{array} \right\}.$$

で定義される部分群である。

まず表現 φ_{Belyi} について [N5] §5 で述べた問題に関連して次の結果が得られた。

Lemma 1. $\varphi_{Belyi}(G_k)$ の $Brd\pi_1$での中心化群は *trivial*。

[N5] でも述べたがこの中心化群が 1 になるためには、φ_{Belyi}の像があまり小さくては困る。(例えば kが標数が lと素な有限体ならば像は Frobenius の像で生成される巡回群であり, 従って中心化群は無限群になる。) Drinfeld は [Dr] の中で$\varphi_{Belyi}(G_k)$ の大きさを上から押さえるために $Brd\pi_1$の真の部分群 $GT(\mathbb{Z}_l)$ (Grothendieck-Teichmüller 群) を定義している。一方実際に$\varphi_{Belyi}(G_k)$ が $GT(\mathbb{Z}_l)$ の中にどれくらい存在しているかを保証する結果としては, Deligne の話 [De] を別にすれば伊原理論における普遍ヤコビ和級数（の係数の nonvanishing) が現時点でほとんど唯一のものであり, 上の lemma の証明もこれに依存している。

次にこれの説明にはいる。各 $f \in Brd\pi_1$に対して, $Brd\pi_1$の定義に現れる $a \in \mathbb{Z}_l^\times$ と $t \in [\pi_1, \pi_1]$ は unique に定まるため, これらを a_f, t_f とかくことにする。逆に fは組 (a_f, t_f) から決まる。

π_1 を yと zで生成される free pro-l 群と考え, $t_f \in \pi_1$の yと zの pro-word としての振舞いをみるため, π_1をその完備群環 $\Lambda = \mathbb{Z}_l[[\pi_1]]$ に埋め込む (Magnus embedding)。$y = 1 + v$, $z = 1 + w$とおくことによってこの群環は 2 変数 v,w についての非可換巾級数環になる。そこで t_fをこの環の中で巾級数展開し, 右端が vである項と wである項に分けて

$$t_f = 1 + \frac{\partial t_f}{\partial y} v + \frac{\partial t_f}{\partial z} w$$

とかく。これは Fox の free differential の pro-l アナログになっていて [Ih2] で初めて数論に導入されたものである。 次に Ihara anti-1-cocycle（の特別な

例として) $\Psi : Brd\pi_1 \to \Lambda$を

$$\Psi_f = 1 + \frac{\partial t_f}{\partial z} w$$

と定義する。$Brd\pi_1$ は $Aut\pi_1$の部分群としてΛに作用しており, 任意の $f, g \in Brd\pi_1$ に対して

$$\Psi_{fg} = f(\Psi_g)\Psi_f$$

が成立する。

さて G_kの各元σに対して $f(\sigma) = \varphi_{Belyi}(\sigma)$, $\Psi_\sigma = \Psi_{f(\sigma)}$とおき, 可換巾級数環へのアーベル化写像$\Lambda \to \mathbb{Z}_l[[v, w]]$ によるΨ_σの像を Ψ_σ^{ab} とかく。この時

定理. *(Anderson/Coleman/Ihara-Kaneko-Yukinari)*

$$\Psi_\sigma^{ab} = \exp \sum_{\substack{m \geq 3 \\ odd}} \frac{\chi_m(\sigma)}{(l^{m-1} - 1)} \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} \frac{V^i W^j}{i! j!} \quad (\sigma \in Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty}))).$$

ここで $1 + v = \exp V$, $1 + w = \exp W$と変数変換されている。ガロア指標

$$\chi_m : Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})) \to \mathbb{Z}_l(m)$$

は Deligne や Soule によって考察された円要素のあらわれであり,Soule 及び Schneider により $m \geq 3\, odd$ の時 open image を持つことが知られている。この定理の詳しい version 及び周辺の事情については [Ih 4] とその Reference を参照して下さい。

Lemma 1 はこれに次の純代数的な Lemma を接続して得られる。その前に記号として $I \subset \Lambda$を augmentation ideal とし I^2, I^3,... をその巾とする。

一方 $\pi_1 \supset \pi_1(2) \supset \pi_1(3) \supset \cdots$ を中心降下列とし、イデアル $I_n \subset \Lambda$ を $\Lambda \to \mathbf{Z}_l[[\pi_1/\pi_1(n)]]$ の核として定義する。$n \geq 2$ では $I^n \supsetneqq I_n$となること、及び$\Lambda/I_2 = \mathbf{Z}_l[[v,w]]$であることを注意しておく。

Lemma 2([N3]). $G \subset Brd\pi_1$とする。互いに素な自然数 m_1, m_2 及び G の元 g, h_1, h_2 が存在して

1) $a_g \in \mathbf{Z}_l^\times$は nontorsion.

2) $i = 1, 2$ に対して $a_{h_i} = 1$ かつ$\Psi_{h_i} \in I_2 + I^{m_i} \backslash I_2 + I^{m_i+1}$

が満たされるとき、G の $Brd\pi_1$での中心化群は 1 となる。

Lemma 2 の証明は G を中心化する fに対して, 条件 2) から $a_f = 1$ を, 条件 1) から $t_f = 1$ を示すことで行われる。$G = \varphi_{Belyi}(G_k)$ が Lemma 2 のような元を持つことは上の定理からわかる。$t_f = 1$ を示す際には anti-1-cocycle の性質と組合せ群論の技巧を用いる。

$X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ として Lemma 1 からΦ_Xの bijectivity を示す際に必要な事項としてはさらに

(A) π_1内の 0,1,∞ 上の惰性群の共役和を $\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_\infty$とおく時、ガロア両立的な fは $\mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_\infty$を集合として保つこと (nonliniear weight filtration),

及び,

(B) Belyi lift を定義する２つの極大巡回部分群 $I \subset \mathfrak{I}_1$, $J \subset \mathfrak{I}_\infty$に対して J を固定して Iを$\pi_1(2)$ の元での共役分ずらしても Belyi lift が変わらないこと,

が挙げられる。

(A) によって f は up to S_3 で 各 $\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_\infty$ を集合として保つことになり,

(B) によって f は up to 幾何的内部自己同型で特定の Belyi lift を保つことになる。これから $f|_{geometic}$ が $Brd\pi_1$に属すことになり先の Lemma 1 の土俵に乗る。こうして $\Phi_{M_{0,4}}$ の bijectivity の証明が完了する。

注 1. Lemma 1 で$\varphi_{Belyi}(G_k)$ の中心化群を $Aut\pi_1$でとると $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ になる。これは

$$1 \to Inn\pi_1 \to Aut\pi_1 \to Out\pi_1 \to 1$$

に対して (nonabelian) ガロアコホモロジー系列をとると導くことができる。この中心化群の生成元 g は $g(x) = z^{-1/2}yz^{1/2}$, $g(y) = z^{1/2}xz^{-1/2}$, $g(z) = z$ で与られる。∞ を基点とした $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の自己同型群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ との対応の仕方が興味深い。

注2. $X = \mathbf{P}^1 - \{n$ 点 $\}$ $(n \geq 4)$ の時も Lemma 1 の類似として中心化群の triviality が成立する（ Anderson-Ihara による行列版 anti-1-cocycle [A-I] を用いる）ので、これと n.w.f を合わせれば $E_k(X)^{pro-l}$が有限群 (S_nの部分群) になることがわかる。さらにこれをΦ_Xの全単射性に強めることは、織田先生が[O]の中で述べておられる予想を介して Beilinson や Zagier の motif 的な polylog torsor の構成と関連し, 今後の研究課題の一つである。細かくなるが, たとえば k が $\mathbf{Q}$ 上 perfect group によるガロア拡大体の時には Φ_X の全単射性は [N1],[N2]の「乗法群の方法」で肯定することができる。

§4. 無限遠と $\mathfrak{L}$-埋入.

この節では $n \geq 5$ の時ガロア両立的な$\pi_1^{(l)}(M_{0,n})$ の自己同型は $\Gamma_0^{n,pro-l}$ 上に [Ih 3] の意味で "special automorphism" を誘導すること ([N4]) を説明する予定です。

私事ながら, 間断なく励ましと示唆を入力し続けて頂いた伊原・織田両先生, 明快な講義で双曲幾何の面白さを伝えて下さった小林昭七先生, いつも鋭いコメントをして下さる加藤和也先生, 折りに触れて最近の幾何学の動向について率直な印象を語って下さった東大理学部の今野宏さん, 河澄響矢さん, 小木曽啓示さん, 小林正典さん, それからドリンフェルトの訳を作って下さった武部尚志さんに深く感謝申し上げます。

訂正: [N5] の 191 頁 6 行目は正しくは

$$\{-1, \lambda_i, \lambda_j, \lambda_i - \lambda_j \mid 1 \leq i \neq j \leq m\}$$

となります。

References

[A-I] G.Anderson, Y.Ihara, *Pro-l branched coverings of* $\mathbf{P}^1$ *and higher circular l-units, Part 2*, International J. of Math. **1** (1990), 119–148.

[Be] G.V.Belyi, *On galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. USSR Izvestija **14-2** (1980), 247–256.

[De] P.Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in "Galois Groups over $\mathbb{Q}$ (ed. by Y.Ihara, K.Ribet, J.P.Serre)," Springer, pp. 79–297.

[Dr] V.G.Drinfeld, *On quasi triangular quasi Hopf algebras and a group closely related to* $Gal(\bar{Q}/Q)$, preprint.

[G] A.Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, preprint (1984).

[Ih1] Y.Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations and Complex multiplications*, Ann. of Math. **123** (1986), 43–106.

[Ih2] Y.Ihara, *On Galois representations arising from towers of covering of* $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, Invent. Math **86** (1986), 427–459.

[Ih3] Y.Ihara, *Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations*, in "The Grothendieck Festschrift, Volume II," Birkhäuser (to appear).

[Ih4] Y.Ihara, *Braids, Galois groups and some arithmetic functions*, to appear in Proc. International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990.

[飯高] S.Iitaka, "代数幾何学," 岩波書店, 1977.

[K] S.Kobayashi, "Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings," Marcel Dekker, 1970.

[N1] H.Nakamura, *Rigidity of the arithmetic fundamental group of a punctured projective line*, J. Reine angew. Math. **405** (1990), 117–130.

[N2] ——, *Galois rigidity of the etale fundamental groups of punctured projective lines*, J. reine angew. Math **411** (1990), 205–216.

[N3] ——, *On galois automorphisms of the fundamental group of the projective line minus three points*, Math. Z. (to appear).

[N4] ——, *Galois rigidity of pure sphere braid groups*, Preprint series UTYO-MATH **91-1**.

[N5] ——, 代数曲線の基本群のガロア剛性について, 第３５回代数学シンポジウム報告集　於北海道大学 (1989), 186–199.

[野口] J.Noguchi, 双曲多様体理論と *Diophantus* 幾何学, 数学 **41-1** (1989), 320–334.

[O] T.Oda, *Some problems arising from Lewin's ladder relation for polylogarithm*, preprint.

[T] T.Terada, *Quelques Propriétés Géométriques du Domaine de* F_1 *et le Groupe de Tresses Colorées*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **17** (1981), 95–111.