数理解析研究所講究録
第761巻 1991年 135-143

対称空間上のline bundle上の調和解析

東大理　示野信一 (Nobukazu Shimeno)

序. 本稿では、半単純対称空間 G/H の line bundle 上の不変微分作用素の同時固有空間上の G の表現を考える。

G を連結半単純 Lie 群、σ を G の自己同型で $\sigma^2 = id$ をみたすもの、H を σ の固定部分群の開部分群とする。このとき空間 G/H は半単純対称空間と呼ばれ、G/H 上には左 G 不変測度が存在する。以下 G は単純、H の center は連続であると仮定する。(このとき、G/H の noncompact Riemannian form G^d/K^d は Hermite 対称空間.) δ を H の unitary な1次元表現、E_δ を δ に付随した G/H 上の line bundle とすると、E_δ 上の不変微分作用素の algebra $\mathbb{D}_\delta$ は可換で、不変式環と同型になる (Harish Chandra isomorphism)。E_δ の C^∞-切断の空間を、

$$C^\infty(G/H;\delta) = \{ f \in C^\infty(G);\ f(gh) = \delta(h^{-1}) f(g) \quad g \in G,\ h \in H \}$$

と同一視する。algebra homomorphism

$$\chi : \mathbb{D}_\delta \longrightarrow \mathbb{C}$$

に対して、同時固有空間

$$\mathcal{E}_\chi = \{ f \in C^\infty(G/H;\delta) ; Df = \chi(D)f \quad {}^\forall D \in \mathbb{D}_\delta \}$$

を考える。

問題 I. $\mathcal{E}_\chi$ の元を記述せよ。

II. G の表現空間として $\mathcal{E}_\chi$ はいつ可約か。また $\mathcal{E}_\chi$ のすべての閉不変部分空間を記述せよ。

III. $C_c^\infty(G/H;\delta)$ の元を $\mathcal{E}_\chi$ の元を用いて分解せよ。(Plancherel formula)

特に，

IV. 上の分解に点スペクトル (discrete series) が存在するか。存在する場合、それを決定せよ。

δ が H の trivial 表現のとき、すなわち G/H 上の関数の場合に次のことが知られている。

(a) Riemann 対称空間の場合.

- 任意の同時固有関数 ($\mathcal{E}_\chi$ の元) は Poisson 積分表示される。(Helgason 予想 [6])
- $\mathcal{E}_\chi$ の可約性の条件、Plancherel measure は、Harish Chandra の c-関数を用いて表される。([5])
- discrete series は存在しない。

(b) 一般の半単純対称空間の場合

- G/H に discrete series が存在する $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\,G/H = \mathrm{rank}\,K/K\cap H$ (ただし、K は σ-stable な G の極大コンパクト部分群) また discrete series はすべて決定されている。([7] [4])
- Plancherel measure の continuous part は c-関数で与えられる。c-関数は具体的に計算されている。

G/H が条件 $(*)$ $\mathrm{rank}\,G/H = \mathrm{rank}\,K/K\cap H$ をみたす場合、G/H の vector bundle 上に無限個の discrete series が構成されている([8])がすべてではない。δ が non-trivial なとき条件$(*)$をみたさなくても、$L^2(G/H\,;\,\delta)$ に discrete series が存在する場合がある。これは G^d/K^d の line bundle 上では、パラメータが closed positive chamber に入ってもPoisson変換の bijectivity がくずれることがある([10])ことと関係している。本稿では上の問題I～IVを解くことができた rank 1 の空間、$U(p,q)/U(1)\times U(p-1,q)$ $(p,q \geqq 1)$ について結果を述べる。

§1. Notation　$G = U(p,q)$、$H = U(1)\times U(p-1,q)$ とおく。($SU(p,q)$ のかわりに $U(p,q)$ を考える。) $K = U(p)\times U(q)$、

$Y = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$, $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y$, $A = \exp\mathfrak{a}$, $a_t = \exp tY \in A$ とおく。

このとき分解 $G=KAH$ が成り立つ。$M=Z_K(\mathfrak{a})$, $M_0=M\cap H$ とおく。$l\in\mathbb{Z}$ に対して H の1次元表現 χ_l を

$$H\ni\begin{pmatrix}u & \\ & A\end{pmatrix}\rightsquigarrow u^l \quad (u\in U(1),\ A\in U(p-1,q))$$

と定める。$X=\{x\in\mathbb{C}^{p+q};1=|x_1|^2+\cdots+|x_p|^2-|x_{p+1}|^2-\cdots|x_{p+q}|^2\}$ とおくと、$X\simeq U(p,q)/U(p-1,q)$ と同一視されるが、これは $O(2p,2q)$ の対称空間 $O(2p,2q)/O(2p-1,2q)$ とも同型である。$U(1)$ の X への作用を $xu=(x_1u,\cdots,x_{p+q}u)$ ($x=(x_1,\cdots,x_{p+q})\in X$, $u\in U(1)$) により定めれば、

$$C^\infty(G/H;\chi_l)\simeq\{f\in C^\infty(X);\ f(xu)=u^{-l}f(x)\quad x\in X,\ u\in U(1)\}$$

と同一視される。また X ($\simeq O(2p,2q)/O(2p-1,2q)$) 上の Laplace-Beltrami operator を Δ とおくと、$C^\infty(G/H;\chi_l)$ 上の不変微分作用素環は $\mathbb{C}[\Delta]$ に同型である。$s\in\mathbb{C}$、$l\in\mathbb{Z}$ に対して、

$$\mathcal{E}_{s,l}=\{f\in C^\infty(G/H;\chi_l);\ \Delta f=(s^2-\rho^2)f\}$$

とおく。ただしここで $\rho=p+q-1$ とおいた。

$$\Sigma=U(p)/U(p-1)\times U(q)/U(q-1)$$
$$\simeq S^{2p-1}\times S^{2q-1}$$

とおく。Δ_1, Δ_2 をそれぞれ S^{2p-1}, S^{2q-1} 上の Laplacian とする。M_0 の表現 $\chi_l|M_0$ に同伴した K/M_0 上の line bundle の

C^∞-切断の空間 $C^\infty(K/M_0\,;\chi_\ell)$ は,

$$\{f\in C^\infty(\Sigma)\,;\ f(\sigma u)=u^{-\ell}f(\sigma),\ u\in U(1),\ \sigma\in\Sigma\}$$

と同一視される。$j,k\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ に対して,

$$\mathcal{Y}_{jk}=\left\{f\in C^\infty(K/M_0\,;\chi_\ell)\,;\ \begin{array}{l}\Delta_1 f=-j(j+2p-2)f\\ \Delta_2 f=-k(k+2q-2)f\end{array}\right\}$$

とおく。$\mathcal{Y}_{jk}\neq\{0\}$ となるための条件は,

$p,q>1$ のとき、$j+k\geqq|\ell|$, $j+k\equiv\ell \mod 2$.

$q=1$ のとき、$j+k\geqq|\ell|$, $j-k\geqq-|\ell|$, $j+k\equiv\ell \mod 2$.

$p=1$ のとき, $q=1$ の場合で, j と k を入れかえたもの.

となる。$\mathcal{Y}_{jk}$ は K の表現空間としては既約でないので,

$U(1)$ の S^{2p-1}, S^{2q-1} への作用がそれぞれ $\ell+m$, m $(m\in\mathbb{Z})$

となる空間に分解すると, それぞれは既約(または$\{0\}$)となる。

パラメータ j,k,m を用いて $C^\infty(K/M_0\,;\chi_\ell)$ 上の K の既約表

現は,
$$\Lambda_\ell=\left\{(j,k,m)\,;\ \begin{array}{ll}j+k\equiv\ell & \mod 2\\ k\equiv m & \mod 2\\ j\geqq|\ell+m| & \\ k\geqq|m|, & j,k\in\mathbb{Z}_{\geqq 0},\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}$$

$\left(\begin{array}{l}p=1\\ q=1\end{array}\right.$ のとき等号→
にする→$\left.\right)$

により parametrize され, 分解は multiplicity free である。

§2. 結果

分解 $G=KAH$ を用いて、各 $\mu\in\Lambda_\ell$ に対して、微分方

程式 $\Delta f=(s^2-\rho^2)f$ $(f\in C^\infty(G/H\,;\chi_\ell))$ を A 上の微分

方程式として具体的に書くことができる。この微分方程式の

解空間の次元が1であることから、$C^\infty(K/M_0;\chi_\ell)$ と $\mathcal{E}_{s,\ell}$ の K-finite parts は K-module として同型であることがわかる。各 $\mu\in\Lambda_\ell$ に対して、左から $\chi_\ell|M$ に従い K-type μ をもつ $\mathcal{E}_{s,\ell}$ の元は定数倍を除いてただ1つ存在する。これらに対する $Y\in\mathfrak{a}$ の作用を具体的に調べることにより、$\mathcal{E}_{s,\ell}$ の不変部分空間を K-type を用いて記述できる。これは $\ell=0$ の場合に [9][12] で行われているのと同じ方法である。

$\mathcal{E}_{s,\ell}$ は ℓ, s^2 にしかよらないから、$\mathrm{Re}\, s\geqq 0$ としてよい。

$s\in\rho+\ell+2\mathbb{Z}$ のとき、

$$U_s=\{\mu\in\Lambda_\ell \mid j-k\geqq s-\rho+2q\}$$

$s\in\rho+|\ell|+2\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ のとき、

$$T_s=\{\mu\in\Lambda_\ell \mid j+k\leqq s-\rho\}$$

$$W_s=U_s\cup T_s.$$

$q>1$, $s\in\rho+\ell+2\mathbb{Z}$ のとき、

$$V_s=\{\mu\in\Lambda_\ell \mid k-j\leqq s+\rho-2q\}$$

$p>q=1$, $\lambda\in\rho+|\ell|+2\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ のとき、

$$W_s^{\pm}=\{\mu\in\Lambda_\ell \mid j\pm m\geqq s-\rho+2 \text{ or } j\mp m\leqq s-\rho\}$$

$q>p=1$, $\lambda\in\rho+\ell+2\mathbb{Z}$ のとき、

$$V_s^{\pm}=\{\mu\in\Lambda_\ell \mid k\pm m\leqq s-\rho\mp\ell\}.$$

とおく。

<u>Theorem</u>　$s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,s\geqq 0$ とする。このとき $\mathcal{E}_{s,\ell}$ の閉 G-不変部分空間は、$\{0\}$, $\mathcal{E}_{s,\ell}$ と、U_s, W_s, T_s, V_s, $W_s^{\pm}$, $V_s^{\pm}$ に対応する $\mathcal{E}_{s,\ell}$ の閉不変部分空間のいずれかである。

また、$D_\ell=\left\{s\in\mathbb{C}\;\middle|\;\begin{matrix}(p=1\text{のとき}, s\leq|\ell|-q)\\ s>0,\ s-\rho+\ell\in 2\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$ とおくと、点スペクトルについて次の結果を得る。証明は[2]と同様。

<u>Theorem</u> $s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,s\geqq 0$ とする。$\mu\in\Lambda_\ell$ に対して $\mathcal{E}_{s,\ell}$ の μ-成分が $L^2(G/H;\chi_\ell)$ に含まれるための必要十分条件は、$s\in D_\ell$ かつ $\mu\in U_s$ である。

Plancherel formula、Poisson 変換に関しては、[11] に記したのでここでは繰り返さない。

§3. $U(1,n)/U(1)\times U(n)$ の場合.

§2. で $\mathcal{E}_{s,\ell}$ の不変部分空間を決定したが、$p=1$ すなわち G/H が Riemann 対称空間の場合を特に考える。各 K-type に従う固有関数の空間の次元の評価により、$\mathcal{E}_{s,\ell}$ の K-finite part と、主系列表現の空間は、Grothendieck 群の意味で同型であることがわかる。$SU(1,n)$ の主系列の組成列は知られているので([1][13])、固有空間の組成列と比較してみよう。以

下 $(\mathfrak{g}, K)$-modules の category で考える。$\mathcal{E}_{s,\ell}$ の K-finite part を $(\mathcal{E}_{s,\ell})_K$ と書く。$|\ell|>n$, $s=|\ell|-n, |\ell|-n-2, \cdots>0$ のとき、$(\mathcal{E}_{s,\ell})_K$ は G の discrete series を unique submodule としてもつ。これを π_0 とおく。(これは lowest K-type が1次元の holomorphic discrete series.) 対応する主系列を π、その Langlands quotient を $\bar{\pi}$ とする。π は、π_0 ともう1つ別の discrete series π_1 の直和を sub に含み、$\pi_0 \oplus \pi_1$ による quotient が $\bar{\pi}$ である。これを下図のように書こう。

$$\pi = \begin{array}{c} \bar{\pi} \\ \pi_0 \ \pi_1 \end{array} \qquad\qquad (\mathcal{E}_{s,\ell})_K = \begin{array}{c} \pi_1 \\ \bar{\pi} \\ \pi_0 \end{array}$$

これに対し、$(\mathcal{E}_{s,\ell})_K$ の方は、π_0 による quotient が unique submodule $\bar{\pi}$ をもち、更に quotient をとると、π_1 となる。(上図)

Poisson 変換 $\wp_{s,\ell}$、境界値写像 $\beta_{s,\ell}$、Knap-Stein intertwining operator A_s との関係は下図のようになっている。

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} \pi_0 \ \pi_1 \\ \bar{\pi} \end{array} \arrow[r, shift left, "\wp_{s,\ell}"] & \begin{array}{c} \pi_1 \\ \bar{\pi} \\ \pi_0 \\ \text{eigenspace} \end{array} \arrow[l, shift left, "\beta_{s,\ell}"] \\
\begin{array}{c} \bar{\pi} \\ \pi_0 \ \pi_1 \\ \text{principal series} \end{array} \arrow[u, "A_s"] \arrow[ur, "\wp_{-s,\ell}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Im} \wp_{s,\ell} = \operatorname{Ker} \beta_{s,\ell} = \pi_0$$

$$\operatorname{Im} A_s = \bar{\pi}$$

$$\operatorname{Im} \wp_{-s,\ell} = \begin{array}{c} \bar{\pi} \\ \pi_0 \end{array}$$

$$A_s = \beta_{s,\ell} \circ \wp_{-s,\ell}$$

REFERENCES

1. D. H. Collingwood, *Representation of rank one Lie groups*, Pitman, 1985.
2. J. Farout, *Distributions Sphériques sur les espaces hyperboliques*, J. Math. pures et appl. **58** (1979), 369–444.
3. M. Flensted-Jensen, *Spherical function on a simply connected Lie group*. II. The Paley-Wiener theorem for the rank one case, Math. Ann. **228** (1977), 65–92.
4. ———, *Discrete series for semisimple symmetric spaces*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), 253–311.
5. S. Helgason, *Group and geometric analysis*, Academic Press, New York, 1984.
6. M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura,K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric spaces*, Ann. of Math. (2) **107** (1978), 1–39.
7. T. Oshima and T. Matsuki, *A description of discrete series for semisimple symmtric spaces*, Adv. Studies in Pure Math. **4** (1984), 331–390.
8. H. Schlichtkrull, *A series of irreducible representations induced from a symmetric subgroup of a semisimple Lie group*, Invent. Math. **68** (1982), 497–516.
9. ———, *Eigenspaces of Laplacian on hyperbolic spaces; composition series and integral transforms*, Funct. Anal. **70** (1987), 194–219.
10. N. Shimeno, *Eigenspaces of invariant differential operators on a homogeneous line bundle on a Riemannian symmetric space*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. vol 37 (1990), 201–234.
11. ———, *Eigenfunctions of invariant differential operators on U(p,q)/U(p-1,q)*, Seminar reports of unitary representation **10** (1990), 73–75.
12. I. I. Shitikov, *Invariant subspaces of functions and the Poisson transformation for hyperboloids*, Siberian Math. J. **29** (1989), 476–482.
13. D. P. Želobenko, *A description of the quasi-simple irreducible representations of the groups U(n,1) and Spin(n,1)*, Math. USSR Izvestija **11** (1977), 31–50.