数理解析研究所講究録
第764巻 1991年 17-22



# Subanalytic 幾何とPL位相

名大養　塩田昌弘 ( Masahiro Shiota )

問題　Subanalytic 集合の色々な位相的性質は，"subanalytic"のどの性質から生まれてくるか．

解　次に示すように，"analytic"によるのではなく，すべてのsubanalytic集合の族が，余り大き過ぎも，小さ過ぎもせず，ある演算で閉じているから．

定義　$\mathcal{X}$を次の条件をみたす，$\mathbb{R}^n$, $n=0, 1, \dots,$の部分集合の族とする．

(i) どんな$\mathbb{R}^n$の代数的集合も$\mathcal{X}$の元．

(ii) もし$X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$が$\mathcal{X}$の元なら，$X_1 \cap X_2$, $X_1 - X_2 \subset \mathbb{R}^n$も$X_1 \times X_2 \subset \mathbb{R}^{2n}$も$\mathcal{X}$の元．

(iii) $X \subset \mathbb{R}^n$を$\mathcal{X}$の元とする．$p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$を，$p|_{\overline{X}}$がproperな射影とする．すると$p(X)$は$\mathcal{X}$の元．

(iv) $X \subset \mathbb{R}$が$\mathcal{X}$の元なら，任意の点$a \in X$に対して$a$の$\mathbb{R}$での近傍$U$と$b, c \in \mathbb{R}$が存在して，$X \cap U = a$, $[a, b]$, $[b, a]$又は$[b, c]$となる．

$\mathcal{X}$の例の一番目は，すべての半代数的集合で，二番目は，すべてのsubanalytic集合である．$\mathbb{R}^n$の部分集合で，有限個のPfaffian多様体に分割できるもの全体は，その例になると思われるが，証明はできていない（Van den Dries [2]を参照）．$y = \exp$（$x$の有理関数）のグラフをすべて含む$\mathcal{X}$は存在するか，どうか分からない[2]．もし，そんな$\mathcal{X}$が存在すれば，$y = \exp(-1/x^2)$のグラフと$x$軸の和集合を考えれば，Łojasiewiczの不等式は$\mathcal{X}$で必ずしも，成り立たないことが分かる．

以下$\mathcal{X}$を一つ仮定して，$\mathcal{X}$の元はsubanalytic集合の位相的性質を，ほぼ，すべて持っていることを示したい．$r$を正なる自然数とする．$\mathcal{X}$の元を$\mathcal{X}$－集合と呼ぶ．$\mathcal{X}$－集合間の連続写像を，もしそのグラフが$\mathcal{X}$－集合のとき，$\mathcal{X}$－写像と呼ぶ．$\mathcal{X}$－関数，$\mathcal{X}$－ベクトルバンドル等も自然に定義する．

<u>(1)</u> $X \subset \mathbb{R}^l$と$Y \subset \mathbb{R}^m$と$Z \subset \mathbb{R}^n$を$\mathcal{X}$－集合とし，$f_1$と$f_2$を$X$上の$\mathcal{X}$－関数，$f: X \to Y$と$g: Y \to Z$を$\mathcal{X}$－写像とする．任意の有界集合$B \subset \mathbb{R}^l$に対して，$f_1(X \cap B)$と$f_2(X \cap B)$と$f(X \cap B)$は有界だとする．そのとき，$f_1 f_2$と$f_1 + f_2$は$\mathcal{X}$－関数で，$g \circ f$は$\mathcal{X}$－写像である．

$h = (h_1, \ldots, h_m): X \to \mathbb{R}^m$を写像とし，任意の有界集合$B \subset \mathbb{R}^l$に対して，$h(X \cap B)$が有界だと仮定する．すると，$h$が$\mathcal{X}$－

写像である為の必要十分条件は，すべての $h_i$ が $\mathfrak{X}$-関数であること．

<u>(2)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$ を空でない $\mathfrak{X}$-集合とする．すると $X$ の閉包 $\overline{X}$ は $\mathfrak{X}$-集合で，$X$ からの距離関数は $\mathfrak{X}$-関数である．

<u>(3)</u> $f$ を $\mathfrak{X}$-開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の $C^1$ $\mathfrak{X}$-関数とする．すると $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ は $U$ 上の $\mathfrak{X}$-関数である．

<u>(4)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$ を $C^1$ $\mathfrak{X}$-部分多様体とすると，接バンドル $TX \to X$ は $\mathfrak{X}$-ベクトルバンドルである．

<u>(5)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$ を $m$ 次元 $C^1$ $\mathfrak{X}$-部分多様体とする．$G_{n,m}$ を $\mathbb{R}^n$ の中の $m$ 次元部分空間全体のグラスマン多様体とする．自然に，$G_{n,m}$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ の中の代数的部分多様体とできる．そのとき，集合 $\{(x, T_xX) \in X \times G_{n,m}\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$ は $\mathfrak{X}$-集合になる．

<u>(6)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$ と $Y \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathfrak{X}$-集合とし，$f: X \to \mathbb{R}^n$ を $\mathfrak{X}$-写像とする．もし，任意の有界集合 $B \subset \mathbb{R}^n$ に対して，$f^{-1}(B)$ が有界なら，$f(X)$ は $\mathfrak{X}$-集合である．もし，同じ $B$ に対して，$f(X \cap B)$ が有界なら，$f^{-1}(Y)$ は $\mathfrak{X}$-集合である．

<u>(7)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$ と $Y \subset \mathbb{R}^n$ を $C^1$ $\mathfrak{X}$-部分多様体とし，$f: X \to Y$ を $C^1$ $\mathfrak{X}$-写像とする．任意の有界集合 $B \subset \mathbb{R}^n$ に対して，$f(X \cap B)$ は有界だと仮定する．すると，$f$ の特異点集合は $\mathfrak{X}$-集である．

<u>(8)</u> $X \subset \mathbb{R}^n$ を有界な $\mathfrak{X}$-集合とする．すると，$X$ の連結成分

は有限個で，各成分は$\mathfrak{X}$-集合である．

(9) $X\subset\mathbb{R}^n$を空でない$\mathfrak{X}$-集合とする．すると，$\overline{X}-X$の次元はXの次元より小．($\dim\phi=-1$と見なす．)

(10) $X\subset\mathbb{R}^n$を空でない$\mathfrak{X}$-集合とする．すると，Xの$C^r$特異点集合は$\mathfrak{X}$-集合で，その次元はXの次元より小さい．よってXは$C^r$ $\mathfrak{X}$-分割をもつ．

(11) $X\subset\mathbb{R}^n$を$\mathfrak{X}$-集合とし，$\overline{X}-X$は0を含むとする．すると，$\mathfrak{X}$-曲線$\varphi:[0,1]\to\overline{X}$が存在して，$\varphi(0)=0$かつ$\varphi((0,1])\subset X$，とできる．

(12) $X\subset\mathbb{R}^n$と$Y\subset\mathbb{R}^n$を空でない$C^r$ $\mathfrak{X}$-部分多様体とし，$Y\subset\overline{X}-X$と仮定する．XとYが，そこでWhitney条件を満たさないYの点全体を$Y'$とする．すると$Y'$は$\mathfrak{X}$-集合で，次元はYの次元より小．

(13) $X\subset\mathbb{R}^n$をコンパクトな$\mathfrak{X}$-集合とする．すると，多面体$Y\subset\mathbb{R}^{n'}$と，$\mathfrak{X}$-同相写像$\varphi:Y\to X$が存在する．

fをX上の$\mathfrak{X}$-関数とする．すると，上のYと$\varphi$を，$f\circ\varphi$が区分的に線型になるようにとれる．

さらに，Yと$\varphi$は，次の意味で，一意的である．もし別の$Y_1$と$\varphi_1$が存在すれば，Yから$Y_1$への区分的に線型な同相写像$\pi$が存在して，$f\circ\varphi_1\circ\pi=f\circ\varphi$となる様にできる．

(14) $r'$を，rより小さい，負でない整数とする．$X\subset\mathbb{R}^n$と

$Y\subset\mathbb{R}^n$を$C^r$ $\mathfrak{X}$-部分多様体とし，$f:X\to Y$を$C^{r'}$ $\mathfrak{X}$-写像とする．すると，$f$は$C^r$ $\mathfrak{X}$-写像$g$で近似できる．位相は，$r'$階までの$f-g$の導関数が任意の正の$\mathfrak{X}$-関数より小さく取れる，そんな位相である．

(15) Thomの横断性定理の$\mathfrak{X}$の場合は成り立つ．位相は上の位相である．

(16) $r'$を$r$より小さい，正の自然数とする．$C^r$ $\mathfrak{X}$-部分多様体$X\subset\mathbb{R}^n$に対して，恒等写像に任意に近い，$C^{r'}$ $\mathfrak{X}$-同相写像$\pi$が存在して，$\pi(X)$は$C^r$ $\mathfrak{X}$-部分多様体になる．

(17) $X\subset\mathbb{R}^n$を，コンパクトでない，有界な，$C^r$ $\mathfrak{X}$-部分多様体とする．するとコンパクトな，境界付$C^r$ $\mathfrak{X}$-部分多様体$Y\subset\mathbb{R}^n$が一意的に存在して，$X$は$Y$の内部と$C^r$ $\mathfrak{X}$-同相になる．

(18) $\mathbb{R}^n$の有界な$C^r$ $\mathfrak{X}$-部分多様体は，アファインな非特異な実代数的集合と$C^r$ $\mathfrak{X}$-同相である．

(19) $f_1$と$f_2$を$\mathfrak{X}$-集合$X\subset\mathbb{R}^n$上の$\mathfrak{X}$-関数とする．$f_1$と$f_2$の零点集合は同一，又$f_1$が正になる$X$の点の集合は，$f_2$のそれと同一と仮定する．すると，$X$の$\mathfrak{X}$-同相写像$\pi$が存在して，$f_1\circ\pi$は$f_2$と$f_2^{-1}(0)$の近くで，等しくなる．

(20) $\mathbb{R}^n$の中の$C^1$ Whitney $\mathfrak{X}$-分割は，局所的に，$\mathfrak{X}$-自明である．

(21) $M\subset\mathbb{R}^n$を$\mathfrak{X}$-部分多様体，$X$と$Y$を$M$の$\mathfrak{X}$-部分集合とする．ある$M$の$C^1$同相写像が$X$を$Y$に移すと，仮定する．す

ると，Mの$\mathfrak{X}$-同相写像が存在して，それはXをYに移す．（$C^1$級の$\mathfrak{X}$-同相写像が取れると，思うが，証明はできていない．）

(22) $X \subset \mathbb{R}^n$をコンパクトな非特異代数的集合，$f_1$と$f_2$をX上の多項式関数とする．Xの$C^1$同相写像$\pi$が存在して，$f_1 \circ \pi = f_2$となると，仮定する．するとXの$\mathfrak{X}$-同相写像$\pi'$が存在して，$f_1 \circ \pi' = f_2$とできる．

(19)〜(22)は(13)の応用である．すべての結果の証明は[1]で書かれる．

## 参考文献


[1]. M. Shiota, Subanalytic geometry and PL topology.

[2]. L. Van Den Dries, Remarks on Tarski's problem concerning $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp.)$, Logic Colloquium 1982, 97-121, Ed. by G. Lolli, G. Longo, A. Marja, North Holland, 1984.