数理解析研究所講究録
第 766 巻 1991 年 49-54

特異摂動におけるある種の安定性

京大　数理研　研修員　　芦野　隆一

南雲[6] は、定数係数線形偏微分方程式系の初期値問題における特異摂動のSobolev 空間H^sにおける安定性を定義しその必要十分条件を与えた。しかしながら、南雲の安定性の定義には不自然な部分があった。そこでここでは南雲よりも限定された単独の方程式についてに別の安定性を定義しその必要十分条件を与える。この条件が南雲の条件より本当に弱いことも示す。

m, m', m'' は自然数で $m=m'+m''$ を満たし、ε はpositive small parameter とする。

$$P_1(\xi) = \Sigma_{k=0}^{m} p_{1,m-k}(\xi')\xi_1^{k},\quad p_{1,0} = \text{const.} \neq 0$$

$$P_2(\xi) = \Sigma_{k=0}^{m'} p_{2,m'-k}(\xi')\xi_1^{k},\quad p_{2,0} = \text{const.} \neq 0$$

に対し、$L(\varepsilon,D) = \varepsilon P_1(D)+P_2(D)$ とおく。次の初期値問題を考えよう。

$$\text{(CP)}\quad \begin{cases} L(\varepsilon;D)u(\varepsilon;x) = f(\varepsilon;x), \text{ in } \mathbb{R}^n \\ D_1^{j-1}u(\varepsilon;0,x') = g_j(\varepsilon;x'),\ j=1,\dots,m. \end{cases}$$

$$\text{(RCP)}\quad \begin{cases} L(0;D)u(0;x) = f(0;x), \text{ in } \mathbb{R}^n \\ D_1^{j-1}u(0;0,x') = g_j(0;x'),\ j=1,\dots,m'. \end{cases}$$

data $g_j(\varepsilon;x')$, $g_j(0;x')$ および $f(\varepsilon;x)$, $f(0;x)$ はH^∞に属するとし、(CP)および(RCP) は$C([0,T];H^s)$ で一意可解であるとする。

定義（南雲の安定性）：
初期値問題(CP)が(RCP) の$C^m([0,T];H^s)$に属する解$u(0;x)$に関してH^s安定であるとは　$\varepsilon \downarrow 0$　のとき

$$f(\varepsilon;x)\to f(0;x) \text{ in } C([0,T];H^s)$$

$$g_j(\varepsilon;x')\to g_j(0;x'),\ j=1,\dots,m' \text{ in } H^s$$

$$g_j(\varepsilon;x')\to D_1^{j-1}u(0;0,x'),\ j=m'+1,\dots,m \text{ in } H^s$$

を満たす(CP)の$C^m([0,T];H^s)$に属する任意の解$u(\varepsilon;x)$は、つねに

$$u(\varepsilon;x)\to u(0;x)\quad \text{in } C([0,T];H^s)$$

を満たすことである。▒

初期値問題を古典的な意味で考えてみよう。(CP)の解$u(\varepsilon;x)$はC^mであり(RCP) の解$u(0;x)$は$C^{m'}$ である。このとき、$u(\varepsilon;x)$が$u(0;x)$に収束する最も自然な位相は$C^{m'}$ であろう。したがって$g_j(\varepsilon;x')$, $j=m'+1,\ldots,m$ が収束することを仮定することは不自然であろう。

また次のように考えてもよい。簡単のため$f(\varepsilon;x)=f(0;x)=0$ とする。もし色々なdata $g_j(\varepsilon;x')$, $j=1,\ldots,m$ に対して(CP)の解$u(\varepsilon;x)$が(RCP) の解$u(0;x)$に収束するなら$u(0;x)$は$g_j(0;x')$, $j=1,\ldots,m'$だけで決まるのであるから$g_j(\varepsilon;x')$, $j=m'+1,\ldots,m$ の影響は$\varepsilon\downarrow 0$に従って小さくなるであろう。

実際ある種の特異摂動においては$g_j(\varepsilon;x')$, $j=m'+1,\ldots,m$ が収束しない場合でも$u(\varepsilon;x)$が$u(0;x)$に収束する。そこで次の安定性を定義する。

▒定義：

初期値問題(CP)が(RCP) の$C^m([0,T];H^{\max(s,s')})$ に属する解$u(0;x)$に関して$(s,s'+0)$－安定であるとは、ある正数rとある正数Mが存在して$\varepsilon\downarrow 0$ のとき

$$f(\varepsilon;x)\to f(0;x)\quad \text{in } C([0,T];H^{s'})$$

$$g_j(\varepsilon;x')\to g_j(0;x'),\quad j=1,\ldots,m'\ \text{in } H^{s'}$$

$$|g_j(\varepsilon;x')|_{s'+r}\ \leq M,\quad j=m'+1,\ldots,m$$

を満たす(CP)の$C^m([0,T];H^{\max(s,s')})$ に属する任意の解$u(\varepsilon;x)$はつねに

$$u(\varepsilon;x)\to u(0;x)\quad \text{in } C([0,T];H^s)$$

を満たすことである。▒

▒注：

$p_{2,0}/p_{1,0}=p$ とおく。この問題を色々な初期値に対する解$u(0;x)$に関して扱うには、

$(m'' = 2 \text{ and } p \in \mathbb{R}_-)$ または $(m'' = 1 \text{ and } \mathrm{Im}\, p \leqq 0)$

が必要であることを[3] で示した。▒

ε, ξ' をparameter に持つ常微分方程式

$$\begin{cases} L(\varepsilon;D_1,\xi')Y_i(\varepsilon;x_1,\xi') = 0, \text{ in } \mathbb{R}^n \\ D_1{}^{j-1}Y_i(\varepsilon;0,\xi') = \delta_{ij}, \text{ (Kronecker's delta)} \quad i,j=1,\ldots,m. \end{cases}$$

の解を $Y_i(\varepsilon;x_1,\xi')$, $i=1,\ldots,m$ と書く。$d=\max\{1, \mathrm{ord}\, p_{1,j}(\xi')\}$ とおく。

▒定理：
初期値問題(CP)が(RCP) の $C^m([0,T];H^{\max\{s,s'\}+d})$ に属する解 $u(0;x)$ に関して $(s,s'+0)$ －安定であるための必要十分条件は、ある正数 ε_0 と C_0 があって

$$\int_0^T \varepsilon^{-1} \, |Y_m(\varepsilon;x_1,\xi')\langle\xi'\rangle^{s-s'}| \, dx_1 \leqq C_0, \text{ for } 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

$$|Y_i(\varepsilon;x_1,\xi')\langle\xi'\rangle^{s-s'}| \leqq C_0, \ i=1,\ldots,m', \text{ for } 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

かつ任意の正数 r に対してある正数 ε_r と C_r があって

$$|Y_i(\varepsilon;x_1,\xi')\langle\xi'\rangle^{s-s'-r}| \leqq C_r, \ i=m'+1,\ldots,m, \text{ for } 0<\varepsilon<\varepsilon_r.$$ ▒

▒注：(南雲による)
初期値問題(CP)が(RCP) の $C^m([0,T];H^{s+d})$ に属する解 $u(0;x)$ に関して H^s 安定であるための必要十分条件は、ある正数 ε_0 と C_0 があって

$$\int_0^T \varepsilon^{-1} \, |Y_m(\varepsilon;x_1,\xi')| \, dx_1 \leqq C_0, \text{ for } 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

$$|Y_i(\varepsilon;x_1,\xi')| \leqq C_0, \ i=1,\ldots,m, \text{ for } 0<\varepsilon<\varepsilon_0.$$ ▒

▒系：
初期値問題(CP)が(RCP) の $C^m([0,T];H^{s+d})$ に属する解 $u(0;x)$ に関

してH^s安定であるなら $(s,s+0)$－安定である。▒

▒定理の証明において苦労した点：
　複素数$z=(z_1,\ldots,z_m)$ と負でない整数 n および$n_1<\ldots<n_m$ を満たす負でない整数 $n_1,\ldots,n_m$に対して、

$$a(n)(z)=(z_j{}^n;j\rightarrow 1,\ldots,m)$$

$$A(n_1,\ldots,n_m)(z)=\det(a(n_i)(z);i\downarrow 1,\ldots,m)$$

$$e(z,x_1)=(\exp\ iz_jx_1;j\rightarrow 1,\ldots,m)$$

$$B(n_1,\ldots,n_{m-1})(z,x_1)$$

$$=\det{}^t({}^te(z,x_1),{}^ta(n_1)(z),\ldots,{}^ta(n_{m-1})(z))$$

$$C(n_1,\ldots,n_m)(z)=A(n_1,\ldots,n_m)(z)/A(0,1,\ldots,m-1)(z)$$

$$D(n_1,\ldots,n_{m-1})(z,x_1)$$

$$=B(n_1,\ldots,n_{m-1})(z,x_1)/A(0,1,\ldots,m-1)(z)$$

とおく。このときＣ，Ｄを定義する右辺は分母が０にならないところで正則であるが実は整関数のなす環の中で割り切れていることがわかりＣ，Ｄはｚの整関数に拡張されているとしてよい。$\varepsilon^{-1}=\lambda^{m''}$とおき、$P_1(\xi)+\lambda^{m''}P_2(\xi)=0$の$\xi_1$についての根を$t_j(\lambda,\xi'),j=1,\ldots,m$
$P_2(\xi)=0$ のξ_1についての根を$s_j(\xi'),j=1,\ldots,m'$ とおく。
証明の途中で

$$Y_i(\varepsilon;x_1,\xi')=(-1)^{i-1}D(0,1,\ldots,i-2,i,\ldots,m-1)(t_1,\ldots,t_m,x_1),\quad i=1,\ldots,m$$

の$\varepsilon\downarrow 0$のとき（つまり$\lambda\uparrow\infty$のとき）の挙動をξ'が有界のときに調べる必要がある。根の挙動については適当に番号をつけかえて

$$t_j(\lambda,\xi')\rightarrow s_j(\xi'),\quad j=1,\ldots,m'$$

$$t_j(\lambda,\xi')/\lambda\rightarrow c_j,\quad j=m'+1,\ldots,m.$$

c_jは０でない相異なる定数となることがわかっているので、

$Y_i(\varepsilon;x_1,\xi')$, $i=1,\dots,m$ の $\varepsilon\downarrow 0$ のときの極限が求まる。ただし、計算の途中で D を定義する行列式を展開するときには、展開した式がもはや z の整関数にはならないので

$$t_j(\lambda,\xi')\neq t_k(\lambda,\xi'),$$
$$j=1,\dots,m',\ k=m'+1,\dots,m \text{ または } j,k=m'+1,\dots,m,\ j\neq k.$$

であることを使ってうまく展開する必要がある。それには列を $1,\dots,m'$列と$m'+1,\dots,m$列に分けてLaplace 展開をすれば良いことに気が付くのに苦労した。▒

▒コメント：
　安定性の定義において、$g_j(\varepsilon;x')$, $j=m'+1,\dots,m$に対する仮定はないことが望ましい。実際、H^s安定であるときには、ある $c>0$ と $g_j(\varepsilon;x')=\varepsilon^{-c}g_j(x')$, $j=m'+1,\dots,m$ があって、

$$\|\ g_j(\varepsilon;x')\ \|\to\infty \text{ in } H^s$$

であるにもかかわらず、

$$u(\varepsilon;x)\to u(0;x) \text{ in } C([0,T];H^s)$$

が成り立つことがわかる。このようにさらに強い安定性を考えるには、ε をparameter に持つようなSobolev 空間を考える必要があると思われる。▒

　熊ノ郷[7] は南雲の意味で安定であるための必要十分条件を、２階単独の特別な方程式について、係数の条件として与えた。この論文においては筆者の特異摂動における許容性との関連を考慮して、$(s,s+0)$ －安定である例を、２階または３階の強双曲型の特別な場合に与えた。

参　考　文　献

[1] R. Ashino: The reducibility of the boundary conditions in the one-parameter family of elliptic linear boundary value problems I, Osaka J. Math. 25 (1988), 737-757.

[2] R. Ashino: The reducibility of the boundary conditions in the one-parameter family of elliptic linear boundary

value problems II, Osaka J. Math. 26 (1989), 535-556.

[3] R. Ashino: On the admissibility of singular perturbations in Cauchy problems, Osaka J. Math. 26 (1989), 387-398.

[4] R. Ashino: On the weak admissibility of singular perturbations in Cauchy problems, Publ. RIMS, 25 (1989), 947-969.

[5] R. Ashino: On Nagumo's H^s-stability in singular perturbations, to appear in Publ. RIMS, 27 Vol.4 (1991).

[6] Nagumo: On singular perturbation on linear partial differential equations with constant coefficients I, Proc. Japan Acad. 35 (1959), 449-454.

[7] Kumano-go: On singular perturbation on linear partial differential equations with constant coefficients II, Proc. Japan Acad. 35 (1959), 541-546.