数理解析研究所講究録
第768巻 1991年 40-44

単純群分類後の有限群論
—— pushing-up による revision ——

東京大学　五味健作　(Gomi Kensaku)

有限単純群の分類は 1982 年頃完成した。しかしその証明は非常に長く複雑で、500 篇以上の論文に分散し、総計 1 万 5 千ページにのぼるとも言われている。そもそも分類の目的は、その結果を使って有限群に関する難問を解決することにあるが、このように証明の大変な大定理はそう気軽に使えないという人も多い。これにも同感するが、それよりも、現在の証明にはなりふりかまわぬ見苦しいところが多過ぎると思う。数学的な美を追求することが数学の目標であるならば、現在の分類証明に満足はできない。専門家の一人として、傍観したり逃避するのではなく、証明の改良 (≈ revision) の努力をしなければと思う。

改良のためには新しいアイデアなり方法なりが当然必要だが、有望な新しい方法のひとつに pushing-up と呼ばれるものがある。 pushing-up は次のような状況を対象とする。

群 G の有限部分群 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が共通の部分群 S を持ち、

$$O_S(X_i) \neq 1 \quad (i=1,2,\ldots,n), \qquad O_S(\langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle) = 1$$

をみたす。

Lie 型の群 G^* の Borel subgroup S^* をとり、S^* を含む parabolic subgroups $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ で $G^* = \langle X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^* \rangle$ なるものをとると上記の条件がみたされる。そこで、上記のような部分群 X_i と S の組みを rank n の parabolic system と呼ぶことにする。なお、ここでとった G^* の parabolic system S^*, X_i^* の rank は G^*

の rank n を越えないが、丁度 n に等しくなるためには各 X_i^* が S^*-既約であることが必要充分である。

pushing-up の基本問題は次のように述べられる。

parabolic system の構造を調べよ

ただし実際には、必要に応じていろいろな条件を付け加える。例として次の条件を考えてみる。

有限群 G の 2-local subgroup はすべて可解である。

J. G. Thompson は Fields 賞授賞の対象となった有名な論文で N-group を分類しているが、上記の条件は N-group の条件の自然な拡張である。そこで、上記の条件をみたす群を N_2-group と呼ぶことにする。signalizer の一般論によって、N_2-group G に対しては、次の条件を仮定することができる。

G のすべての 2-local subgroup L が $C_L(O_2(L)) \leqq O_2(L)$ をみたす(すなわち、G は標数 2 型である)。

林誠さん、田中康彦さんと私は、標数 2 型の N_2-group を pushing-up によって分類することを目指している。以下これについてお話しする。まず、標数 2 型の N_2-group G に対しては次のことが証明される[1]。

定理 1. 次のいずれかが起きる。

(1) G の Sylow 2 群は G の唯一つの maximal 2-local subgroup に含まれる。

(2) G の rank 2 の parabolic system X_1, X_2, S で次の条件をみた

すものが存在する。

(i) S は G の Sylow 2 群である。

(ii) X_i は S 既約である。

(iii) $C_{X_i}(O_2(X_i)) \leqq O_2(X_i)$

(1)の場合には pushing-up method によって、G が strongly embedded subgroup を持つか、あるいは G の Sylow 2 群が二面体群、準二面体群、あるいは Aut(Sp(4,2)) の Sylow 2 群と同形であることが証明される[2]。(2)の場合は、前記の Lie 型の群の例から想像できるように、G が標数 2, 階数 2 の Lie 型の群の特徴を備えていることを示す。実際、(2)の場合に関して次のことが証明される[3,4]。

定理 2. 群 G の rank 2 の parabolic system X_1, X_2, S が次の条件をみたすとする。

(i) S は X_i の Sylow 2 群である。

(ii) X_i は S 既約である。

(iii) $C_{X_i}(O_2(X_i)) \leqq O_2(X_i)$

(iv) X_i は可解である。

(v) $S = \langle [O_2(X_i), O^2(X_i)],\ O_2(X_1) \cap O_2(X_2)\ ;\ i=1,2 \rangle$

このとき、X_1, X_2, S は GL(3,2), Sp(4,2), $G_2(2)'$, $G_2(2)$, M_{12}, Aut(M_{12}), ${}^2F_4(2)'$, ${}^2F_4(2)$ の Borel subgroup と rank 1 parabolic subgroups から成る parabolic system と同形である。

定理 1 において G が quasi-thin の場合を考える。すなわち、任意の 2-local subgoup L と任意の奇素数 p に対して、L は $Z_p \times Z_p \times Z_p$ を含まないとする。このとき、定理 1 の(2)の parabolic system は定理 2 の(i)−(v)をみたすことが証明される[2]。したがって、標数 2 型の N_2-group G が quasi-thin ならば、2-local structure について

はっきりとした情報が得られて、Sylow 2 群あるいは involution の中心化群による特徴付けを使えば、$G \cong {}^2F_4(2)'$ etc なることが証明される。したがって、Janko-Smith の定理[5,6] の pushing-up による証明が得られたことになる。この証明は Lie 型の群の構造に合った、まったく自然な考え方に沿っているし、従来の証明と比べてはるかに簡明になっていると思う。 quasi-thin という条件を除くことも大筋では出来ているが、これは現在進行中の仕事であり[7]、まだお話しする段階ではない。 Janko-Smith の定理の証明を含めて、これまで分類に用いられて来た方法は N-group paper に源を持つ Thompson 流の方法であったから、pushing-up という新しい方法が N-group に極めて有効であることが立証されつつあることは、単純群の研究に新しい可能性を開くものと思う。

文 献

[1] 五味、On the 2-local structure of groups of characteristic 2 type, *J. Algebra*, vol.108.

[2] 五味、林、A pushing-up approach to the quasi-thin simple finite groups with solvable 2-local subgroups, *J. Algebra* に近刊.

[3] 五味、田中、On pairs of groups having a common 2-subgroup of odd indices I-II, *Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo*, vols.35,40.

[4] 林、田中、Amalgams of odd index, 近刊.

[5] Janko, Nonsolvable finite groups all of whose 2-local subgroups are solvable, *J. Algebra*, vol.21.

[6] Smith, Finite simple groups all of whose 2-local subgroups are solvable, *J. Algebra*, vol.34.

[7] 五味、林、On finite groups all of whose 2-local subgroups are solvable, 準備中.