数理解析研究所講究録
第775巻 1992年 1-10

U(1) gauge理論にもとづく3次元多様体の位相不変量 II.

東大・理 牛腸 徹 (Toru Gocho)

数年前、[W]においてWittenにより3次元多様体(及びその中のlink)の位相不変量が物理的なideaにもとづいて定義されて以来、それを数学的に厳密に定義しようという試みが数学サイドでなされてきている。originalのWittenの論文[W]、及びそれに関連したAtiyah, Hitchin, Segal等の研究により、この不変量を微分幾何的にとらえることが可能であると考えられる。そうした観点にもとづいてできる限り幾何的に不変量を構成し、理解したいという希望を筆者はもっている。Wittenの不変量に相当すると思われる不変量の数学的に厳密な構成という点では[R-T], [K]などにより一応の解決をみていると考えられるが、そこでは厳密な不変量の構成に主眼がおかれているため、originalな幾何的ideaはかくれてしまっているように思われる。そこで現在Jones-Witten理論と呼ばれているものの微分幾何的側面の理解のため

の第1段階として gauge群が $U(1)$ の場合にこれに当たる不変量を幾何学的に、かつ explicit に構成しようと試みたのが［G1］である。これについては講究録の別の部分に書いたので（［G2］）、ここではそうした構成の idea の base となった［W］における考え方と、それを幾何的にとらえようという Atiyah 周辺の人達の考え方の基本となる部分の一部を筆者なりにかいつまんで説明したいと思う。これについては現在では Atiyah による解説書［A2］もあるので、そこではあまり説明されていない部分を説明することを目標とした。

さて、Witten の original な定義の setting は次のようなものである。M を closed oriented 3次元多様体、G を compact Lie 群とし、M 上の trivial G-bundle $P_M = M \times G$ 及び P_M 上の connection の空間 $\mathcal{A}_M \cong \Omega^1(M, \mathfrak{g})$（$\mathfrak{g}$ は G の Lie algebra）を考える。このとき $\mathcal{A}_M$ 上には

$$CS(A) = \frac{1}{4\pi}\int_M tr(dA \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

で定義される関数 $CS : \mathcal{A}_M \longrightarrow \mathbb{R}$ が考えられる。（これを Chern-Simons invariant という。）これを Lagrangian として Feynmann の径路積分

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}_M} e^{\sqrt{-1}k\,CS(A)} \mathcal{D}A \qquad (k \in \mathbb{N} \text{ は parameter})$$

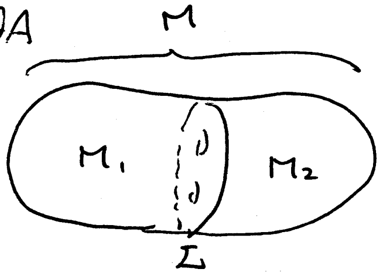
を考えると、これは M の位相不変量になるというのが

Wittenの主張であった。この定義は現在の数学では認めがたいものであるが、不変量 $Z_k(M)$ を non-empty な境界をもつ3次元多様体 M にまで拡張することにより、数学的に定式化できるところまで reduce しようというのが idea である。

実際、$\partial M = \Sigma \neq \emptyset$ のとき不変量 $Z_k(M)$ は次のように拡張される。P_Σ, $\mathcal{A}_\Sigma$ などを上で M のかわりに Σ を考えたものとし、$r : \mathcal{A}_M \to \mathcal{A}_\Sigma$ で restriction map を表わす。このとき $Z_k(M)$ は $\mathcal{A}_\Sigma$ 上の関数 $Z_k(M) : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathbb{C}$ として、

$$Z_k(M)(a) = \int_{r^{-1}(a)} e^{\sqrt{-1}kCS(A)} \mathcal{D}A$$

により定義される。



このように不変量を拡張して考える利点は、

$M = M_1 \cup_\Sigma M_2$, $\partial M_1 = \Sigma = -\partial M_2$ と分解したときに、

$$\begin{aligned} Z_k(M) &= \int_{\mathcal{A}_M} e^{\sqrt{-1}kCS(A)} \mathcal{D}A \\ &= \int_{\mathcal{A}_M} e^{\sqrt{-1}kCS(A_1) + \sqrt{-1}kCS(A_2)} \mathcal{D}A, \quad A_i = A|M_i \\ &= \int_{\mathcal{A}_\Sigma} Z_k(M_1)(a)\, \overline{Z_k(M_2)(a)}\, \mathcal{D}a \\ &= \langle Z_k(M_1), Z_k(M_2) \rangle \end{aligned}$$

と $Z_k(M)$ が $Z_k(M_1)$ と $Z_k(M_2)$ の pairing で表わせる点にある。

この $Z_k(M): \mathcal{A}_\Sigma \to \mathbb{C}$ を gauge 変換群 $\mathcal{G}_\Sigma = C^\infty(\Sigma, G)$ の symmetry によって有限次元的な対象に reduce するというのが idea である。

そこでしばらくは上の $Z_k(M)$ のことは忘れて2次元面 Σ 上の connection の空間 $\mathcal{A}_\Sigma$ を考察する。$\mathcal{A}_\Sigma$ は $\Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ を model とする affine 空間であるので、$\Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ 上の symplectic form.

$$\omega(\alpha, \beta) = -\int_\Sigma \mathrm{tr}(\alpha \wedge \beta) \qquad , \alpha, \beta \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$$

により ∞ 次元 affine symplectic 多様体になる。今 $A_0 \in \mathcal{A}_\Sigma$ を1つ fix すると（以下では A_0 として trivial connection を考える。）$A \in \mathcal{A}_\Sigma$ に対し $A - A_0 \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g}) = T_A \mathcal{A}_\Sigma$ であるので、$\theta_A(\cdot) = \omega(A - A_0, \cdot) \in T_A^* \mathcal{A}_\Sigma$ により $\mathcal{A}_\Sigma$ には自然な1-form θ が定まる。微分幾何的には、1-form は trivial hermitian line bundle $\underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}_\Sigma$ 上の unitary connection ともみなせるが、さらに parameter k を導入して $\nabla^{(k)} = d - \sqrt{-1}\pi k \theta$ なる connection を考えてみる。このとき connection $\nabla^{(k)}$ の curvature $F^{\nabla^{(k)}}$ は、$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F^{\nabla^{(k)}} = k\omega$ となる。すなわち $(\underline{\mathbb{C}}, \nabla^{(k)}) \to (\mathcal{A}_\Sigma, k\omega)$ は symplectic geometry で言うところの geometric quantization の setting になっている。

さて connection の空間 $\mathcal{A}_\Sigma$ には gauge 変換群 $\mathcal{G}_\Sigma =$

$C^\infty(\Sigma, G)$ が

$$g\cdot a = g^{-1}ag + g^{-1}dg \qquad , \ g \in \mathcal{G}_\Sigma, \ a \in \mathcal{A}_\Sigma$$

によって作用するが、明らかにこの作用は symplectic form ω を保つ。

一般に (X, ω) を symplectic 多様体、$(L, \nabla) \to (X, \omega)$ を hermitian line bundle L とその上の unitary connection ∇ で curvature F^∇ が $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F^\nabla = \omega$ を満たすものとする。このとき Lie 群 H が X 上 symplectic form ω を保って作用するとき、moment map と呼ばれる写像 $\mu : X \to \mathfrak{h}^*$ ($\mathfrak{h}$ は H の Lie algebra, $\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{h}$ の dual space) を考察することができる。これは H-equivariant map $\mu : X \to \mathfrak{h}^*$ で、$\mathfrak{h} \ni \xi$ の infinitesimal 作用 $\xi^* \in \mathfrak{X}(X)$ に対して $d\langle\mu, \xi\rangle = i_{\xi^*}\omega$ をみたすもののことである。このような写像の存在と L 上への metric と connection ∇ を保つ $\mathfrak{h}$ 作用の持ち上げの存在とが同値であることが知られている。

我々の setting では $\mathcal{G}_\Sigma$ の Lie algebra $\mathfrak{g}_\Sigma$ は $\mathfrak{g}_\Sigma = \Omega^0(\Sigma, \mathfrak{g})$ であり、

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(\Sigma, \mathfrak{g}) \times \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\varphi, \gamma) & \longmapsto & \int_\Sigma \mathrm{tr}(\varphi\gamma) \end{array}$$

なる pairing により $\mathfrak{g}_\Sigma^* = \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g})$ とみなすと moment map

$\mu : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathfrak{g}_\Sigma^*$ は $\mu(a) = k F_a$ ($F_a = da + a \wedge a$ は a の curvature 2 form) で与えられることはよく知られている。したがってこの moment map に対応した $(\mathfrak{L}, \nabla^{(k)}) \to (\mathcal{A}_\Sigma, k\omega)$ への $\mathfrak{g}_\Sigma$ 作用の持ち上げが考えられるが、$k \in \mathbb{Z}$ のときこれは $\mathcal{G}_\Sigma$ 作用を induce し、次で与えられる。$(a, u) \in \mathfrak{L} = \mathcal{A}_\Sigma \times \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{G}_\Sigma$ に対し、

$$g \cdot (a, u) = (g \cdot a \, , e^{\sqrt{-1} k S(a, g)} u)$$

とすると、$S(a, g)$ は、

$$S(a, g) = CS(\tilde{g}^* A) - CS(A)$$

但し $\partial M = \Sigma$ となる M と $A|_\Sigma = a$, $\tilde{g}|_\Sigma = g$ となる $A \in \mathcal{A}_M$, $\tilde{g} \in \mathcal{G}_M$ をとる。

によって与えられる。この $S(a, g)$ は本質的に Wess-Zumino-Witten model に現われる Lagrangian となることに注意しておく。このように 2次元面 Σ 上の connection 空間 $\mathcal{A}_\Sigma$ 上の symplectic geometry は 3次元空間 M 上の Chern-Simons invariant と密接に関係していることが分かる。

さて以上により $\partial M = \Sigma$ のときの M の不変量 $Z_k(M)$ は $(\mathfrak{L}, \nabla^{(k)}) \to (\mathcal{A}_\Sigma, k\omega)$ の $\mathcal{G}_\Sigma$ 不変な section と考えられるが、実はもっと強いことが言える。すなわち、Σ 上に complex structure J を入れると $\mathcal{A}_\Sigma$ には Kähler 多様体の構造が、$\mathfrak{L} \to \mathcal{A}_\Sigma$ には $\nabla^{(k)}$ を hermitian connection とする

ような holomorphic line bundle の構造が入り、それに関して $Z_k(M)$ は holomorphic section になる（[R-S-W]）。この holomorphic category では $\mathcal{G}_\Sigma$ symmetry は、その複素化 $\mathcal{G}_\Sigma^{\mathbb{C}} = C^\infty(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$ の symmetry に拡張するので $\mathcal{G}_\Sigma^{\mathbb{C}}$-symmetry で割ってやることで $\mathcal{L}_{\Sigma,J}^{(k)} \to \mathcal{M}_{\Sigma,J}$ を得る。ここで $\mathcal{M}_{\Sigma,J} = \mathcal{A}_\Sigma /\!/ \mathcal{G}_\Sigma^{\mathbb{C}}$ で、これは $\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_\Sigma$、すなわち flat G connection の moduli 空間に等しいことが知られている。そこで、$Z_k(M) : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathbb{C}$ という ∞ 次元的なものを、$\mathcal{G}_\Sigma^{\mathbb{C}}$ という ∞ 次元の symmetry によって $Z_k(M) \in H^0(\mathcal{M}_{\Sigma,J}, \mathcal{L}_{\Sigma,J}^k)$ という有限次元的に定義できる対象に reduce して考えようというのが idea である。前に $M = M_1 \cup_\Sigma M_2$ と分解したときに考えた pairing $Z_k(M) = \langle Z_k(M_1), Z_k(M_2) \rangle$ も有限次元に reduce した上での pairing と考えて $Z_k(M)$ を定義しようというのが Atiyah の topological quantum field theory（[A 1]）の idea であった。

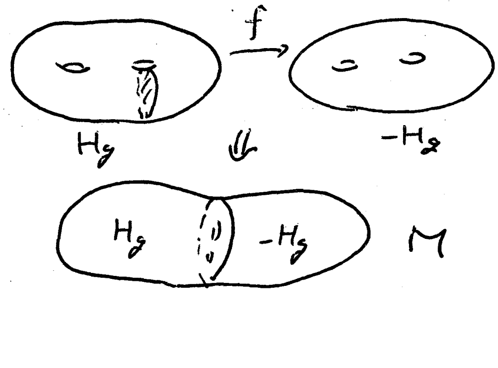
さて、このように有限次元への reduction を考える際に Σ 上に complex structure J を導入する必要があった。この complex structure J に対する dependence をなくすために、[W] では次のことが主張された。$\mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)} = H^0(\mathcal{M}_{\Sigma,J}, \mathcal{L}_{\Sigma,J}^{(k)})$ として $\mathcal{H}_\Sigma^{(k)} = \bigcup_J \mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ を Σ の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_\Sigma$ 上の vector bundle とみなすとき、$\mathcal{H}_\Sigma^{(k)}$ には projective flat connectionが入る。すなわち $\mathcal{H}_\Sigma^{(k)}$ の fiber $\mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ は up to constant ですべて同一視されることになる。さらに、connection の引きもどしによる $\mathcal{A}_\Sigma$ 上の $\mathcal{D}iff^+(\Sigma)$ 作用は、$\mathcal{H}_\Sigma^{(k)}$ 上に mapping class group $\Gamma_\Sigma = \mathcal{D}iff^+(\Sigma)/\mathcal{D}iff_0^+(\Sigma)$ の作用を induce する。これにより Γ_Σ は $\mathcal{H}_\Sigma^{(k)}$ 上の projective flat connection の monodromy 表現を通して $\mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ に symmetry として作用することになる。

ここまで問題を reduce すると結局 Witten type の不変量を与えることは、適当な条件を満たすように、

1). 2次元面 Σ に mapping class group Γ_Σ の projective な作用をもつ有限次元 vector space $\mathcal{H}_\Sigma$ を対応させ、
2). $\partial M = \Sigma$ となる3次元多様体 M に対してその不変量 $Z(M) \in \mathcal{H}_\Sigma$ を対応させる

ことであると解釈できる。

さて、実際に closed oriented 3次元多様体 M の不変量を与える1つの方法として、M が Heegaard 分解をもつことを利用するものがある。今、genus g の handle body を H_g、$\partial H_g = \Sigma_g$, $f \in \Gamma_{\Sigma_g}$ として $M = H_g \cup_f (-H_g)$ と表わされるとする。すると topological quantum field theory の要請から



$Z(M) = \langle f \cdot Z(H_g), Z(H_g) \rangle$ と表わされることになる。したがって $Z(M)$ が M の Heegaard 分解の仕方によらないように $Z(H_g)$ を定めることができれば不変量 $Z(M)$ が定義される。これは [K] において河野氏が conformal field theory から得られる monodromy 表現を用いて不変量を構成したときの idea であり、[G 1] における幾何学的な構成の最後の部分でも用いらせてもらった方法でもある。

以上 Jones-Witten 理論における幾何学的な idea の一部を筆者なりに述べたが、こうした微分幾何学的な線に沿った不変量の構成は筆者の知る限り未だ完全には得られていないようである。特に holomorphic section $Z_k(M) \in \mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ が何によって決まるのかということについてはあまり手がついていないように思われる。この点でも gauge 群が $U(1)$ の場合の理論をよく知ることが何らかの助けにならないかと希望しているが、これからの課題である。

(references)

[A 1]. M.F. Atiyah, Topological quantum field theories, Publ. I.H.E.S. 68 (1989) 175-186

[A 2]. M.F. Atiyah, The geometry and physics of knots, Cambridge University press (1990)

[G 1]. T. Gocho, The topological invariant of three-manifolds based on the U(1) gauge theory (preprint)

[G 2]. 牛腸 徹, U(1) gauge理論にもとづく3次元多様体の位相不変量 I, 「複素解析幾何学とその周辺の研究」の数理研講究録

[K]. T. Kohno, Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class group I. (preprint)

[R-S-W]. T.R. Ramadas, I.M. Singer, and J. Weitsman, Some comments on Chern-Simons gauge theory. Comm. Math. Phys. 126 (1989), 409-430

[R-T]. N. Reshetikhin, V. Turaev, Invariants of 3-manifolds via Link polynomials and Quantum groups Invent. Math. 103 (1991), 547-597

[W] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm. Math. Phys. 121 (1989) 351-399