数理解析研究所講究録
第775巻1992年32-43

正則ベクトル束の拡張について

京大教養 藤木 明 (Akira Fujiki)

Xをコンパクト複素多様体，YをX上高々normal crossingsのみをもつdivisorとし，$U=X-Y$とおく．EをU上の正則ベクトル束とする．いまEのエルミート計量れで，その曲率がYに沿ってPoincare growthを持つ(cf. §1)ものがあたえられているとする．このときさらにXがprojectiveならUの自然なalgebraic structureに関して，Eは自然にalgebraicベクトル束の構造を持つ.(Cornalba-Griffiths [CG; Theorem I]).

本稿ではこの[CG]の結果への補足として，一般の場合に，Eは自然にX上の解析的連接層に拡張することを述べる．これはprojectiveの場合にはNevanlinna理論を用いない[CG]の結果の別証となっている．この際ひとつのポイントは，([CG]におけるように)Eが単に"meromorphic structure"を持つだけでなく，localなcoherent extensionsがglobalに貼り合う事を，Bombieriの方法(cf. [H; Th.4.4.4], also [Si])を

用いて示す事にある．

開多様体U上での(Higgs)ベクトル束からX上の"parabolic"ベクトル束を構成することは，小林-Hitchin予想のopen版を考える場合に必要なstepと思われる．実際，一次元の場合には，Seshadri [MS]，Simpson [S1][S2]において具体的な構成がなされているが，特に後者においては[CG]の結果が用いられている．高次元の場合の同様の状況では，上記のようなcanonicalなcoherent extensionを得る事は必要なstepであろう．

1. 結果

X, Y, Uを上のとうりとする。各$x \in X$に対し，そのxにおける近傍$\tilde{W}$で，$\tilde{W} \cong D_\varepsilon^n$, $D_\varepsilon = \{|z| < \varepsilon\}$ $(0<\varepsilon<1)$なるものが存在し，$\tilde{W}$内ではYは$z_1 \cdots z_k = 0$で定義されている．このとき$W := \tilde{W} \cap U$は，$D_\varepsilon^{*k} \times D_\varepsilon^{n-k}$と同型である．(ここで$D_\omega^* = D_\omega - \{0\}$.) 以後$\tilde{W}$, Wは常にこのような集合を表すものとする．

D_ω^*上のKähler計量 $\sqrt{-1}\,\dfrac{dz \wedge d\bar{z}}{r^2(\log\frac{1}{r})^2} = -\underset{\vee\, 0}{\mathrm{const}}\,\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\log\log\frac{1}{r}$ と，D_ω上のユークリッド計量から得られるW上のKähler計量をg_Wで表す．ω_WをそのKähler形式とする。

EをU上の正則ベクトル束とする．

<u>定義</u>[CG]　ψを End E-値 k-形式とする．ψがYに沿って <u>Poincare growth</u> を持つ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists C>0$ st $\forall \sigma \in E_x$, $\forall t_1, \cdots, t_k \in T_{W,x}$（接ベクトル）に対し

$$\psi(\sigma) := \left| \frac{(\psi\sigma, \sigma)}{(\sigma, \sigma)}(t_1, \cdots, t_k) \right|^2 \leqq C\,\omega(t_1, \bar{t}_1) \cdots \omega(t_k, \bar{t}_k).$$

特に通常の k-形式（E直線束の時）ψに対しては

$$|\psi(t_1, \cdots, t_k)|^2 \leqq C\,\omega(t_1, \bar{t}_1) \cdots \omega(t_k, \bar{t}_k)$$

と同じ．(cf. [Mu; §1])

$\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(E)$,　$\mathcal{O}(W, E) = \{W$上のEの holomorphic section$\}$ とおく．一般に，任意の部分集合 $A \subseteq \mathcal{O}(W, E)$ に対し，Aの元で生成される $j_*\mathcal{E}$ の $\mathcal{O}_X$-subsheaf を $\tilde{\mathcal{E}}(A)$ と書く．ここで $j: U \hookrightarrow X$ は包含写像．以下ではAとして次のような部分空間をとる．まずEのエルミート計量hをとり，任意の整数N, kに対し，

$$\mathcal{O}_h(W, E)_N = \{\sigma \in \mathcal{O}(W, E)\ ;\ \int_W |\sigma|^2 e^{-N\tau_W} dv_W < +\infty\}$$

$$\mathcal{O}_h(W, E)_k = \{\sigma \in \mathcal{O}(W, E)\ ;\ |\sigma|^2 \leqq C e^{k\tau_W}\ \ \exists C > 0\}.$$

これらは，[CG] の場合と逆に減少列 $\cdots \supseteq \mathcal{O}_h(W, E)_N \supseteq \mathcal{O}_h(W, E)_{N+1} \supseteq \cdots$ 等となっていることに注意しておく．

<u>定理 1.</u>　EをU上の正則ベクトル束とし，E上のエルミート計量hでその曲率形式がYに沿って Poincare growth を持つものが存在するとする．このとき$\mathcal{E}$はX上，$j_*\mathcal{E}$の reflexive

な解析的連接部分層に拡張する．$\tilde{\mathcal{E}}$は次の条件により特徴づけられる：$\forall \tilde{W}$ as above に対し，$\exists N_0, \exists k_0 > 0$ st $\forall N \geq N_0$, $\forall k \geq k_0$ に対し，$\tilde{\mathcal{E}}|_W = \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_h(W,E)_N)^{**} = \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_h(W,E)_k)^{**}$ が $j_*\mathcal{E}$ の部分層として成立．（ここで$(\ )^{**}$は double dual を表す．）

つまり，減少列 $\cdots \supseteq \mathcal{O}_h(W,E)_N \supseteq \mathcal{O}_h(W,E)_{N+1} \supseteq \cdots$，$\cdots \supseteq \mathcal{O}_h(W,E)_k \supseteq \mathcal{O}_h(W,E)_{k+1} \supseteq \cdots$，の各項は$\mathcal{E}$の$\tilde{W}$への coherent extension を表しているが，これが $N, k >> 0$ のとき codimension 1 では stationary になり共通の double dual を持つわけである．

定理のhを別の計量 $h_\alpha := h \cdot |s|^{-\alpha}$，$\alpha$ 実数，でおきかえても curvature form が Poincare growth であるという事実は変わらないから，次の定理を得る．ここでsは直線束$[Y]$の canonical section，$|s|$は$[Y]$の適当なエルミート計量に関するsの長さ．

<u>定理 2.</u>　E, h を定理 1 と同じとする．任意の実数αに対し，$\mathcal{E}$の$j_*\mathcal{E}$の reflexive 連接的部分層への拡張$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha$で次の性質をみたすものが存在する：$\forall \tilde{W}$ as above に対し，$\exists k_0 > 0$ st $\forall k \geq k_0$　$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha|_W = \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_h(W,E)_{\alpha,k})^{**}$．ただし，

$\mathcal{O}_h(W,E)_{\alpha,k} = \{ \sigma \in \mathcal{O}(W,E)\ ;\ |\sigma|^2 \leq C\,|s|^{-2\alpha} e^{k\tau_W}$

2. L^2 holomorphic sectionの増大度.

定理1にあるL^2条件と増大度の関係を述べる.

<u>補題2.1.</u> Eを複素多様体上の正則ベクトル束とする. hをE上のエルミート計量でその曲率形式がseminegativeなものとする. このときEの任意の正則切断σに対しそのノルム$|\sigma|$は多重劣調和.

1の記号に戻って

<u>補題2.2.</u> φをW上の非負の多重劣調和関数で, $\varphi^2 e^{-N\tau_W}$がW上(dv_Wに関し)可積分とする. このとき $\varphi^2 = o\left(\prod_{i=1}^{k} \log\frac{1}{r_i}\right)^{2-N}$

ただし $r_i = |z_i|$, $o(\ )$はLandauの記号.

<u>注意.</u> 補題の結論をみたす任意の関数に対し, $\varphi^2 e^{-(N-2)\tau}$がW上可積分なことは明白.

<u>補題2.3.</u> $\exists N_0 > 0$ s.t. $^\forall\sigma \in \mathcal{O}_h(W,E)_N$ (N任意)に対し
$|\sigma|^2 \leqq C\left(\prod_{i=1}^{k} \log\frac{1}{r_i}\right)^{-(N_0+N_1)}$

3. 直線束の場合.

$L=E$をU上の正則直線束とし, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(L)$と書く. いまL上のエルミート計量$h$でその曲率形式$\alpha$がYに沿ってPoincaré growthを持つものがあたえられているものとする. αはd-closed (1,1)-カレントとしてXに拡張される. ($\tilde{\alpha}$と表す.)

<u>補題3.1.</u> $^\forall W$ as above に対し, W上の実C^∞関数ψで次の

性質をみたすものが$\tilde{W}$上の多重調和関数のadditionを除き一意的に定まる; a) ψはg_Wに関しL^2 (したがってカレントとして$\tilde{W}$に拡張), b) $\tilde{W}$上のカレントとして$\bar{\alpha}=\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\psi$.

このψを用いてL上の新しいmetric h_WをW上$h_W:=h\cdot e^{-\psi}$で定めると, h_Wの曲率形式は0, よってh_Wの接続を∇_Wとすると$(L|_W, \nabla_W)$はユニタリflat束. よって Deligneのcanonical extension [D]を考えれば, $L|_W$は$\tilde{W}$上の正則直線束$\tilde{L}$に自然に拡張される. $\tilde{L}$は, 適当な自明化$\tilde{L}\simeq \tilde{W}\times\mathbb{C}$に対し$\nabla_W = d+\sum_{i=1}^{k} a_i \frac{dz_i}{z_i}$, a_i定数, $0\leqq a_i<1$, と書けることで特徴づけられる. また増大度を用いて次のように特徴づけることもできる.

<u>補題3.2.</u> $j_W: W \hookrightarrow \tilde{W}$により$\tilde{\mathcal{L}}\hookrightarrow j_{W*}(\mathcal{L}|W)$と見るとき
「$\sigma\in\mathcal{O}(W,L)$が$\tilde{\mathcal{L}}$のsection」$\Longleftrightarrow$「$h_W$に関する$\sigma$のノルム$|\sigma|_W$が有界」

実際, σが$\tilde{\mathcal{L}}$を生成しているとき, $|\sigma|_W \sim \prod_i |z_i|^{a_i}$である. もとの$h$で$\tilde{\mathcal{L}}$を特徴づけるため$h$と$h_W$を比較する.

<u>補題3.3.</u> $\exists C>0$, $\exists k'>0$ st

$$1/C\Big(\prod_{i=1}^{k}\log\frac{1}{r_i}\Big)^{-k'} h_W \leqq h \leqq C\Big(\prod_{i=1}^{k}\log\frac{1}{r_i}\Big)^{k'} h_W$$

<u>系3.4.</u> 「$\sigma\in\mathcal{O}(W,L)$が$\tilde{L}$のsection」$\Longleftrightarrow$ $\exists k'>0$ $\exists C>0$
$|\sigma|\leqq C\prod_{i=1}^{k}\Big(\log\frac{1}{r_i}\Big)^{k'}$

命題3.5. $\mathcal{L}$ の，invertible sheaf としての X への拡張 $\tilde{\mathcal{L}}$ で各 $\tilde{W}$ 上，上で構成した $\tilde{\mathcal{L}}$ に一致するものがただひとつ存在する．

注意 3.6. 1) この構成で決まるのは拡張 $\tilde{L}$ だけでなく，その Y に沿う "weight" $a=(a_i)$ である．

2) 構成からわかるように，$\tilde{L}\otimes[Y]^{-1}$ が定理にいう L の拡張である． この場合，$\tilde{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_h(W,L)_N)=\tilde{\mathcal{L}}\otimes\mathcal{O}_X[-Y]$ で，double dual をとる必要はない．

E を 2. と同じとし，r を E の階数とする． $L=\Lambda^r E$ に定理を適用して $\tilde{L}$ を得たとする． 上の系と補題 2.3 から

補題 3.7. $\sigma_1,\cdots,\sigma_r\in\mathcal{O}_h(W,E)_N$ （N 任意）とすると，$\sigma_1\wedge\cdots\wedge\sigma_r\in\mathcal{O}(W,L)$ は $\tilde{L}$ の正則 section に拡張する．

4. 局所消滅定理

$\mathbb{C}^n=\mathbb{C}^n(z_1,\cdots,z_n)$， $r_i=|z_i|$， $1\le k\le n$， $0<\varepsilon<1$

$M=\{|z_i|<1\}$， $A=\{z_1\cdots z_k=0\}$， $M'=M-A$

$\tilde{W}=\tilde{W}_\varepsilon=\{|z_i|<\varepsilon\}\simeq D_\varepsilon^n$， $W=W_\varepsilon=\tilde{W}\cap M'\cong D_\varepsilon^{*k}\times D_\varepsilon^{n-k}$

等とし，E を M' 上の正則ベクトル束，h を E 上のエルミート計量とする． $\tilde{V}$ を M の任意の開集合とし $V=\tilde{V}\cap M'$ とする．このとき，$A^q(V,E)=\{V$ 上の E-valued C^∞ $(0,q)$-形式$\}$，

$A_h^q(V,E)_N=\{\varphi\in A^q(V,E)\ ;\ \int_W|\eta|^2e^{-N\tau_W}dv_W<+\infty,\ \eta=\varphi,\bar{\partial}\varphi\}$

（N 整数）とおくと後者は減少列． Dolbeault複体

$\{A^{\cdot}_h(V,E)_N,\bar\partial\}$ のコホモロジー群を $H^q_h(W,E)_N$ で表す．

<u>定理 4.1.</u>　h の曲率形式が A に沿って Poincare growth を持つとする。このとき $\exists N_0>0$, s.t. $\forall N\geq N_0$, $\forall \tilde V \subset\subset \tilde W$ に対し，制限写像 $r_q: H^q_h(W,E)_N\to H^q_h(V,E)_N$ は，$q>0$ に対し 0-写像．しかも N_0 は $W=W_\varepsilon$ の ε（それは multi-index でもよい）に依存せずとれる．

<u>証明の概略</u>　a)　$\tilde W\cong D^n_\omega$ 上の完備 Kähler 計量 $\tilde g=\tilde g_{\tilde W}$ を D_ω の Poincare 計量 $\sqrt{-1}\dfrac{dz\wedge d\bar z}{\varepsilon^2-|z|^2}$ から作る．W の完備 Kähler 計量 $G=G_W$ を $G=\tilde g|_W+g_W$ で定める．$\tilde g$ は $\tilde W$ 上 Kähler ポテンシャル $\tilde\tau=-\log\prod_{i=1}^n(\varepsilon^2-r_i^2)>0$ を持ち，$\tilde G$ は W 上 $T=\tilde\tau|_W+\tau_W$ を Kähler ポテンシャルとして持つ。

b)　$\tilde A^q_h(W,E)_N=\{\varphi\in A^q(W,E);\ \int_W|\eta|^2_Ge^{-NT}dV,\ \eta=\varphi,\bar\partial\varphi\}$ とおく．ただし dV は G の volume form.

<u>補題 4.2.</u>　$A^q_h(W,E)_N\subseteq \tilde A^q_h(W,E)_N$　$\forall q\geq 0$, $\forall N$

c)

<u>補題 4.3.</u>　$(\tilde A^q_h(W,E)_N,\bar\partial)$ の cohomology 群を $\tilde H^q_h(W,E)_N$ とすると，$\exists N_0>0$, s.t. $\forall N\geq N_0$ に対し　$\tilde H^q_h(W,E)_N=0$　$(q>0)$．ここで $W=W_\varepsilon$ の ε によらず N_0 は一定にとれる．

考える cohomology 群は，$h\to h_N:=he^{-\frac{N}{2}T}$ なる metric change で普通の C^∞ L^2-cohomology である．したがって base metric が完備だから [AV; p94 Th2] により，E が h_N と G に関し $W^{0,q}$-

elliptic であることを示しさえすればよい。ところがこれは Poincaré growth の仮定と G の Ricci 形式の容易な評価からでる．

d) 上記から定理を導くことは容易である．

実際の応用には少し modify した形の消滅定理が必要である．すなわち E を $E\otimes m_x$ でおきかえた場合にも定理は成立する．ここに m_x は x における極大イデアル，x は W の任意の点．N_0 はもちろん x のとり方に依存する．証明は x を blowing up した多様体上で上と同じ議論を繰り返すことによって得られる．

5. Local Coherent Extension

4. の situation で考える。1 の記号で，$\tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_h(W,E))_N$ の double dual を $\tilde{\mathcal{E}}_N$ と書くことにする．

<u>命題 5.1.</u> 減少列 $\cdots \supseteq \tilde{\mathcal{E}}_N \supseteq \tilde{\mathcal{E}}_{N+1} \supseteq \cdots$ は上下に stationary. 各 $\tilde{\mathcal{E}}_N$ は $\mathcal{E}|W$ の $\tilde{W}$ への reflexive coherent extension で $\tilde{\mathcal{E}}_\infty = \lim\limits_{N\to\infty} \tilde{\mathcal{E}}_N$ とおくと，$\forall N$ に対し $\tilde{\mathcal{E}}_\infty(-A) \subseteq \tilde{\mathcal{E}}_N$. $\{\tilde{\mathcal{E}}_N\}_{N\in\mathbb{Z}}$ のうち異るものは高々 kr 個．

まず，

<u>補題 5.2.</u> $\mathcal{E}|W$ の reflexive coherent extension で，すべての $\tilde{\mathcal{E}}_N$ を含むものが存在する．

<u>証明の概略.</u> 4 の最後に述べた消滅定理の形から各点 $x\in W$

に対しNを十分大きくとれば $\mathcal{O}_h(W,E)_N$ の元で $E(x)$ の frame を与えるものが存在することがわかる．さらに，$\sigma_1,\cdots,\sigma_r \in \mathcal{O}_h(W,E)_N$ がこのような frame をあたえるとすると，$\sigma_1\wedge\cdots\wedge\sigma_r$ は $\tilde{\mathcal{L}}=(\Lambda^r E)^{\sim}$ 上の正則 section に extend するので特にその零点は'代数的'．このことから結局 $\exists\,\sigma_1,\cdots,\sigma_s\in\mathcal{O}_h(W,E)_N$ $(\exists N)$．でそれらが E の fiber を各点で生成し，さらに生ずるグラスマン多様体への正則写像 $u: W\to Gr(s,r)$ は $\tilde{W}$ からの有理形写像に拡張することがわかる．これから $\mathcal{E}|_W$ の $\tilde{W}$ への coherent extension の存在がしたがう．それがすべての $\tilde{\mathcal{E}}_N$ を含むように構成できることは，補題3.7を活用することによって示される．

次の一般的な結果を思い出しておく．(cf. e.g. [F ; p35,36])

<u>補題5.3.</u> $\mathcal{F}$ を複素多様体上の解析的連接層とする．

i) $\mathcal{F}$ の global section からなる任意の集合 A に対し，A で生成される $\mathcal{F}$ の subsheaf $\mathcal{F}(A)$ は coherent.

ii) $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq\cdots\cdots\subseteq\mathcal{F}$ を coherent subsheaf の増大列とするとき，任意の相対コンパクト領域上この列は stationary.

これから，各 $\tilde{\mathcal{E}}_N$ の連接性と命題の列が上に stationary であることがわかる．また $\tilde{\mathcal{E}}_{-\infty}(-A)\subseteq\tilde{\mathcal{E}}_N$ は $\tilde{\mathcal{E}}_N$ の元の増大度による評価（§2）からすぐわかる。これと reflexivity から $\tilde{\mathcal{E}}_N$ の $N\to\infty$ のときの "stationary" がでる．

6. Global Extension

1の記号で各Wに5の結果を適用すると，$E|W$は$\tilde{W}$上の連接層に拡張しうる．　5の記号で，$\tilde{\mathcal{E}}_\infty = \lim_{N\to\infty} \tilde{\mathcal{E}}_N$とおくと，これが実際$X$上のglobalな連接層になることが示される．これを見るにはYの各点における$\tilde{\mathcal{E}}_\infty$のstalkがintrinsicな記述を許すことを観察すればよい．　その記述は本質的には次の命題であたえられる．

<u>命題6.1.</u>　整数N_0が存在し，次が成立する．　$\tilde{V}$を$\tilde{W}$に相対コンパクトに含まれる多重円板（原点は任意）とし，$V = \tilde{V} \cap W$とおく．　各Nに対し$\tilde{\mathcal{F}}_N = \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_{\mathcal{H}}(W, E)_N)$, $\tilde{\mathcal{F}}'_N = \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_{\mathcal{H}}(V, E)_N)$とおく．（後者は$\tilde{V}$上の連接層）　このとき，$\forall N \geq N_0$と$\forall x \in \tilde{V} \cap Y$に対し$\tilde{\mathcal{F}}_{N,x} = \tilde{\mathcal{F}}'_{N,x}$が成立する．

命題は4の消滅定理を用いてBombieriの議論に帰着することにより示される．(cf. [H; Th 4.4.4])

[AV] Andreotti, A. & Vesentini, E., Carleman estimates for Laplace Beltrami operator on complex manifolds, Publ. Math. IEHS, 25 (1965), 81–130.

[CG] Cornalba, M. & Griffiths, P., Analytic cycles and Vector bundles on noncomplete algebraic varieties, Inventiones math., 28 (1975), 1–106.

[D] Deligne, P., *Equations différentielles á point réguliers singulier*, Lecture Notes in Math., 163, 1970

[F] Fischer, G., *Complex analytic geometry*, Lecture Notes in Math., 538, 1976.

[H] Hörmander, L., *Introduction to complex analysis in several variables*, 2nd ed., North-Holland, 1973

[Mu] Mumford, D., *Hirzebruch's proportionality principle in the non compact case*, Inventiones math., 42 (1977), 239-72

[S1] Simpson, C., *Constructing variations of Hodge structures using Yang-Milles theory* ....., J. AMS, 1 (1988), 867-918

[S2] Simpson, C., *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. AMS, 3 (1990), 713 – 770.

[Si] Siu, Y.-T., *A Thullen type extension theorem for positive holomorphic vector bundles*, Bull. AMS, 78 (1972), 775-76.

[MS] Mehta, V.B. & Seshadri, C.S., *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Math. Ann. 248 (1980), 205 – 239.