数理解析研究所講究録
第 781 巻 1992 年 132-136

接ホモトピー同値について

金沢大理 石本浩康 (Hiroyasu Ishimoto)

M_1, M_2 を単連結 m 次元 C^∞-多様体 ($m \geqq 5$), τM_i ($i = 1, 2$) をそれぞれの接バンドルとする。ホモトピー同値写像 $f: M_1 \to M_2$ が存在して, $\tau M_1 \oplus \varepsilon \cong f^*(\tau M_2) \oplus \varepsilon$ となるとき, M_1 と M_2 は接ホモトピー同値 (tangentially homotopy equivalent) であるという。次の命題を考える。

命題. M_1 と M_2 が接ホモトピー同値ならば, M_1 と M_2 は同相である。

勿論, 一般にはこの命題には反例が存在する。例えば, [8] P. 481 には, 17-連結 49 次元 π-多様体で, その様な反例を幾つでも作り得ることが示されている。また, 命題の逆も一般には成立しないことは, Pontrjagin 類が位相不変量とは限らない例からも明らかである。しかし, 以下の色々な例で見るように, 実際に成立する場合も沢山ある。そこで,

問題. 上の命題がどんな範囲ならば成立するか見極めること，つまり，具体的には命題が成立するなるべく広い範囲を見つけ出すこと。

が当然問題となる。

今までに，次の結果が知られている：

(1) M_1, M_2 が 5 次元単連結多様体ならば，命題は成立し，M_1 と M_2 は微分同相である。(Barden [1])。

(2) M_1, M_2 が 6 次元単連結多様体で 2 次元ホモロジー群が torsion free ならば，命題は成立し，M_1 と M_2 は微分同相である。(Jupp [6])。

(3) M_1, M_2 が 2-連結 7 次元多様体で 3 次元ホモロジー群が 2-torsion を持たなければ，命題は成立し，M_1 と M_2 は Θ_7 を法として微分同相である (i.e. $\exists \Sigma \in \Theta_7, M_1 = M_2 \# \Sigma$)。(Wilkens [9])。

(4) M_1, M_2 が $(n-1)$-連結 $2n$ 次元多様体 ($n \geqq 3$) ならば，命題は成立し，M_1 と M_2 は Θ_{2n} を法として微分同相である。(Lashof [7])。

(5) M_1, M_2 が $(n-1)$-連結 $(2n+1)$ 次元多様体 ($n \geqq 3$) で，$n = 2^i - 2$ のときには n 次元ホモロジー群に $\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/4$ 直和成分を持たないとする。このとき，命題は成立する。(Madsen-

-Taylor-Williams [8])。

(6) $|\theta(M)|$ を M^m と接ホモトピー同値な m-多様体の homeo-types の数とする。(従って, $|\theta(M)|=1 \Leftrightarrow$ 命題が成立)。M が c-連結, $c \geqq (m+1)/3$ $(m \geqq 5)$ ならば,

$$|\theta(M)| \leqq \sum_{i>1} |H^{2i-2}(\mathring{M}; Z/2)|$$

こゝに, $\mathring{M}=M-(\text{open } m\text{-disk})$ である。(Madsen-Taylor-Williams [8])。

(6)の連結性は少しきついが, もう少し弱い条件で命題が成立する場合もある。例えば,

(7) M_1, M_2 が 3-連結10次元 π-多様体で, 4次元ホモロジー群は torsion free とする。このとき, 命題は成立し, M_1 と M_2 は Θ_{10} を法として微分同相である。(石本[4])。

この他にも, $(n-2)$-連結 $2n$ 次元多様体 $(n \geqq 4)$, 或いは $(n-3)$-連結 $(2n-1)$ 次元多様体 $(n \geqq 6)$ に関して, 適当な条件の下に命題が成立する場合が石本[2],[3]に散見される。

命題が成立する可能性の高いものとして, 次を考える:

問題. M を単連結 m 次元 C^∞-多様体,

$$H_i(M)=0 \quad (i \neq 0, p, q=m-p, m)$$

$2p>q>1$ (metastable), $p<q-1$ とする。

Mのような2つの多様体 M_1, M_2 に対して，命題は成立するか。

もし，τM が M の p-切片上で自明ならば，M は Θ_m を法として適当なハンドル体 $W \in \mathcal{H}(m+1, r, q)$ $(r = \mathrm{rank}\, H_p(M))$ の境界 ∂W と見なせるから，その時には，M は S^q 上の S^p-バンドルの連結和に比較的近い存在である。M_1, M_2 が cross-section をもつ S^q 上の S^p-バンドルの連結和の場合に，上の問題を検証して見ると，次の(i)～(V)に対して特殊な場合を除いて命題が成立し，M_1 と M_2 は Θ_m を法として微分同相になる。(石本・三吉［5］)。特殊な場合とは，(iii),(iV),(V)

	(p, q)	連結性	M_1, M_2 の次元
(i)	$(n-1, n+1)$ $(n \geq 4)$	$(n-2)$-連結	$2n$-次元
(ii)	$(n-2, n+1)$ $(n \geq 6)$	$(n-3)$- 〃	$(2n-1)$- 〃
(iii)	$(n-3, n+1)$ $(n \geq 8)$	$(n-4)$- 〃	$(2n-2)$- 〃
(iV)	$(n-4, n+1)$ $(n \geq 10)$	$(n-5)$- 〃	$(2n-3)$- 〃
(V)	$(n-5, n+1)$ $(n \geq 12)$	$(n-6)$- 〃	$(2n-4)$- 〃

において，$n = 2^l - 1$ $(l \geq 4)$ のときには，M_1 と M_2 が Θ_m を法として微分同相にならない例が存在する。しかし，これは同相になる為の反例ではない。

参考文献

[1] Barden, D., Simply connected five-manifolds, Ann. of Math., **82**(1965), 365-385.

[2] Ishimoto, H., On the classification of (n-2)-connected 2n-manifolds with torsion free homology groups, Publ. RIMS. Kyoto Univ., **9**(1973), 211-260.

[3] ——————, On the classification of some (n-3)-connected (2n-1)-manifolds, Publ. RIMS. Kyoto Univ., **11**(1976), 723-747.

[4] ——————, On 3-connected 10-dimensional manifolds, Proc. Japan Acad., **66**A (1990), 165-168.

[5] —————— and K. Miyoshi, On certain manifolds which are tangentially homotopy equivalent, Sci. Rep. Kanazawa Univ., **30**(1985), 1-13.

[6] Jupp, P., Classification of certain 6-manifolds, Proc. Cambridge Philos. Soc. **73**(1973), 293-300.

[7] Lashof, R. K., Some theorems of Browder and Novikov on homotopy equivalent manifolds with an application, Notes prepared by Rudolfo de Sapio, Chicago.

[8] Madsen I., L. R. Taylor, and B. Williams, Tangential homotopy equivalences, Comment. Math. Helvetici, **55**(1980), 445-484.

[9] Wilkens, D.L., Closed (s-1)-connected (2s+1)-manifolds, s=3,7, Bull. London Math. Soc., **4**(1972), 27-31.