数理解析研究所講究録
第782巻1992年50-55

傾斜壁への衝撃砕波のモデル解

九大応力研　岡村 誠(OKAMURA Makoto)

§1.はじめに

海岸におしよせる波がいきよいよく防波堤にぶつかり、激しく水しぶきをあげる現象はよく見られる。このとき防波堤に加わる力やその分布がどうなるだろうかと考えることはおもしろそうである。ちょっと考えると、波の振幅に関する非線形性も強く、水しぶきを上げるほどの砕波現象なので理論的に扱うのは無理のようである。実際今まで行なわれてきた壁に作用する波圧の理論的研究は入射波の振幅が小さくて(そのため弱非線形理論が使える)、砕波がおこらない場合であった。しかし防波堤の設計技術者が必要としている波圧算定公式は、入射波の振幅の大きい砕波現象の起こる場合だし、物理的にもその方がおもしろそうなのはいうまでもない。

壁に作用する衝撃砕波圧の分布を求めることは工学的にとても重要な問題なので、今までに波圧算定公式が数多く提出されてきている。しかし、それらは筆者の知る限り、すべて経験式である。つまり、壁での波圧の最高値と波圧の壁面での空間分布を観測や実験によって適当に決めているのである。衝撃砕波圧算定公式をもう少し演繹的に求めようというのが本研究の主たる目的である。

§2. モデル

まずCookerとPeregrine (1990)によって提出されたモデルを紹介しよう。非圧縮、非粘性の流体の運動方程式は

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\nabla p+\boldsymbol{F} \tag{1}$$

となる。$\boldsymbol{u}$は流体の速さ、pは圧力、$\boldsymbol{F}$は外力、ρは流体の密度(一定)である。ここでU_0を流体が壁にぶつかるときの典型的な流体の速さ、Lを流体の速さの変動する典型的な空間スケール、p_0を最大波圧、F_0を典型的な外力の大きさ、Δtを流体が壁にぶつかっている時間(壁での圧力変動の大きい時間)とする。(1)を簡単にするために次の2つの仮定をしよう。(i) $U_0\Delta t/L \ll 1$、(ii) $F_0\Delta t/(\rho U_0) \ll 1$。つまり(1)の左辺第1項に比べて、左辺第2項(非線形項)と右辺第2項(外力項)を無視した。すると(1)は次のような線形方程式になる。

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=-\nabla p \tag{2}$$

上の2つの仮定について、最近の実験結果から検討してみよう。荒見と服部(1989)は衝撃砕波圧の実験を行なって、単発型衝撃波圧(壁のある場所での圧力の時間変化をグラフに書くと、圧力のピークが1つだけあらわれる波圧のこと)があらわれる時には$U_0\Delta t/L \approx 0.03$、$F_0\Delta t/(\rho U_0) \approx 0.007$となるデータを与えている。上の2つの仮定は衝撃砕波の場合には良い近似となっていることがわかる。入射波があまりいきよいよく壁と衝突しない場合には上の仮定は成立しないが、この時には既存の理論でよい。

圧力を時間積分した圧力の力積は

$$P(\boldsymbol{x}) = \int_{t_b}^{t_a} p(\boldsymbol{x}, t)dt \tag{3}$$

のように書ける。ここでt_b、t_aは波が壁にぶつかった前後の時刻である。($\Delta t \approx t_a - t_b$)。(2)、(3)より扱うべき方程式と境界条件は次のようになる。

$$\Delta P = 0 \qquad \text{流体内部} \tag{4}$$

$$P = 0 \qquad \text{自由表面上} \tag{5}$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \rho U \qquad \text{壁面上} \tag{6}$$

$$P \to 0 \qquad \text{壁面からの距離} \to \infty \tag{7}$$

ここで$\partial/\partial n$は壁に垂直方向の微分で、Uは波が壁にぶつかる直前の流体の速度の壁に垂直な成分である。以下、簡単のために自由表面、及び壁は平らであるとする。このモデルでは入射波の種々の情報がすべて波が壁にぶつかるときの速さの垂直成分Uに押し込まれている。つまりUは入射波の関数と思ってよい。

Cooker と Peregrine (1990) は有限深さで直立壁の場合の圧力の力積についての空間分布を求めた。壁面上だけでなく、流体内部での圧力の力積も求まっていることに注意しよう。

$$P(x, y) = \frac{-2\rho U_0}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \cos \mu \lambda_n H)}{\lambda_n^2} \sin(\lambda_n y) \exp(-\lambda_n x) \tag{8}$$

ここで$\lambda_n = (n + \frac{1}{2})\pi/H$、$x = 0$は直立壁、$y = 0$は自由表面、$y = -H$は底(つまり深さ$H$)である。波がいきよいよくぶつかる範囲は$-\mu H \leq y \leq 0$で、それ以外の壁ではすでに水が壁と接触している。彼らはこの結

果を対応する実験と比較している。この理論では圧力を決定できないので(圧力の力積が決まる)、実験との比較には、両者のピークの値を1に規格化して比べてある。両者の一致はかなり良い。

§3. 傾斜壁の場合のモデル方程式の解

さて傾斜壁への衝撃砕波の波圧算定公式を求めよう。基礎方程式として上で述べたモデル方程式(4)-(7)を使う。ただし壁(平面)が自由表面(平面)に対して垂直ではなく、ある角度2αをなしていて、流体の占める領域が半無限のくさび型とする(図1)。極座標(r,θ)は図1のように決める。

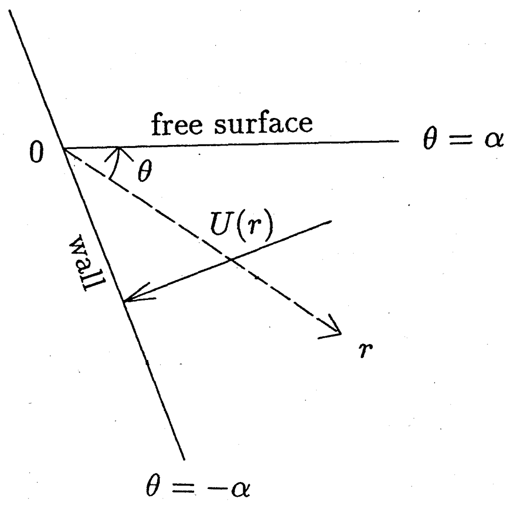


図1

$U(r)$は壁にいきよいよくぶつかる直前の流体の速さの壁に垂直な成分で、壁での場所rに依存している。くさび型の領域におけるラプラス方程式を解くにはメリン変換を使うとよい。詳細は省略し、とにかく求まって圧力の力積の空間分布を書き下すと次のように

なる。

$$P(r,\theta)=\frac{\rho}{2\pi}\int_0^\infty U(x)\log\frac{x^{2b}-2x^br^b\sin(b\theta-\frac{\pi}{4})+r^{2b}}{x^{2b}+2x^br^b\sin(b\theta-\frac{\pi}{4})+r^{2b}}dx,\qquad b=\frac{\pi}{4\alpha} \tag{9}$$

ここで$|U(x)|$と$|x^2U(x)|$は$0\leq x<\infty$で有界である。これは(7)にも関係しているが、メリン変換が存在するための条件である。(9)の積分を実行するために、速度分布$U(r)$の具体的な形を以下のように決める。

$$U(r)=\begin{cases} U_0 & 0\leq r\leq R_0 \\ 0 & R_0<r\end{cases} \tag{10}$$

ここでU_0、R_0は定数である。3種類の角度($2\alpha=120°,\ 90°,\ 67.5°$)における(10)の速度分布に対する圧力の力積の壁での空間分布の解析解は以下のようである。

$b=3/4\ (2\alpha=120°)$について

$$\begin{aligned}\frac{2\pi P}{\rho U_0R_0} &= 2\log\frac{x^{3/4}+1}{|x^{3/4}-1|}+\frac{1}{x}\Big[-2\sqrt{3}\Big(\arctan\frac{2x^{1/4}-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x^{1/4}+1}{\sqrt{3}}\Big)+12x^{1/4} \\ &\quad -\log\frac{(1+x^{1/4})^2}{1-x^{1/4}+x^{1/2}}+\log\frac{(1-x^{1/4})^2}{1+x^{1/4}+x^{1/2}}\Big],\qquad x\equiv\frac{R_0}{r}.\end{aligned} \tag{11}$$

$b=1\ (2\alpha=90°)$について

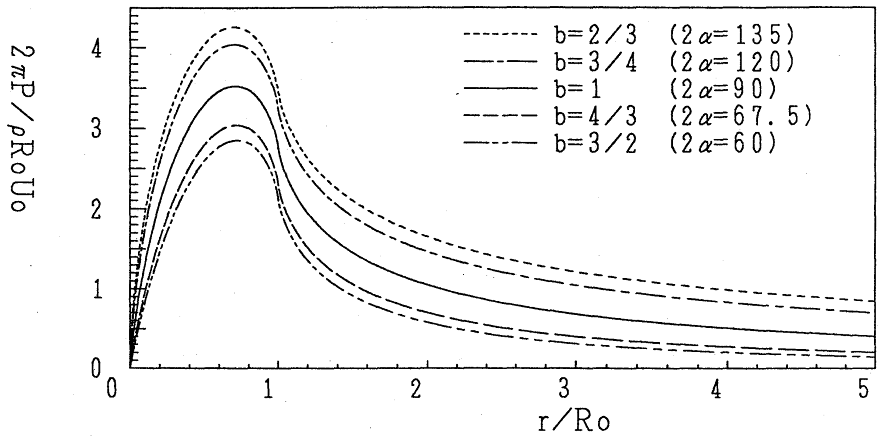
$$\frac{2\pi P}{\rho U_0R_0}=2[(1+\tilde{x})\log(1+\tilde{x})-(1-\tilde{x})\log|1-\tilde{x}|-2\tilde{x}\log\tilde{x}],\qquad \tilde{x}\equiv\frac{r}{R_0}. \tag{12}$$

$b=4/3\ (2\alpha=67.5°)$について

$$\begin{aligned}\frac{2\pi P}{\rho U_0R_0} &= 2\log\frac{x^{4/3}+1}{|x^{4/3}-1|}+\frac{1}{x}\Big\{-2\sqrt{2}[\arctan(1-\sqrt{2}x^{1/3})-\arctan(1+\sqrt{2}x^{1/3})] \\ &\quad +2\log\frac{|x^{1/3}-1|}{x^{1/3}+1}+\sqrt{2}\log\frac{x^{2/3}-\sqrt{2}x^{1/3}+1}{x^{2/3}+\sqrt{2}x^{1/3}+1}+4\arctan x^{1/3}\Big\},x\equiv\frac{R_0}{r}.\end{aligned} \tag{13}$$

図2には5種類の角度についての圧力の力積の空間分布が描かれている。

図2



$r \to 0$での圧力の力積から衝突後の壁に平行な流体の速度u_aを求めると

$$u_a \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{2bU_0}{\pi}\left(\dfrac{r}{R_0}\right)^{b-1}, & 1/4 < b < 1 \\ \dfrac{2U_0}{\pi}\log r, & b = 1 \\ U_0 \cot \dfrac{b+1}{2b}\pi, & b > 1 \end{array} \right\} \qquad r \to 0 \tag{14}$$

壁と自由表面のなす角が90°以上$(b < 1)$になると速度は上向きで$r \to 0$とともに発散する。その発散の程度も角度が大きくなるにつれて、激しくなる。また壁と自由表面のなす角が90°より小さいならば$(b > 1)$流体がとびはねる上向きの速度は有限におさまる。この速度u_aは衝突後の水しぶきの高さに関係している。上の結果は直観的事実とも合致している。

参考文献

荒見、服部 1989 中央大学理工学部紀要 第32巻 37-63

Cooker, M.J. & Peregrine, D.H. 1990 *22nd Intl. Conf. on Coastal Eng.*, Netherlands, ASCE, 1473-1486