数理解析研究所講究録
第782巻1992年70-78

浅水波の大振幅孤立波解について

横浜国大・工　渡辺慎介(Shinsuke Watanabe)
姜波
奈良女子大理　加古富志雄(Fujio Kako)

浅水波の大振幅孤立波解を求める摂動論には大まかに云って、二通りの方法がある。一つは、発展方程式の高次近似による方法であり、才二は定常波解を高次近似する方法である。これら二つの摂動法はともに、小振幅波解から出発して高次解を逐次求めてゆくことが多い。

発展方程式による方法は、逓減摂動法の高次近似としてその方法論は確立している。逓減摂動法の高次近似は、高次の摂動方程式に現われる永年項を孤立波の速度に繰り込むことにより、解を順次求める方法である。しかし、この方法には時间変数と空间変数が含まれているため、取り扱いが複雑である。

定常波解を求める方法は、波形を適当な関数で展開し、その係数を決定してゆく。関数としては、Fourier 級数を用いる場合と、$\mathrm{sech}^{2j} x$，$(j=1,2,\cdots,n)$ を用いる場合がある。

孤立波が $\mathrm{sech}^2 x$ の形で表わされるから、後者の展開の方が収束が良いであろうと予想される。しかしながら、$\mathrm{sech}^{2j} x$ で展開する根拠は必ずしも明確ではない。そこで、本報告では逓減摂動法の高次近似の精神を取り入れた方法により、そうした展開法の正当性を示すと同時に、簡単な場合について解を具体的に示すことにする。

§1. 浅水波の定常波解

深さ h の流体の表面を伝わる浅水波の運動を、非粘性・二次元渦なしの仮定のもとで考える。水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとる。$y=0$ は運動のないときの水面の位置とする。距離を h、速度を $\sqrt{gh}$ （g は重力加速度）、速度ポテンシャルを $\sqrt{gh^3}$ で規格化する。基礎方程式は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad -1 \le y < \eta . \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad , \quad y = -1 \text{ において.} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} && (3) \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right\} + \eta = 0 && (4) \end{aligned}\right\} \; y = \eta \text{ において}$$

である。ここで、Φ と η はそれぞれ規格化された速度ポテンシャルと波高を表わす。速度 c で進む浅水波を考える。小さ

なパラメータεを導入し、次の変数変換と展開をする。

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - ct)$$
$$\eta = \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \varepsilon^3\eta_3 + \cdots$$
$$\Phi = \varepsilon^{1/2}\Phi_1 + \varepsilon^{3/2}\Phi_2 + \varepsilon^{5/2}\Phi_3 + \cdots$$
$$c = 1 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \varepsilon^3 c_3 + \cdots$$

(1) を (2) の境界条件のもとで y について解くと

$$\Phi_1 = \Phi_1(\xi)$$
$$\Phi_2 = -\frac{(y+1)^2}{2}\cdot\frac{d^2\Phi_1}{d\xi^2} + f_1$$
$$\Phi_3 = \frac{(y+1)^4}{4!}\cdot\frac{d^4\Phi_1}{d\xi^4} - \frac{(y+1)^2}{2}\cdot\frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + f_2$$
$$\Phi_4 = -\frac{(y+1)^6}{6!}\cdot\frac{d^6\Phi_1}{d\xi^6} + \frac{(y+1)^4}{4!}\cdot\frac{d^4 f_1}{d\xi^4} - \frac{(y+1)^2}{2}\cdot\frac{d^2 f_2}{d\xi^2} + f_3$$
$$\vdots$$

が得られる。$\Phi_1, f_1, f_2, f_3, \cdots$ は ξ のみの関数で、y には依存しない。これらを用いて、(3) と (4) を書き改める。

(3),(4) で ε の最低次の方程式は

$$\frac{d\Phi_1}{d\xi} = \eta_1$$

であり、次のオーダーの式は

$$-\eta_1^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} - \frac{df_1}{d\xi} + c_1\eta_1 + \eta_2 = 0$$
$$\frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} - \frac{df_1}{d\xi} - c_1\eta_1 + \eta_2 = 0$$

となる。最後の2式の差をとり，ξについて積分すると，$\xi \to \pm\infty$で$\eta_1 \to 0$となる解として，1次の解

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= 2c_1 \operatorname{sech}^2 b\xi \\ b &= \sqrt{\frac{3c_1}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

が求められる。また，

$$\frac{df_1}{d\xi} = -\eta_1^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} + c_1\eta_1 + \eta_2$$

εの次のオーダーの方程式を整理すると

$$\mathcal{L}\eta_2 = F_2(\eta_1) \qquad (6)$$

となる。ここで，演算子$\mathcal{L}$は

$$\mathcal{L} = -3\eta_1 - \frac{1}{3}\frac{d^2}{d\xi^2} + 2c_1 \qquad (7)$$

である。(6)の左辺のオーダーあるいはランク（rank）を見る。εについての展開式から，η_1あるいはc_1のランクを1とすると，ξ微分のランクは$\frac{1}{2}$，η_2とc_2は2，η_3とc_3は3となる。したがって，$\mathcal{L}\eta_2$のランクは3である。(6)の右辺，$F_2(\eta_1)$のランクも3でなければならない。ランクが3の項は，係数にc_1を含まない項として

$$\eta_1^3 \ , \quad \eta_1 \frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} \quad , \quad \frac{d^4\eta_1}{d\xi^4}$$

係数に c_1 を含む項として

$$c_1\eta_1^2 \ , \quad c_1\frac{d^2\eta_1}{d\xi^2}$$

係数に c_1^2 と c_2 を含む項として

$$c_1^2\eta_1 \ , \quad c_2\eta_1$$

がある。ここで，η_1 は(5)に示されている通り c_1 に比例し，さらに，η_1 を ξ に関して2階微分するたびに $b^2\left(=\frac{3}{2}c_1\right)$ が係数に現われるから，$c_2\eta_1$ 以外の項はすべて c_1^3 に比例する。(5)の η_1 を用いると，(6)の右辺は

$$F_2(\eta_1) = \alpha_2 \operatorname{sech}^2 b\xi + \alpha_4 \operatorname{sech}^4 b\xi + \alpha_6 \operatorname{sech}^6 b\xi \qquad (8)$$

によって表わされる。α_2 は c_1^3 と c_1c_2 の関数，α_4 と α_6 は c_1^3 の関数である。

一方，(6)の右辺を0とおいた同次方程式，$\mathcal{L}\eta_2=0$，を満たす解の1つは $\tanh b\xi\cdot\operatorname{sech}^2 b\xi$ である。他の解は表現が複雑であり，かつ，発散する解であるので，ここでは書かない。これから，(6)の右辺を表わす(8)には，永年項が含まれていないことがわかる。(6)の解は

$$\eta_2 = \beta_2 \operatorname{sech}^2 b\xi + \beta_4 \operatorname{sech}^4 b\xi \qquad (9)$$

と書いて求めることができる。なぜなら、一般に

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \operatorname{sech}^{2n} b\xi = 4n^2 b^2 \operatorname{sech}^{2n} b\xi - (4n^2 + 2n) b^2 \operatorname{sech}^{2(n+1)} b\xi$$

が成り立ち、(9)のη_2を使って(6)の左辺，$\mathcal{L}\eta_2$，を計算すると右辺(8)と同じ項が現われ、係数β_2，β_4を決定できるからである。(7)の演算子$\mathcal{L}$に対して、左辺の$\operatorname{sech}^2 b\xi$の係数は0になる。したがって、$c_2$は$c_1^2$によって表わされる。このようにして求めた解は

$$\left.\begin{aligned} \eta_2 &= c_1^2 \operatorname{sech}^2 b\xi \cdot (3 \operatorname{sech}^2 b\xi + 2) \\ c_2 &= \frac{19}{10} c_1^2 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

である。これと同時に、f_1、つまり、Φ_2を決めることができる。これは、η_2とΦ_2をη_1を使って表わすことができることを意味している。

さて、$n-1$次までの解が求められたとしよう。n次の摂動解は

$$\mathcal{L}\eta_n = F_n(\eta_1) \qquad (11)$$

を解けば求められる。両辺のランクは$n+1$である。(11)の左辺に含まれる項は一般に

$$c_1^i \eta_1^j \cdot \frac{d^k \eta_1}{d\xi^k} \cdot \frac{d^l \eta_1}{d\xi^l} \quad \text{および} \quad c_n \eta_1$$

である。もちろん、(3)(4)から(11)の左辺を計算すると、η_2, $\eta_3, \cdots, \eta_{n-1}$ および $c_2, c_3, \cdots, c_{n-1}$ が含まれるが、それらは2次の解(10)と同じように、すべて η_1 と c_1 で表わされると仮定している。ランクが $n+1$ になるためには、

$$i + j + \frac{1}{2}(k + l) = n + 1$$

でなければならない。したがって、k と l はともに偶数または奇数でなければならない。このとき、上式は $\mathrm{sech}^2 b\xi$ の整数巾乗で書くことができる。巾乗の次数の最も高い項は、$i = k = l = 0$, $j = n+1$ の場合で、$c_1^{n+1} \mathrm{sech}^{2(n+1)} b\xi$ に比例する。こうして、(11)の左辺は $c_1^{n+1} \mathrm{sech}^2 b\xi$, $c_1^{n+1} \mathrm{sech}^4 b\xi, \cdots, c_1^{n+1} \mathrm{sech}^{2(n+1)} b\xi$ および $c_1 c_n \mathrm{sech}^2 b\xi$ の線形結合で表わされる。このとき、解 η_n を

$$\eta_n = \gamma_2 \mathrm{sech}^2 b\xi + \gamma_4 \mathrm{sech}^4 b\xi + \cdots + \gamma_{2n} \mathrm{sech}^{2n} b\xi$$

と書き、(11)の左辺に代入すると、$\mathrm{sech}^2 b\xi$ から $\mathrm{sech}^{2(n+1)} b\xi$ に比例する項が現われるから、$n+1$ 個の係数、$\gamma_2, \gamma_4, \cdots \gamma_{2n}$, c_n, を決定できる。

$n = 2$ のとき、解(10)が成立する。したがって、任意の次

数の摂動解は $\mathrm{sech}^{2p} b\xi$, $(p=1,2,\cdots n)$ の線形結合で表現できる。

§2、具体的な解

3次の解

$$\eta_3 = \frac{c_1^3}{10}\,\mathrm{sech}^2 b\xi\cdot(101\,\mathrm{sech}^4 b\xi - \mathrm{sech}^2 b\xi + 30)$$

$$c_3 = \frac{55}{14}\,c_1^3$$

4次の解

$$\eta_4 = \frac{c_1^4}{2625}\,\mathrm{sech}^2 b\xi\cdot(364707\,\mathrm{sech}^6 b\xi$$

$$+8624\,\mathrm{sech}^4 b\xi + 69146\,\mathrm{sech}^2 b\xi - 71692)$$

$$c_4 = \frac{11813}{1400}\,c_1^4$$

5次の解

$$\eta_5 = \frac{c_1^5}{36750}\,\mathrm{sech}^2 b\xi\cdot(19977255\,\mathrm{sech}^8 b\xi$$

$$-2660037\,\mathrm{sech}^6 b\xi + 6685465\,\mathrm{sech}^4 b\xi$$

$$+1216213\,\mathrm{sech}^2 b\xi - 10211414)$$

$$c_5 = \frac{57159}{3080}\,c_1^5$$

§3、まとめ

ここで述べた方法を逓減摂動法の高次近似と比べると次のようになる。

(1)、演算子(7)は線形化されたK-dV演算子に相当する。

(2)、波の速度cのε展開において、$c_2, c_3, \cdots$ が繰り込み定数に当たる。

この方法で二層流体における孤立波の高次近似解も求められる。結果は非常に複雑になるので、別の機会に発表したい。