

円柱の振動によって励起される非線形音波と音響流

北大・工 古山真之 (Shinji Furuyama)

北大・工 井上良紀 (Yoshinori Inoue)

§1. はじめに

無限に長い剛体円柱がその軸と垂直な方向に正弦的に振動しているとき、理想気体中に放射される弱非線形音波を解析する。円柱表面から測って、放射された音波の波長程度の領域は近傍場と呼ばれ、その外側の領域は遠方場と呼ばれる [1]。近傍場では、非線形効果による音波の波形の歪は極めて小さい。また、流速の第二近似解を求めると時間に依存しない定常流の成分が現れ、これは音響流 (acoustic streaming) と呼ばれる。ここでは、気体の粘性は無視されているので、これは通常の音響流、あるいは流体力学で取り扱われている secondary flow ([2] 参照。) とは異なり、流体の圧縮性に起因して生ずるものであることを強調しておこう。遠方場では音波の伝播に伴い非線形効果が累積して波形が大きく歪み、やがて衝撃波が形成される。形成後、衝撃波は伝播とともに成長し、最大の強さに達した後、急速に減衰し波群は鋸歯状波 (sawtooth wave) へ漸近するが、本研究ではこの部分の解析までは踏み込まない。振動する剛体球の放射する弱非線形音波は既に解析されており ([3], [4])、解析の手順はそれらに従う。

無限に長い円柱の表面が変形して正弦的に波打つときに非線形音波を放射する問題は Ginsberg [5] によって解析された。本研究で取り扱う問題は、最低次のオーダーでは Ginsberg の問題の中に含まれる (§3. (i))。ただし、Ginsberg は遠方場の解を求めるのにくり込み (renormalization) の方法と呼ばれる特異摂動法を用いており、遠方場の  $\theta$  方向の流速成分に関しては正しい結果を得ていない (§4. (iv))。

§2. 定式化

仮定として、まず円柱の周囲は理想気体で無限遠方まで満たされているとする。円柱も理想気体もはじめは完全な静止一様状態にあり、そこから円柱が軸と垂直な方向に振幅  $a$ 、角振動数  $\omega$  で正弦的な振動を始めて十分時間がたった後の定常振動の状態を考察の対象とする。また、理想気体の粘性と熱伝導性は無視できるとし、音響 Mach 数  $M = a\omega/c_0$  は 1 に比べて十分小さいとする (弱非線形問題)。流れ場は軸対称、かつ、非回転的であるから、この問題を速度ポテンシャル  $\Phi^*(r^*, \theta, t^*)$  を導入して解析する。ここで、 $r^*$  は原点からの距離、 $\theta$  は振動の方向から測った角度、 $t^*$  は時間を表し、\* 付きはそれが次元をもった量であることを示す。

円柱の半径を  $R$ 、また静止流体中の音速、密度、および圧力をそれぞれ  $c_0$ 、 $\rho_0$ 、 $p_0$  とする。このとき各量の無次元化を次のように行う：

$$r = r^*/R, \quad t = c_0 t^*/R, \quad \Phi = \Phi^*/(c_0 R), \quad 1 + \rho = \rho^*/\rho_0, \quad 1 + p = p^*/p_0. \quad (1)$$

比熱比を  $\gamma$  で表すと  $c_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$  と表せる。また、無次元化された円柱の振動の振幅を  $\epsilon$  ( $\equiv a/R$ ) とすると、 $M = \epsilon\Omega$  ( $\Omega \equiv R\omega/c_0$  は無次元化された角振動数) が成り立つ。なお、座標系は Fig.1 のようにとる。ここで  $s(t)$  は時刻  $t$  における円柱の軸の原点  $O$  からのずれを表し、その最大値は  $\epsilon$  である。

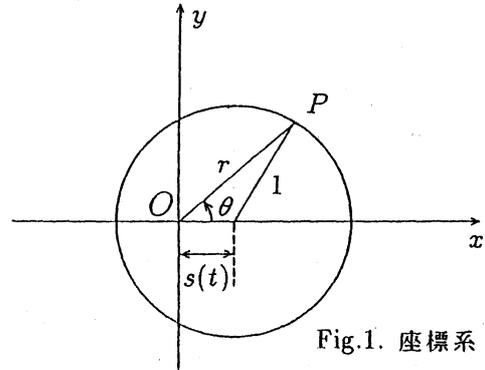


Fig.1. 座標系

オイラーの式と連続の式、および断熱方程式から速度ポテンシャル  $\Phi(r, \theta, t)$

$$\mathbf{u}(r, \theta, t) = \nabla\Phi, \quad (\mathbf{u} \text{ は流速ベクトル}), \quad (2)$$

を用いて、次の基礎方程式を得る [6]:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\nabla\Phi)^2 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 \right] + (\text{cubic terms in } \Phi), \quad (3)$$

$$\text{ここで、} \quad \Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \nabla \equiv \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (4)$$

ただし、 $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$  は  $r$ 、 $\theta$  方向の単位ベクトルを表している。また、圧力は速度ポテンシャルを用いて次のように表せる：

$$1 + p = (1 + \rho)^\gamma = \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{2} \left\{ (\nabla\Phi)^2 + 2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 \right\} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (5)$$

一方、円柱表面における境界条件は流体粒子が円柱内部に浸み込むことがなくかつ円柱表面から離れ去らないということから、

$$(r \cos \theta - s) \frac{ds}{dt} = (r - s \cos \theta) \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{s \sin \theta}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta}, \quad (6)$$

$$(r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta = 1, \quad s = \epsilon \cos \Omega t) \quad (7)$$

となる。また、無限遠方から入射する音波は考えないとして、解に放射条件を課す。

近傍場においては、 $\Phi$  を  $\epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$  と仮定する。したがって、 $M \ll 1$  より  $\Omega = O(1)$ 。) で正則摂動展開し、(3) を各  $\epsilon$  のオーダーごとに解く (§3.)。遠方場においては、近傍場

で求めた解は破綻するので、よく知られている遠方場の非線形方程式 [7] を歪座標  $\eta$  を用いる方法で厳密に解く (§4.)。

### §3. 近傍場の解析

次のように  $\Phi$  を  $\epsilon$  で展開する：

$$\Phi = \epsilon\Phi_1 + \epsilon^2\Phi_2 + \dots, \quad (\epsilon \ll 1). \quad (8)$$

このとき、各物理量は同様に

$$\mathbf{u} = \epsilon\mathbf{u}_1 + \epsilon^2\mathbf{u}_2 + \dots, \quad \rho = \epsilon\rho_1 + \epsilon^2\rho_2 + \dots \quad (9)$$

と展開される。

#### (i) 一次の解と二次の解の永年項

(8) によって基礎方程式 (3) を展開すると  $O(\epsilon)$  については線形の波動方程式になる：

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_1 = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Phi_1 = 0. \quad (10)$$

また、境界条件 (6), (7) を  $r=1$  の周りで展開すると、 $O(\epsilon)$  について、

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} = -\Omega \sin \Omega t \cos \theta \quad \text{at } r=1 \quad (11)$$

を得る。方程式 (10) と境界条件 (11) は Ginsberg [5] の扱った問題の  $n=1$  の場合と同一である。(10) を (11) と放射条件のもとで解くと一次の解が以下のように定まる [8]:

$$\Phi_1 = -A \cos \theta [J_1(\Omega r) \sin(\Omega t + \alpha) - Y_1(\Omega r) \cos(\Omega t + \alpha)], \quad (12)$$

$$\text{ここで、} \quad A = 1/\sqrt{J_1'^2(\Omega) + Y_1'^2(\Omega)}, \quad \alpha = \arctan[Y_1'(\Omega)/J_1'(\Omega)]. \quad (13)$$

$J_1(\Omega r)$ ,  $Y_1(\Omega r)$  は一次の第一種、第二種ベッセル関数を表し、ダッシュは引数での微分である。 $\Phi_1$  を微分して一次の流速  $\mathbf{u}_1$  の各成分をつくると、次のようになる：

$$u_{r1} = -\Omega A \cos \theta [J_1'(\Omega r) \sin(\Omega t + \alpha) - Y_1'(\Omega r) \cos(\Omega t + \alpha)], \quad (14)$$

$$ru_{\theta 1} = A \sin \theta [J_1(\Omega r) \sin(\Omega t + \alpha) - Y_1(\Omega r) \cos(\Omega t + \alpha)]. \quad (15)$$

また、一次の密度擾乱  $\rho_1$  は (5), (9) および (12) から次のようになる :

$$\rho_1 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \Omega A \cos \theta [J_1(\Omega r) \cos(\Omega t + \alpha) + Y_1(\Omega r) \sin(\Omega t + \alpha)]. \quad (16)$$

(16) は (ii) で音響流を解析するのに用いられる。

二次の解  $\Phi_2$  を支配する方程式は (10) を得たときと同様にしてもたらされ、それに一次の解  $\Phi_1$  を代入すると以下のようなになる :

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\nabla \Phi_1)^2 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right)^2 \right] \\ &= \Omega^3 A^2 \cos^2 \theta \left[ \sin 2(\Omega t + \alpha) \left\{ J_1'^2(\Omega r) - Y_1'^2(\Omega r) - \frac{\gamma-1}{2} (J_1^2(\Omega r) - Y_1^2(\Omega r)) \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos 2(\Omega t + \alpha) \left\{ J_1'(\Omega r) Y_1'(\Omega r) - \frac{\gamma-1}{2} J_1(\Omega r) Y_1(\Omega r) \right\} \right] \\ &\quad + \frac{\Omega A^2}{r^2} \sin^2 \theta \left[ \sin 2(\Omega t + \alpha) \{ J_1^2(\Omega r) - Y_1^2(\Omega r) \} - 2 \cos 2(\Omega t + \alpha) J_1(\Omega r) Y_1(\Omega r) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

境界条件も (11) のときと同様にしてもたらされ、 $\Phi_1$  を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} &= \frac{\Omega}{4} \sin 2\Omega t (1 - \cos 2\theta) - \cos \Omega t \cos \theta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - \cos \Omega t \sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ &= -\frac{\Omega A^2}{2\pi} - \frac{\Omega^2 - 2}{2\pi\Omega} A^2 \cos 2\theta - \cos 2\Omega t \left[ \frac{\Omega A^2}{2\pi} + \frac{\Omega^2 - 2}{2\pi\Omega} A^2 \cos 2\theta \right] \\ &\quad + \sin 2\Omega t \left[ \frac{\Omega^2}{4} (1 - \cos 2\theta) + \frac{\Omega^2 A^2}{4} (1 + \cos 2\theta) \{ J_1'(\Omega) J_1''(\Omega) + Y_1'(\Omega) Y_1''(\Omega) \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{A^2}{4} (1 - \cos 2\theta) \{ J_1(\Omega) J_1'(\Omega) + Y_1(\Omega) Y_1'(\Omega) \} \right] \quad \text{at } r = 1 \end{aligned} \quad (18)$$

となる。

(17), (18) を解けば  $\Phi_2$  が決定されるが、それは容易ではないので、ここでは、後で必要とされる  $r \rightarrow \infty$  において  $\Phi_2$  がどのような永年項を持つかのみを調べる。 $r \rightarrow \infty$  であるとして、(17) の右辺を近似すると以下の式になる :

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi_2 = \Omega^2 A^2 \frac{\gamma+1}{\pi r} \cos^2 \theta \cos 2(\Omega t - \Omega r + \alpha), \quad r \rightarrow \infty \text{ に対して.} \quad (19)$$

(19) を解くと、

$$\Phi_2 = \Omega A^2 \frac{\gamma+1}{2\pi} \cos^2 \theta \left(1 - \frac{1}{\sqrt{r}}\right) \cos 2\left(\Omega t - \Omega r + \alpha + \frac{\pi}{4}\right), \quad r \rightarrow \infty \text{ に対して.} \quad (20)$$

(20) は  $r = 1$  でその値が 0 になるように同次解を重ねてある。近傍場の速度ポテンシャルの漸近形は二次の永年項までを考えると、

$$\begin{aligned} \Phi = & -\epsilon A \cos \theta \sqrt{\frac{2}{\pi \Omega r}} \cos \left( \Omega t - \Omega r + \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \\ & + \epsilon^2 \Omega A^2 \frac{\gamma + 1}{2\pi} \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \cos 2 \left( \Omega t - \Omega r + \alpha + \frac{\pi}{4} \right), \quad r \rightarrow \infty \text{ に対して, (21)} \end{aligned}$$

となる。(21) は、§4. (iii) で遠方場の解を決定するのに用いられる。

## (ii) 音響流 (acoustic streaming)

本研究では近傍場の二次のオーダーの質量流れの時間平均として音響流を解析する。一般に、非圧縮性流体中で振動する剛体円柱が粘性 (と非線形性) によってその周囲に定常な質量流れを励起することは知られているが [2]、ここでは粘性を考慮していないのでこの場合の音響流はこれとは全く異なる発生機構による。本研究では、粘性のかわりに理想気体の圧縮性が考慮されている。粘性も圧縮性も考慮しないならば音響流のような定常な質量流れは生じない [9]。

(17), (18) において二次の解  $\Phi_2$  のうちで時間に依存しない定常な成分  $\bar{\Phi}_2$  を支配する部分はそれぞれ以下のようになる：

$$\Delta \bar{\Phi}_2 = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \bar{\Phi}_2 = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial r} = -\frac{\Omega A^2}{2\pi} - \frac{\Omega^2 - 2}{2\pi \Omega} A^2 \cos 2\theta \quad \text{at } r = 1. \quad (23)$$

支配方程式そのものは、非圧縮性流体に対するラプラス方程式であるが、しかし境界条件 (23) の右辺の項は線形音波を記述する一次の解  $\Phi_1$  を用いた結果として現われ、ここに理想気体の圧縮性が反映されている。これらを解くと  $\bar{\Phi}_2$  は次のようになる：

$$\bar{\Phi}_2 = -\frac{\Omega A^2}{2\pi} \log r + \frac{\Omega^2 - 2}{4\pi \Omega} \left( \frac{A}{r} \right)^2 \cos 2\theta. \quad (24)$$

$\bar{\Phi}_2$  を微分して流速の二次の定常成分  $\bar{\mathbf{u}}_2$  を求めて、(i) で求めた一次の流速 (14), (15) と密度擾乱 (16) とから

$$\overline{\rho \mathbf{u}} = \epsilon^2 (\bar{\mathbf{u}}_2 + \overline{\rho_1 \mathbf{u}_1}) + O(\epsilon^3) \quad (25)$$

によって音響流を求めると次式が得られる：

$$\overline{\rho u_r} = \frac{\epsilon^2 A^2}{2\pi r} \left( \Omega - \frac{\Omega^2 - 2}{\Omega r^2} \right) \cos 2\theta, \quad (26)$$

$$\overline{\rho u_\theta} = -\frac{\epsilon^2 A^2 \Omega^2 - 2}{2\pi \Omega r^3} \sin 2\theta. \quad (27)$$

近傍場の一次の流速  $u_1$  はベッセル関数で表現されていたので  $r \rightarrow \infty$  において  $1/\sqrt{r}$  で減少してゆくのであるが、(26), (27) は音響流がそれよりも速く  $1/r$  で減少することを示している。ここで、

$$\overline{\rho u_r} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \overline{\rho u_\theta} \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (28)$$

のように音響流の流れ関数を定義すると

$$\psi = \frac{\epsilon^2 A^2}{4\pi} \left( \Omega - \frac{\Omega^2 - 2}{\Omega r^2} \right) \sin 2\theta \quad (29)$$

が得られ、 $\psi = \text{constant}$  として  $(r, \theta)$  を求めれば、音響流の流線を描くことができる。

$M = 0.05$ ,  $\gamma = 1.4$  のとき、各  $\Omega$  の値に対する音響流の流線を Fig.2(a)-(c) に示す。なお、これらの図においては  $\psi$  は  $0.8 \times 10^{-4}$  刻みでとられている。(29) から容易にわかるようにこの場合の流線は  $\Omega = \sqrt{2}$  を境に Fig.2(a)→(b) のようにそのパターンをかえる。 $\Omega = \sqrt{2}$  のときは  $\psi$  は  $\theta$  のみの関数となる (Fig.2(c))。また、これらの流線は  $\theta = \pi/4$  の方向で  $\overline{\rho u_r} = 0$  となる。

以上の現象を球の振動の問題 [4] と比較すると、流線のパターンは  $\Omega = \sqrt{3}$  で変化し、また  $\overline{\rho u_r} = 0$  は  $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$  の方向で起こる。

脈動する球の問題 [6] では二次のオーダーに音響流が現れないことが既に知られている。

#### §4. 遠方場における伝播の解析

Blackstock [7] に従うと、基礎方程式 (3) は  $r\Omega \gg 1$  において以下のように近似できる:

$$\frac{\partial W}{\partial z} - W \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0, \quad (30)$$

$$\text{ここに、} \quad W = \frac{\sqrt{r}}{\epsilon \Omega} u_r, \quad \varphi = \Omega(t - r) + \alpha + \pi/4, \quad z = (\gamma + 1)\epsilon \Omega^2 (\sqrt{r} - 1). \quad (31)$$

方程式 (30) の厳密解は implicit な形で以下のように書ける:

$$W = W(\varphi + zW). \quad (32)$$

#### (iii) 遠方場の解

(14) で示された近傍場における一次の流速の  $r$  成分  $\epsilon u_{r1}$  は  $r \rightarrow \infty$  において次の形に漸近する:

$$u_r = -\epsilon \Omega A \cos \theta \sqrt{\frac{2}{\pi \Omega r}} \sin \varphi, \quad \varphi = \Omega(t - r) + \alpha + \pi/4. \quad (33)$$

(32) を (33) に接続させると以下のように  $W$  が決定する :

$$W = -A\sqrt{\frac{2}{\pi\Omega}} \cos\theta \sin\hat{\varphi}. \quad (34)$$

ここで、 $\hat{\varphi} = \varphi + zW$  である。いま、次のような歪座標  $\eta$  を導入する :

$$\hat{\varphi} = \Omega(t - \eta) + \alpha + \pi/4. \quad (35)$$

ただし、 $\hat{\varphi} = \varphi + zW$  より、 $r$  と  $\eta$  との関係は次のようになる :

$$r = \eta - (\gamma + 1)\epsilon A\sqrt{\frac{2\Omega}{\pi}}(\sqrt{r} - 1) \cos\theta \sin\hat{\varphi}. \quad (36)$$

つまり、線形問題の解 (33) の  $\varphi$  のなかの動径座標  $r$  を歪座標  $\eta$  でおき換えることによって、遠方場の解  $u_r$  がもとまる :

$$u_r = \frac{\epsilon\Omega}{\sqrt{r}} W = -\epsilon\Omega A\sqrt{\frac{2}{\pi\Omega r}} \cos\theta \sin\hat{\varphi}. \quad (37)$$

流速の  $\theta$  成分を求めるには、以下のように (37) から遠方場の速度ポテンシャルをつくって、それを微分して求める :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int u_r dr = \int \frac{\epsilon\Omega}{\sqrt{r}} W \frac{\partial r}{\partial \eta} d\eta \\ &= -\epsilon A\sqrt{\frac{2}{\pi\Omega r}} \cos\theta \cos\hat{\varphi} + \epsilon^2 \frac{\gamma+1}{2\pi} \Omega A^2 \cos^2\theta \left(1 - \frac{1}{\sqrt{r}}\right) (2 - \cos 2\hat{\varphi}) + O\left(\epsilon^3, \frac{\epsilon^2}{\sqrt{r}}, \frac{\epsilon}{r}\right). \end{aligned} \quad (38)$$

このとき、不定積分において生じる積分定数は (21) に接続させることで決定している。(38) を  $\theta$  で微分して

$$\begin{aligned} ru_\theta &= \frac{\partial\Phi(\eta, \theta, t)}{\partial\theta} + \frac{\partial\Phi(\eta, \theta, t)}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \\ &= \epsilon A\sqrt{\frac{2}{\pi\Omega r}} \sin\theta \cos\hat{\varphi} - \epsilon^2 \frac{\gamma+1}{2\pi} \Omega A^2 \sin 2\theta \left(1 - \frac{1}{\sqrt{r}}\right) \end{aligned} \quad (39)$$

を得る。Ginsberg [5] の解析では、(39) の右辺第二項を落としている。(39) の右辺において、第一項は  $O(\epsilon/\sqrt{r})$ 、第二項は  $O(\epsilon^2)$  であり、遠方場では  $r \sim 1/\epsilon^2$  であるから第一項と第二項とは同じオーダーである。また、第二項は  $\hat{\varphi}$  の三角関数を含まないため、これは一見、音響流を表すように思えるが、第一項を  $\cos n\varphi$  のフーリエ級数に展開すればこの第二項を打ち消す項が現れる [3]。

## (iv) 衝撃波形成距離 (shock formation distance)

遠方場において音波が十分な距離を伝わると、ある距離で波形の中に勾配が無限大となる点が現れ、その位置で衝撃波が形成される。この始めて勾配無限大が生じる距離を衝撃波形成距離  $\tilde{r}_s$  としてこれを求める。ただし、衝撃波形成距離  $\tilde{r}_s$  は円柱の表面から測られるものとする。

(37) で与えられている  $u_r$  からこれを  $r$  で微分して、それが発散する条件は  $\partial r / \partial \eta = 0$  となる。つまり

$$1 + (\gamma + 1)\epsilon\Omega A \sqrt{\frac{2\Omega}{\pi}} (\sqrt{r} - 1) \cos\theta \cos\hat{\varphi} = 0 \quad (40)$$

を満足する  $r$  のうちの最小のものが  $1 + \tilde{r}_s$  となるので、 $\cos\hat{\varphi} = -1$  より衝撃波形成距離  $\tilde{r}_s$  は以下のように求められる：

$$\tilde{r}_s = \left[ \frac{\sqrt{J_1'^2(\Omega) + Y_1'^2(\Omega)}}{(\gamma + 1)\epsilon\Omega \cos\theta} \sqrt{\frac{\pi}{2\Omega} + 1} \right]^2 - 1. \quad (41)$$

((39) で与えられている  $ru_\theta$  の  $r$  微分が発散する条件も、また、(40) で記述できる。)

$M = 0.05$ ,  $\gamma = 1.4$  のとき、(41) で記述された衝撃波形成距離  $\tilde{r}_s$  をさまざまな  $\Omega$  の値について図示したものが Fig.3 である。この近似の範囲内では  $\theta = \pi/2$  の方向には衝撃波は形成されないことがわかる。また、 $\Omega$  の値が大きいほど衝撃波の形成位置は円柱表面に接近してゆく。

$\Omega \gg 1$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) であるとして (41) のベッセル関数を漸近形に直したものが以下に示す式である：

$$\begin{aligned} \tilde{r}_s &= \left[ \frac{1}{(\gamma + 1)\epsilon\Omega^2 \cos\theta} + 1 \right]^2 - 1 = \left[ \frac{1}{(\gamma + 1)M\Omega \cos\theta} + 1 \right]^2 - 1 \\ &\simeq \frac{2}{(\gamma + 1)M\Omega \cos\theta}, \quad \Omega \gg 1 \text{ に対して}. \end{aligned} \quad (42)$$

$M = \epsilon\Omega = \text{constant}$  の条件のもとで  $\Omega$  を増大すると、 $\Omega \rightarrow \infty$  では  $\tilde{r}_s$  は  $1/\Omega$  で 0 に漸近する。

$\gamma = 1.4$  のとき、 $\theta = 0$  の方向について  $\Omega$  を増大させたときの  $\tilde{r}_s$  の変化を各  $M$  の値に対して図示したものが Fig.4 である。

以下で、近傍場および遠方場で一様に有効な解を求めよう。歪み座標  $\eta$  は  $r \rightarrow 1$  では  $r \simeq \eta$  であるから、一様に有効な解を構成するためには近傍場の解 (14), (15) の  $r$  を  $\eta$  で書換え、さらに流速の  $\theta$  成分には (15) では表われない (39) の右辺第二項を加えてやる：

$$u_r = -\epsilon\Omega A \cos\theta [J_1'(\Omega\eta) \sin(\Omega t + \alpha) - Y_1'(\Omega\eta) \cos(\Omega t + \alpha)], \quad (43)$$

$$ru_{\theta} = \epsilon A \sin \theta [J_1(\Omega\eta) \sin(\Omega t + \alpha) - Y_1(\Omega\eta) \cos(\Omega t + \alpha)] - \epsilon^2 \frac{\gamma + 1}{2\pi} \Omega A^2 \sin 2\theta \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\eta}}\right). \quad (44)$$

この  $\theta$  成分に付加した項は  $r \rightarrow 1$  では高次の微小量になっている。

$M = 0.05$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\Omega = 4$ ,  $t = 16.89$  において  $\theta = \pi/4$  の方向に放射される非線形音波について (43), (44) を Fig.5(a), (b) に示す。図の  $r_s = 15.52$  において、波形の勾配が無限大になっている。 $r_s$  より先では解は多価になり、波形は鋸歯状波へ漸近してゆくが、これは本研究ではまだ考察されていない。 $ru_{\theta}$  のグラフは  $u_r$  よりかなり小さい。

## §5. まとめ

本研究で解析された結果をまとめると次のようになる：

- (1) 近傍場の解は無次元振幅  $\epsilon$  の正則摂動展開によってもとめられ、二次のオーダーには音響流 (acoustic streaming) が現われる。この音響流は無次元振動数  $\Omega = \sqrt{2}$  を境にして二種類の流線のパターンを持つ (Fig.2(a)-(c))。
- (2) 遠方場の解  $u_r$  は近傍場の一次の解に接続して決定され、また遠方場の流速の  $\theta$  成分  $u_{\theta}$  が近傍場の二次の解を考慮して正しく求められた (§4. (iv))。
- (3) 衝撃波形成距離  $\tilde{r}_s$  は音響 Mach 数  $M$  を固定して  $\Omega$  を増加させると  $1/\Omega$  に比例して 0 に漸近する (Fig.4)。
- (4) 振動する円柱の放射する非線形音波を近傍場および遠方場において一様に有効に記述できる解が求められた (Fig.5(a), (b))。

## 参考文献

- [1] 日本流体力学会：流体における波動 (朝倉書店, 1989) 194-200.
- [2] N. Riley : J. Inst. Maths. Applics., **3** (1967) 419-434.
- [3] Y. Inoue and T. Okigami : J. Sound Vib., **118** (1987) 199-207.
- [4] T. Yano and Y. Inoue : J. Sound Vib., **135** (1989) 385-397.
- [5] J. H. Ginsberg : J. Acoust. Soc. Am., **64** (1978) 1671-1678.
- [6] Y. Inoue, S. Ishii and T. Okigami : J. Sound Vib., **106** (1986) 257-265.
- [7] D. T. Blackstock : J. Acoust. Soc. Am., **36** (1964) 217-219.
- [8] S. Temkin : Elements of Acoustics. ( John Wiley & Sons, New York, 1981) 319.
- [9] L. D. Landau and E. M. Lifshitz : Fluid Mechanics-2nd ed. (Pergamon Press, Oxford, 1987) 21-22.

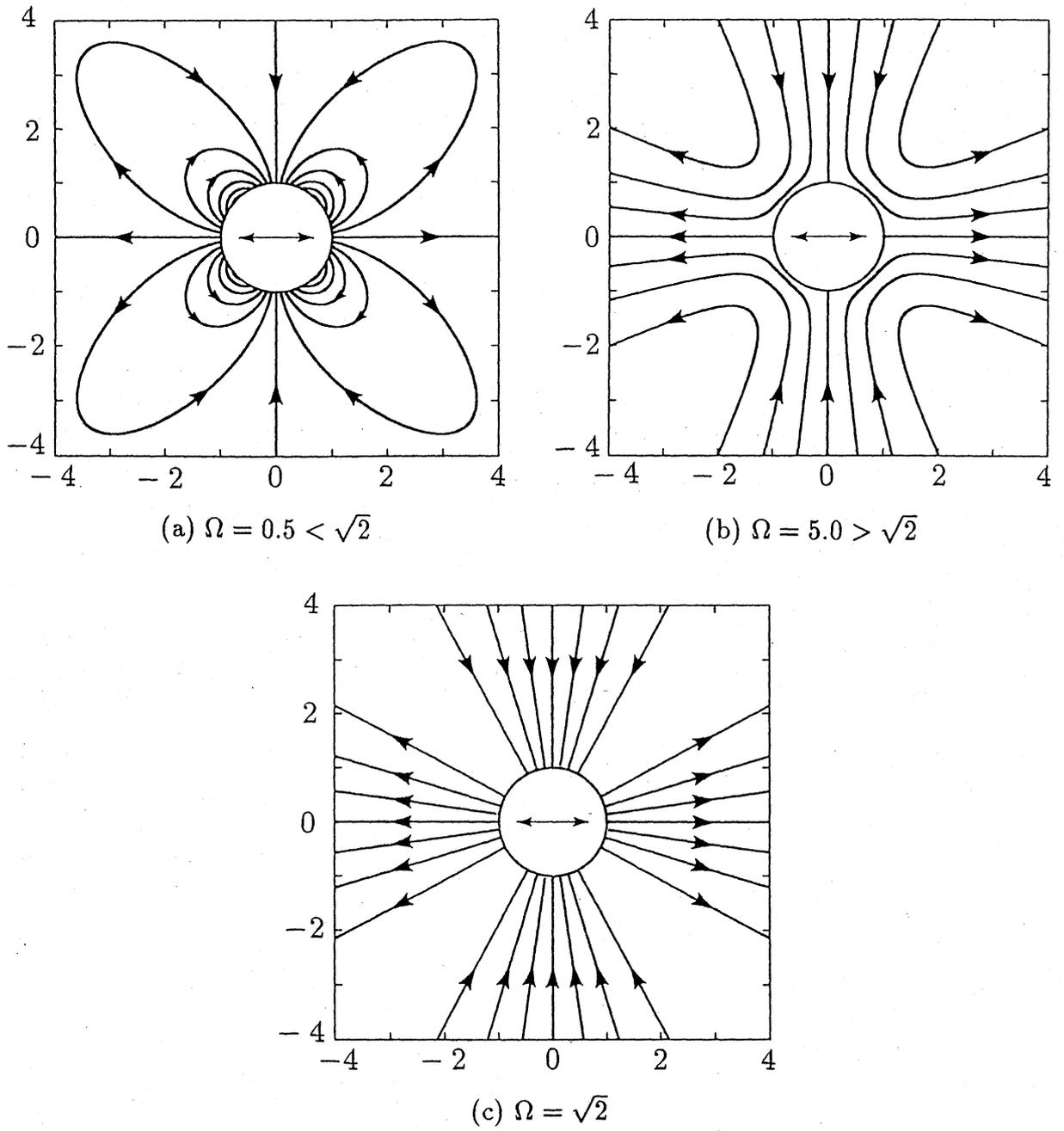


Fig.2.  $M = 0.05$ ,  $\gamma = 1.4$  における音響流 (acoustic streaming)

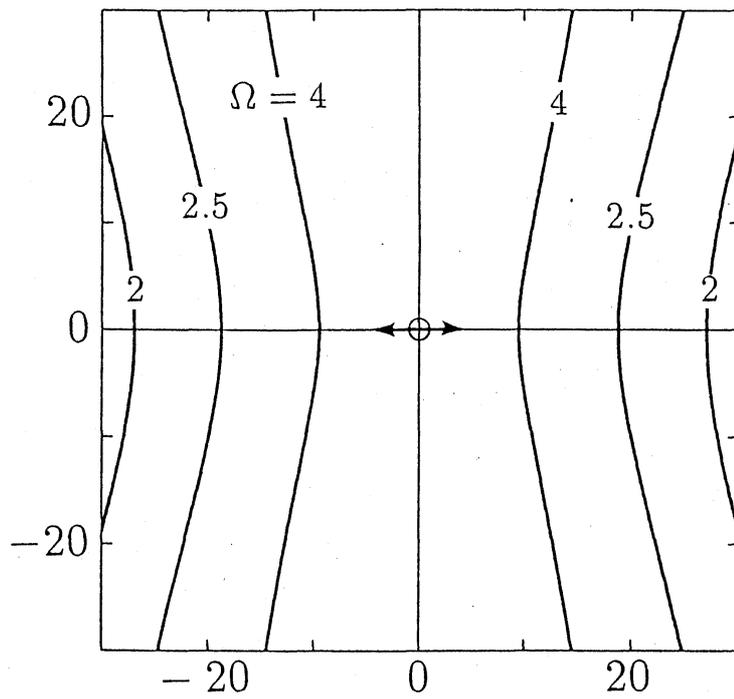


Fig.3.  $M = 0.05$ ,  $\gamma = 1.4$  における衝撃波形成距離  $\tilde{r}_s$ .

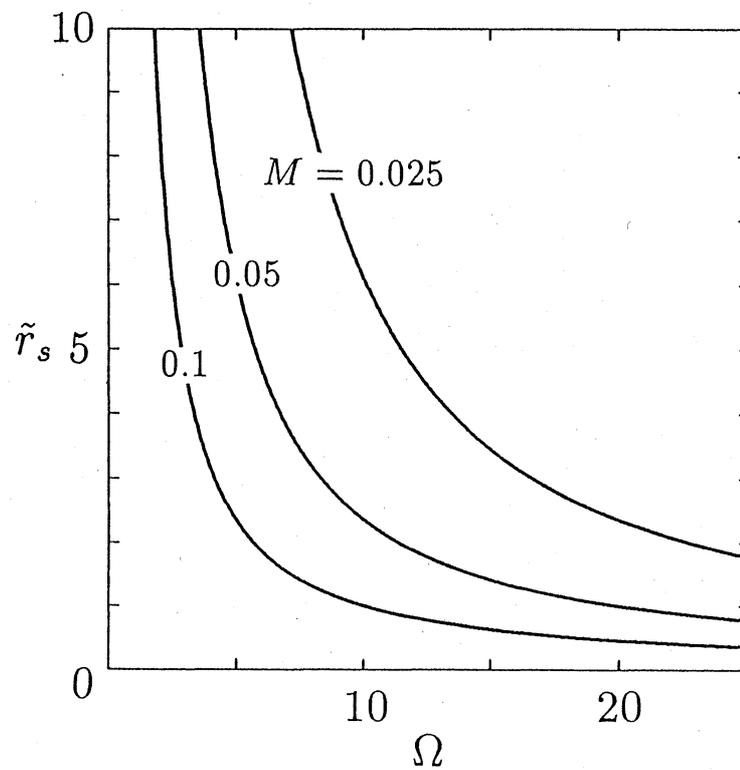


Fig.4.  $\theta = 0$  のときの  $\tilde{r}_s$  の  $\Omega$  への依存性

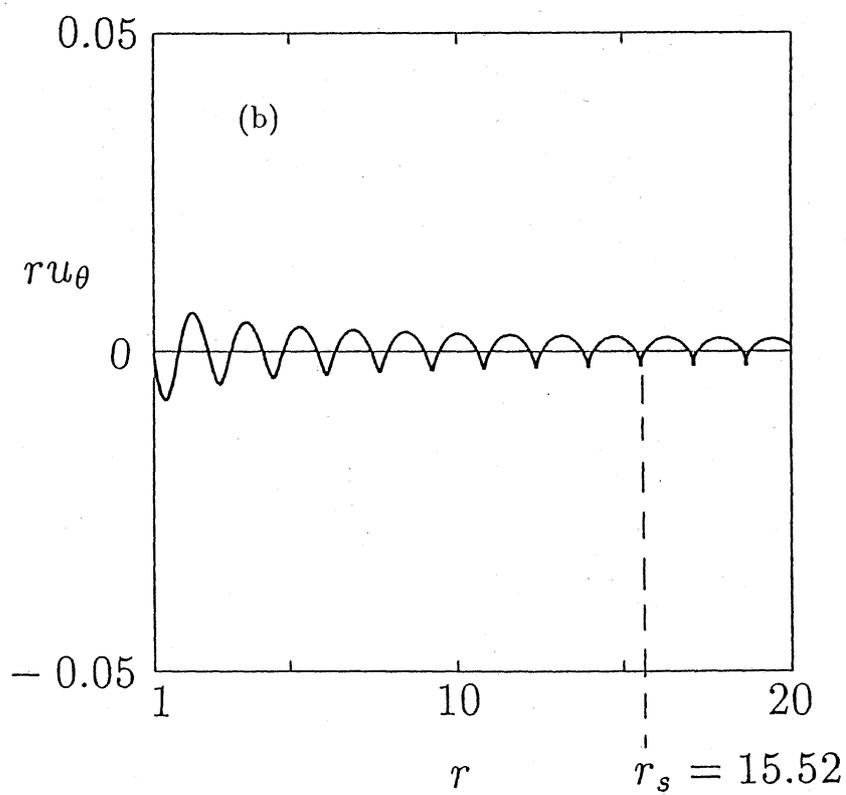
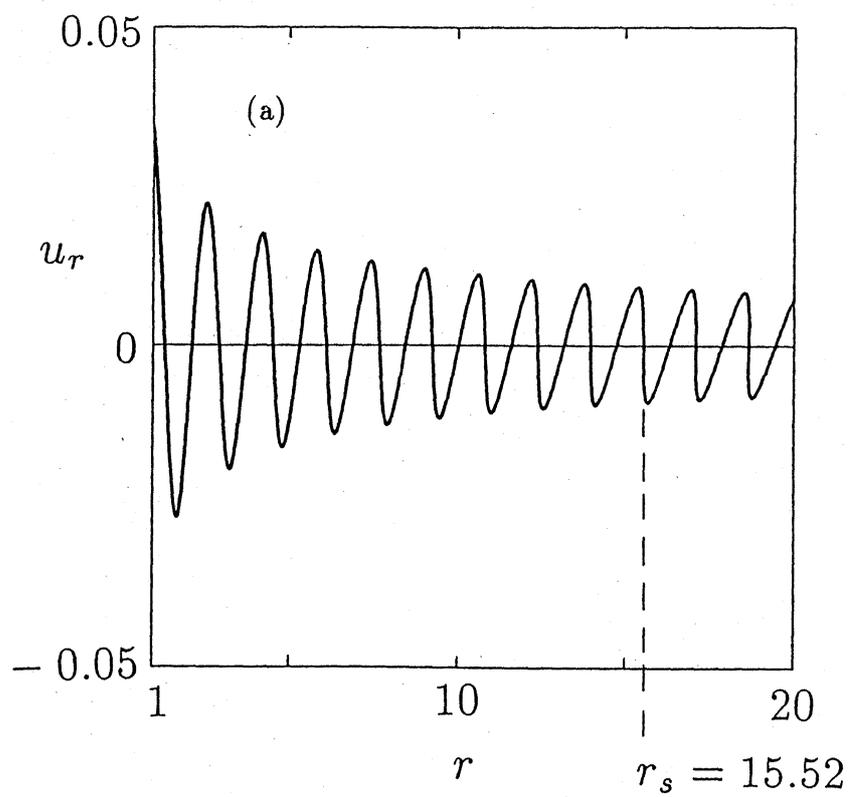


Fig.5.  $M = 0.05$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $t = 16.82$  における一様に有効な解