数理解析研究所講究録
第784巻 1992年 74-81

Non-normal space の次元論に本質的な意味はあるのか？

津田光一　(愛媛大学教養部)
Kôichi TSUDA

問題点

志賀浩二氏の書いた本 [11] (ちなみにこの本は位相空間論をめざす者は必ず読むべき名著である) の中に次の一節がある (pp.51 - 52) :

《Topologie》のどの章をみても，位相空間論の公理から，全く抽象的に，人工的に作り上げられていく位相空間の例など一つも挙げられていない． このような例をたくさん作ってみせることなど，クラトフスキにとっては易々たるものであったろう． しかし彼は，抽象数学のもつ抽象性を，そのような方向へ向けてみようとはしなかった． 彼の感覚では，有限次元または無限次元のユークリッド空間の中にある点集合は，汲みつくせぬような複雑さをもった数学的実在であり，それに較べれば，単に抽象性だけを意識してつくられた位相空間など，脆い，頼りない存在にみえたに違いない．

当方のこの文章では，よく言われる Generalization の為の Generalization ということについて考えてみたい． その為にうえにあげた志賀氏の文章はある一つの見識と尺度を与えていると思うのである (勿論，抽象的な空間に対する問題は言葉通りに受け取ると危険な所もあるのでそれも併せて議論したい)．

勿論，この (アンダーラインの) ような指摘は位相空間論だけではなく広く数学一般に渡って言われることであるが，位相空間論に対する理解の低さ (日本だけではなく外国でも) もあって，とかく，やり玉に上がることが多いようである．

今回好運にもモスクワ大学 (正確には Moscow State University の由) の B. A. Pasynkov (ボリス，アレクセイ，パシンコフ) 教授との共同研究をする機会[10]に恵まれ，表題にある Non-normal space の次元論をすることになったわけであるが，その中で上に上げた指摘に対するよい反論 (あるいは反例？) のようなものが獲られたので紹介したいと思う．

位相空間論の扱う空間が抽象的である為に，良い結果と，そうでないつまらない generalization の区別が付きにくく，一派ひとからげに論じられてしまうことが多いことに対する反論の意味も込めて．

我々の認識

上にあげた志賀氏の文章から我々が受け取るメッセイジとして
1　単なる generalization（例えば，外人の書いた論文にある定理の仮定の一部分を取り除く，あるいはより一般的な仮定に置き換えるといった種類の）ではなく，しっかりした応用を（あるいは具体的な例を）意識した問題意識が大切で，出来れば広い視点に立ったことによる，古典的な設定においても新しい結果が得られるような仕事をめざそう

ということがまずあげられるが，先の文章をそのまま読むと，カチンとくることもあるのであって（勿論この文章のその他の部分との関係や全体の分脈からすれば，非難するのはオカド違いであることは明白であるが，初学者が，それもこの部分だけを読んだ場合に，ともすると陥りやすい誤解を取り除いておきたいのである），

2　上の文章が言う抽象的な空間という物については注意すべきであって，クラトフスキの時代には，一つの見通しのよい視点が可分距離空間であったわけであるが，これより抽象的な空間がすべてつまらないと言っているわけではないと思うのである．

例えば，次元論でいうと志賀氏の本でも再三ででくる無限という物の扱いがキーポイントとなるような議論はたくさんあるが，その場合「可分性」というものが邪魔になることもあるのであって，いろいろな無限集合の中のどれがエッセンシャルなキーポイントであるのかを知る為には，可分性を仮定しない一般の距離空間で話をした方が，見通しが良いということが現実に起こっている．

それに加えて，この場合には１で述べた古典的な設定に相当する可分距離空間においても（Corollary として他人のした仕事が出て来るのではなく）新しい定理が発見されている事実がある（長田潤一［３］及びその書評［12］参照のこと）．
長田氏の仕事のすばらしさは直接論文に当たって見てもらうのが一番よいのであるが，その仕事（距離化定理等のたくさんある良い仕事を含めて）によってプリンストンの高等研究所に招かれ，その一年間の滞在中に書かれた本二冊の内の一冊が［３］であるという事実も参考になるかと思う［４］．

ここでは，もっとも抽象的なただの位相空間という設定の中での Pasynkov の invariant Id の持つ有効性を積空間の次元という立場から説明したい．

積空間の正規性と次元の積定理

位相空間論の中でも，積空間の正規性については長い歴史があり，未だに活発な研究対象となっている（例えば大田［５］参照）．
例えば，無理数だけからなる実数の部分空間 X を考えよう（勿論これは零次元可分距離空間である）．　この空間にマイケルの直線と呼ばれる空間 Y（これは距離空間にはならないが，非常に簡単なパラコンパクト空間である）をかけて積空間X x Y を作ると，もう正規空間にならなくなってしまうことが知られている．

後の議論で出て来る完全正規空間（perfectly normal space)で考えると有名な Sorgenfrey 直線という完全正規空間 X があって，自分自身との積 X^2 は正規にならないことが知られている（[1, p. 45 & Example 2.3.12]）.

次元関数の方に話を移すと，ルベーグによる被覆次元（ dim X と書き表す）とポアンカレに由来する帰納的次元（small inductive dimension ind X と large inductive dimension Ind X の二種類あるが，ここでは large の方を考える）の２つが重要な関数として研究されている.

この２つの次元関数の積空間に対しての振舞いをここでは問題にしたい．　一般に次元関数 d(X) に対して不等式

$$(*)\ d(X \times Y) \leqq d(X) + d(Y)$$

の成立を主張する定理を次元関数 d に関する次元の積定理と呼ぶ.
先の講演 [14] の中でも触れたが，この不等式は一般に dim についても Ind についても成立しない．　以下帰納的次元 Ind に絞って話を続けることにする.

Ind が(*)を満たさない理由の一つに次の有限加法性（FST(Ind) と略記する）が関係する：
　任意の２つの閉集合 F_1, F_2 に対して $\mathrm{Ind}\,(F_1 \cup F_2) = \max\{\mathrm{Ind}\,F_i\}$ が成立する.

一般にこの性質は，全体空間がコンパクトであっても成立しない（Lokucievskii, [2, Example 2.2.13]）．　このような基本的な性質が期待できない場合，その解決法は次の２通りである.
1　FST(Ind) が一般に成立するような空間（Čech による完全正規空間がその始まりと言ってよいだろう）を研究する.
2　これが成立しないような空間は例外と思ってしまって，それが成立することを仮定して，その下で色々な性質（たとえば不等式(*)）を研究する.
くどいようだが，１と２では全然扱いが変わって来るのであって，１の方面ではどんなに一般な空間を考えても（今の所）少なくとも hereditarily normality（つまり，任意の部分集合が正規空間になるということ）を仮定しなくてはならない（ [2] 参照のこと）.

従って，１の立場に立つと積空間の正規性よりももっと強い仮定（hereditarily normality と言った）を仮定しなくてはならなくなって，(*)の成立がきわめて狭い空間にしか言えなくなってしまうのである.

それに対して２の方は，例えば一次元のコンパクト空間（この場合 FST(Ind) が成立することが知られているが hered. normal でない物も沢山含まれている）だけで考えようという態度である．勿論 FST(Ind) を満たす空間は，これ以外にも山ほどある.
次の Pasynkov の定理はまさに２の方向での結果である．この定理のすばらしさはそれまで知られていたいろいろな定理が全てその系となってしまうことからも知ることができる（Engelking [2, p. 203] 参照）：
定理　０［８］. Let $X \times Y$ be normal, piecewise rectangular, each of whose factors satisfies FST(Ind), then we have the inequality (*) for d = Ind.

ここで，この定理と被覆次元についての次の定理を較べてみたい：

定理　1 [8]．Let X x Y be piecewise rectangular, then we have the inequality (*) for d = dim.

この定理は定理０に較べてはるかにすっきりしていて，出来れば定理０もこの形にできることが望ましいのは誰でも感じることだろう．　それを正に実現しているのが [14] でも，ちょっと触れておいたが，次の Pasynkov の invariant ld X である．

定義．　ld X = -1 if and only if X = $\emptyset$.　ld X $\leqq$ n for n = 0, 1, 2, … if there exist k + 1 closed collections (that is, consists of closed subsets) σ_i, $-1 \leqq i \leqq k \leqq n$, in X such that
a)　$\sigma_{-1} = \{\emptyset\}$, $X \in \sigma_k$, $\sigma_i \subset \sigma_{i+1}$, $-1 \leqq i \leqq k-1$;
b) σ_i breaks σ_{i+1} (that is, for every F $\in \sigma_{i+1}$ and for any two closed subsets A and B of F, which are functionally separated in X, there exists an element C $\in \sigma_i$ contained in F, which is a separation between A and B in F);
c) For any members A and B of σ_i their union A $\cup$ B is also a member of σ_i.
d) Any closed subset of a member of σ_i is also its member.
ちょっと見た所，複雑そうな定義であるが，FST(Ind) を満たす正規空間Xで考えると各σ_iとしてはXの高々 i dimensional な閉集合全体を取ることが出来る．　つまり，この自然な集合族の持つエッセンシャルな性質を抽出してきたものが上の定義なのである．　一方，上の定義のσ_iと高々 i dimensional な閉集合全体の違いは，積空間に不等号(*)を示す次の Pasynkov の定理において，はっきり分かる．　また，ld X の有効性も併せて知ることができる（Ind とのより具体的な関係については次の章を参照のこと）：

定理　２ [8]．Let X x Y be piecewise rectangular, then we have the inequality (*) for d = ld.

つまり，この論文の初めに提起した問題に戻れば，任意の位相空間という見通しの良い所で，積空間が正規という古典的な設定の下でも新しい定理２を証明することが，この不変量 ld を使うことによって可能になったという訳である（下線部分の具体例は次の章を参照のこと）．Ind について知られている結果を，似たような次元関数をこしらえて，その関数について同様な結果を示しているといった generalization ではないのである．更に言えば，すでにその大切さが認識されている（いわばブランド商品のような物ともいえる）Ind の本質的な良い性質は，実は定理０の設定では見えてこないのであって，その本質的な性質は ld の方から継承されて来ていると定理２は主張しているのである．

ある問題を解決した時，それが考えている設定よりも弱い仮定の下で解決できることが多いが，それを出来るだけ一般な形で論文にする場合，抽象的で読みにくく，読者の方では，オリジナルの設定に戻して，読んだ方がはるかに理解がしやすいということが往々にして起きる（数学者以外の人達から general non-sense と言われることには，この種の論文のスタイルも関係しているのではないかと思う）．

ここに例として出してきている Pasynkov の仕事はその種のものとは，別のものであることにも注意していただきたい． また上の定義の（b）にある functionally separated といった一般の設定が（正規空間の場合は交わらない二つの閉集合というだけで済むわけであるが）実はこの場合大切でそれは Uniformlly locally finite （ULF と略記する）という性質をより鮮明に浮き出させる働きをしているのである．

最後に，先に書いたこと [14] についての訂正をしておきたい． つまり，[14] の時点ではまだ上に述べたことまで当方の認識が深まっていなかったこともあり Id の定義が上の定義のままで，証明が出来るのかという疑問を出しておいたことについての訂正である（[14] 今回の事情（2）参照）．

Pasynkov はこの疑問に対して次のように話していた：「（コンパクトとは限らない）一般の空間に対して定理２を示すのに Id X の定義の(c)を ULF union に変えても，そのままにしても同値である． その場合，より簡単な方を定義にして，ULF の方は定理とする方が自然だろう」．

しかし ULF が表に出てこないから [8] だけを見た読者にはさっぱり証明がわからないではないかという当方の主張に対して「この論文 [8] の目的は証明を付けることにあるのではなくて，私は，これこれのことが発見できたという報告が目的なのであるから，その批判は当たらない」

つまり，今回もすでに少なくとも [8] の時点で定理１と同様に定理２について完全な証明を彼は用意していたのである．

不変量 Id と我々の結果

ここで，Paysnkov の不変量 Id X の感じを掴む為に例を１つ上げてみたい． Ｚを Lokucievskii の反例 [2, Example 2.2.13] とする． つまり
１次元の２つの閉部分集合Ｘ，Ｙが存在して $Z=X\cup Y$，$X\cap Y=I$（閉区間）であるが，Ind Z = 1 となることが知られている compact T_2 空間 Z のことである．
従って，この空間は FST(Ind) を満たさないから，定理０を適用することは出来ない． しかし，この空間Ｚについては Id Z を次のように計算することが出来る：
σ_0 = all at most 0-dimensional closed subsets of Z,
σ_1 = all at most 1-dimensional closed subsets F satifying dim $(F\cap I)\leqq 0$,
$\sigma_{-1}=\emptyset$, and σ_2 = all closed subsets of Z.

と定義すれば Id の定義を満たす事が証明でき Id Z $\leqq$ 2 となり，Ｉを含んでいることから，Id Z $\geqq$ 2 を得るから，結局 Id Z = 2 となる．この空間に対して，どんな空間Ｓを取ってきても，その積空間 $Z\times S$ は rectangular となる（なぜならＺはコンパクトだから）．
従って，定理２によれば，どんな空間Ｓに対しても，Id $(Z\times S)\leqq$ Id Z + Id S が成立する． この結果は，今までの次元関数 Ind にこだわった定理（例えば定理０）からは出てこない．

こんなに強力な不変量ではあるが，それにもやはり弱点はあるのであって，一般に Id X の決定は，上の例Ｚのように簡単でない． 例えば，一般に Ind X ≦ Id X が成立するが，Ind X < ∞（つまり有限次元）であっても Id X < ∞ かどうか分かっていない． もっと具体的に言うと，次の問題が未解決のようである：

問題 If X is paracompact with Ind X < ∞, then is it true that Id X < ∞?

これが肯定的であると次の（これも証明が未だに出ていない） Pasynkov の定理の別証明が得られることになる．

定理３ [6], 1969. Let X and Y be paracompact. If Ind Y ≦ m, Ind X ≦ n and X is locally compact, then Ind (X x Y) ≦ k for some integer $k = k_{m,n}$.

今回我々の得た定理２の拡張定理は次のとおりである．

定理４[10,Theorem 1]. Let X' x Y be rectangular satisfying the condition (#):
(#) every set H is functionally separated from S whenever H is closed in X x Y, and is disjoint from the set S = {x} x Y, where X = X'∪{x}. Then, the inequality (*) for d = Id holds.

この結果は定理２を含んでいることは明かであるが，[15] で当方が与えた拡張定理との違いに言及しておきたい． [15]ではまだ Id についての認識が深まっていなかったせいもあって積空間も正規性を仮定し次元関数も Ind で書いてあるが本質的な違いは Ind X' = Ind X を仮定している所である． この制限は強くて，例えば
各 n ≧0 に対して locally compact X(n) with Ind X(n) = n but ind X(n) = 0
となる空間の存在が知られているから，この空間 X' = X(n) の一点コンパクト化 X を考えると Ind X = 0, but Ind X' = n となって，この場合 [15] による積空間の次元の評価は，高々 n + Ind Y となってしまい，上の定理による評価 Ind Y に遠く及ばない．

今回の我々の結果は，最終的なものとは思っていない． rectangular product のワクを越えた第一歩であると思っている訳で，その意味で次の予想が次の目標の１つである．

予想 [10, Conjecture]. 定理４は piecewise rectangular でも成立する．

モスクワに来い！

先に書いた文章 [14] の訂正を続けたい． ６月に新潟で開かれた第３回日ソシンポジウムで直接インタビューした所，出身地はグルジアではなく，シベリアとモスクワの中間の都市（正確な名前は失念）で生まれた由である．
グルジアとの関係は，弟子にグルジアの人が数人いて（Chigogidge もその一人），なにかの折りにグルジアに招かれて，そこでワインをたくさん貰った由で，当方がいただいた分もそのうちの一本だったようである．

今回会って一番の印象はその明るさである． 最近届いた手紙には，Chair of General Topology and Geometry と書いてある所を見ても，また新潟での様子から察すると，昨年の筑波の時よりもモスクワでの待遇面その他で非常な進歩があった模様で，自由化が Pasynkov に関していうと，すごいプラスに作用しているようである．

新潟から筑波，東京と一緒に旅をしていろいろ話をしてみると，人間的にも信頼の出来るすばらしい人であることが分かった． 胃を悪くしている由でアルコールは一切だめでミルクを飲んでいたが，それ以外は元気一杯で，はりきっていた．

「身体の割に彼らはあまり食べない」と言った人がいたが，それは考え違いで，丁度，戦争で物がないとき，日本人の大部分がなんでも一生懸命嚙むように（次にいつ食べ物が手に入るかわからないわけであるし）躾られていた時と同じような事情なのではないかと思った（これをしなくなった，この頃の日本の子供は歯がすぐ悪くなるという話をどこかで聞いた覚えがある）．

勉強はどこでするのかという当方の問いに対して，モスクワ大学が膨張してしまって，自由に研究するための研究室がない，だから週３回あるゼミの日以外は自宅で勉強している，と言っていた．
「モスクワ大学は，連邦から独立してしまった（？）ので，もうじき給料は貰えなくなるのではないかと思う」と半分冗談だと言いながら話していたが，現在のソビエトの混迷ぶりが思われた．

[14]の中で Pasynkov には出版されていない良い仕事がたくさんあると書いたが，その１つが[6]であって，新潟で会った時，その詳しい証明が知りたいと言ったら「私には出版していない仕事のストックがこんなにある（と両手を50ｾﾝﾁ位広げて）それが知りたかったら，モスクワに来い！」と言われてしまった． その時，なにかのスパイ映画（００７だったか？）で米国人が苦労してモスクワまで，たった一行の数式を教えてもらいに行く話を思い出した．

Pasynkov に自分の仕事のうちで一番気に入っている仕事はなにかと聞いたところ論文[7]という答えが返ってきた． 「しかし，まだ半分しか書いていない． 後半を論文に書いてみたい」と話していた．
よく調べてみると Pasynkov の言っていた，証明が半分載っている論文は [9] の方で，これは論文[7]に関係はしているが，彼の言っていたコンパクト距離空間に関する彼の次の定理の証明は，この論文には半分も載っていないようである．
Every k - dimensional mapping of finite-dimensional compacta can be represented as the composition of k one-dimensional mappings, $k \geqq 1$ [7].

当方が興味を持っている fractal dimension [13] についての意見を求めたのだが，英語でうまく言えなかったのか，なにも意見を貰えなかったが，古典的な次元関数については，次のような興味深いことを言っていた：「dim X で成立する定理が，Ind X についても（殆ど）平行に成立することは不思議である． それも，証明は全然別物で，似ても似つかないものなのに．」

食べ物だけではなく，なかなか物には不自由しているようで，当方との共同研究の際にも，当方が書き散らかしたレポート用紙を捨てずに，その裏を目いっぱいに使って一生懸命に計算する姿には（そういえば，知らないうちにずいぶん紙を無駄使いしているという当方自身に対する自戒をも含めて）打たれるものがあった．

彼以外のロシア人もそうだが，彼らを見ているとシタタカという言葉がぴったりのような気がする．ソビエト情勢は，混迷を深めまさにカオスそのものであるが，この年末にひょっこり Pasynkov からクリスマス・カードが届いた． 今や内戦状態にあるユーゴスラビアからも，つい最近無事に暮らしているという便りが届いている（サグレブの Mardešić 夫妻から）平和で繁栄の絶頂にある日本に生まれた自分の好運を思うと共に，死と隣りあわせの生活を送りながら，仕事を続けているであろう彼らを思う時，雑用に追いまくられて本質的な仕事に程遠い自分に対して，こんなことではいかんと思うことしきりである．

参考文献

[1] R. Engelking, General Topology(Revised and copleted ed.),Helderman 1989.

[2]___________, Dimension Theory, North Holland 1978.

[3] J. Nagata, Modern Dimension Theory, (1964) North Holland ⇒ (revised and extended edition) Heldermann 1983.

[4] 長田潤一，回想ノート，数学教育研究 19(1989)3-7, 大阪教育大学数学教室.

[5] 大田春外, Products of stationary sets, 数理解析研講究録 732 位相空間論とその周辺分野の研究 研究集会報告集 (1990),39-43.

[6] B. A. Pasynkov, On inductive dimensions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 189(1969) 254-257 = Soviet Math. Dokl. 10(1969)1402-1406.

[7] _____________, On the dimension and geometry of mappings, Dokl. Akad. Nauk SSSR 221(1975)543-546 = Soviet Math. Dokl. 16(1975)384-388.

[8] _____________, On the monotonicity of dimension, Dokl. Akad. Nauk SSSR 267 (1982)548-552 = Soviet Math. Dokl. 26(1982)654-658.

[9] _____________, A theorem on ω - maps for maps, Uspekhi Mat. Nauk SSSR 39 (1984)107-130 = Russian Math. Surveys 39(1984)125-153.

[10] B. A. Pasynkov and K. Tsuda, Product theorems in dimension theory, reprint 1991.

[11]志賀浩二，無限からの光芒ーポーランド学派の数学者たちー日本評論社，1988

[12]津田光一，書評（J. Nagata, Modern Dimension Theory)，数学 38(1986)188-189.

[13] 〃 ，位相不変量となる非整数値次元関数はあるか？，数理解析研講究録 711 コホモロジー次元とソフト写像の研究 研究集会報告集(1989),58-67.

[14] 〃 ，帰納的次元に関するパシンコフの積定理をめぐって，数理解析研講究録 758 (1991), 7-14.

[15] 〃 ，A product theorem in the large inductive dimension theory, Unpublished manuscript.