数理解析研究所講究録
第 784 巻 1992 年 99-101



# 或る、よく知られた空間の rigidity について

防衛大学校 寺澤 順 (Jun Terasawa)

位相空間はそれ自身の上への autohomeomorphisms として、identity しかないとき、rigid と言われる。

通例 rigid な空間として知られているものは構成が非常に複雑、難解で、しかも、かなり特殊である。いま少し平易な構成で、そうした空間を構成することができないか、というのがかねてから提起されていた問題である。本講演の中で私はそうした声に答えようとした。

1920 年代の俗に言うポーランド数学の黄金時代の始まりの頃、Kuratowski と Knaster は共同で一つの簡単な空間を構成し、これが connected であるが、一点を取り除くことによって hereditarily disconnected になってしまうことを示した。従ってこの空間には non-degenerate path は一本も無いことになる。今日ではこの空間は発見者の名前を取って Kuratowski-Knaster Fan と呼ばれている。私の講演はこの空間を modify することによって、比較的平易な構成で rigid な空間が得られることを指摘しようとしたものである。

合わせて私は、話を少し先へ進め他の種類の rigidity にもこの構成を応用できるのではないかと述べた。

すなわち、それ自身への写像の族 $\mathcal{F}$ を勝手に定めるとき、$\mathcal{F}$ に属する写像として identity しかないとき、この空間を $\mathcal{F}$ に関して rigid とよぶことにする。この場合当然 $\mathcal{F}$ としてはできるだけ広い範囲のものを取ることが望ましいわけである。たとえば、1-1 onto 写像の全体とか連続写像の全体とかが考えられよう。明らかに、$\mathcal{F}$ として autohomeomorphisms の全体を取るとき、$\mathcal{F}$ に関する rigidity が冒頭に述べた rigidity と同じである。

そこで、私は、Kuratowski-Knaster Fan を modify すると、perfect maps に関して rigid な空間を構成することができることにも、言及したわけである。

## § 1 Kuratowski-Knaster Fan $\Omega_1$

$C$ を Cantor set とし、$I$ を単位区間 $[0, 1]$ とするとき、その積 $C\times I$ において上辺 $C\times\{1\}$ を一点に縮めて得られる距離空間を $\Omega$ と表すことにしよう。この縮められた点を $\theta$ と表すことにする。各点 $x\in C$ に対して、$P(x)\subseteq\{x\}\times I$ を $\Omega$ の部分集合とし、$P^*(x)\cup\{\theta\}=P(x)$ と表すことにする。

よく知られているように、Cantor set $C$ は無理数空間 $\mathbf{P}$ と有理数空間 $\mathbf{Q}$ のコピーを含み、しかもそれらの和として表される。通常の３進集合の表現において前者は取り除く区間の端として表れない点、後者は表れる点である。以下では通常の意味で $I=\mathbf{P}\cup\mathbf{Q}$ とも考えることにする。

Kuratowski-Knaster Fan $\Omega_1=\{\theta\}\cup\bigcup_{x\in C}P^*(x)$ とは、$\Omega$ の部分空間で $x\in\mathbf{P}$ に対し $P^*(x)=\{(x,y)\mid y\in\mathbf{P}\}$、$x\in\mathbf{Q}$ に対し $P^*(x)=\{(x,y)\mid y\in\mathbf{Q}\}$ と定めて得られるものである。位相空間論の標準的な教科書を参照すれば、この $\Omega_1$ が connected であり、$\Omega_1\setminus\{\theta\}$ のすべての components は一点からなる、すなわち、$\Omega_1\setminus\{\theta\}$ は hereditarily disconnected であることの証明が述べられている。私の以下の議論に重要なのは、$\Omega_1\setminus\{\theta\}$ の quasi-components がすべて $P^*(x)$ の形をしていることである。

$\Omega_1\setminus\{\theta\}$ は明らかに rigid ではない。

## § 2 rigid な空間 $\Omega_2$ の構成

$\Omega_2$ は $\Omega$ の部分空間で、まず $x\in\mathbf{P}$ に対して $P^*(x)=\{(x,y)\mid y\in\mathbf{P}\}$ とする。そして、有理数の全体 $\mathbf{Q}=\{q_n\mid n=1,2,...\}$ を互いに素な dense sets $Q_1=\{r_n\mid n=1,2,...\}$, $Q_2=\{s_n\mid n=1,2,...\}$ の和に分解し、$P^*(r_n)=\{(r_n,q_1),...,(r_n,q_{n+1})\}$、$P^*(s_n)=\{(s_n,q_n)\}$ と定めることによって得られる。

$\Omega_2$ が connected なことはすぐわかる。

$\Omega_2$ の rigidity を示すために、$h:\Omega_2 \to \Omega_2$ を任意の autohomeomorphism とする。すると、$h(\theta)=\theta$ である。quasi-component の $h$ による像はまた quasi-component であり、$P^*(r_n)$ が $(n+1)$ 個の点からなるので、$h(P^*(r_n))=P^*(r_n)$ が容易に得られる。$Q_1$ が dense なことに注意すると、これから $h(P^*(x))=P^*(x)$ がすべての $x \in C$ に対して成立することがわかる。従って $h(s_n, q_n)=(s_n, q_n)$ がすべての $n$ に対して成立し、これから直ちに $h=1_{\Omega_1}$ が出るのである。

## § 3 perfect maps に関して rigid な空間 $\Omega_3$ の構成

$\Omega_3$ は積 $C \times I$ の上下辺 $C \times \{1\}$, $C \times \{0\}$ をそれぞれ一点に縮めて〔それを $\theta_1$, $\theta_2$ と表す〕得られる空間で、 $P^*(x)$ をそれぞれ次のように定めて得られる。

まず点 $x \in \mathbf{P}$ に対しては、$P^*(x)=\{(x,y) \mid y \in \mathbf{P}\}$ とする。

$x \in \mathbf{Q}$ に対して $P^*(x)$ を定めるために、$\mathbf{Q}$ を互いに素な dense sets $Q_1$, $Q_2$ の和に分解し、更に $Q_1$ を互いに素な dense sets $Q_{1ij}$, $i>j\geq 1$, の和に、また $Q_2$ も互いに素な dense sets $Q_{2n}$, $n=1,2,...,$ の和に、それぞれ分解しておく。但し、$Q_1$ の分解については、その中の点を整列して $r_2$, $r_3$, ... とし、$r_n \in Q_{1ij}$ なら必ず $n \geq i > j$ となるようにしておくものとする。そして $\mathbf{Q}$ 内の、$\mathbf{P}$ の点に収束する、勝手な点列 $\{a_n \mid n=1,2,...\}$ を一つ固定し、$\mathbf{Q}$ を整列して、$\mathbf{Q}=\{s_n \mid n=1,2,...\}=\{a_n \mid n=1,2,...\} \cup \{q_n \mid n=1,2,...\}$ と表しておくものとする。このとき、$r_n \in Q_{1ij}$ なら、$P^*(r_n)=\{a_1,...,a_{j-1},a_j,...,a_{n+2}\}$ とし、$q \in Q_{2n}$ なら、$P^*(q)=\{q_n\}$ とする。

このように定めると空間 $\Omega_3$ は connected になり、証明は少し大変だが、perfect maps に関して rigid となる。

この事柄の詳しい証明は、そう遠くない将来にどこかに発表できるだろう。