数理解析研究所講究録
第 792 巻 1992 年 134-143

Rankin - Selberg convolution (I)

渡部 隆夫 (東北大 教養)

Rankin - Selberg convolution の典型的な例として, H. Jacquet と J. Shalika による $GL_n \times GL_n$ の保型 L 関数の積分表示に関する論文 [Jacquet - Shalika] の要約を述べる. Rankin - Selberg convolution についての概括的な解説については [Bump] を参照して下さい.

Notation

F を代数体とし, $\mathbf{A}$ をそのアデール環とする. F の素点全体の集合を $\mathfrak{P}$ とし, その中の無限素点のなす部分集合を $\mathfrak{P}_\infty$, 有限素点のなす部分集合を $\mathfrak{P}_f$ とかく. 各 $v \in \mathfrak{P}$ に対し, F_v を F の v による完備化とする. $v \in \mathfrak{P}_f$ のとき, $\mathcal{O}_v$ を F_v の付値環, ϖ_v を素元, q_v を剰余類体の元の数とする. 次のように記号を定める.

$$G = GL_n(F)$$
$$Z = \text{the center of } G$$
$$T = \text{the group of diagonal matrices}$$
$$U = \text{the group of upper triangular matrices with ones in the diagonal}$$
$$B = \text{the group of upper triangular matrices} = TU$$
$$P = \{\begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL_{n-1}(F), \ \ x \in F^{n-1}\}$$
$$Q = ZP \ \ \text{(a maximal parabolic subgroup of } G)$$

上で与えられた G の部分群の 1 つを H とするとき

$$H_v = \text{the group of } F_v \text{ rational points of } H \quad (v \in \mathfrak{P})$$
$$H_f = \prod_{v \in \mathfrak{P}_f} H_v \ \ (\text{制限直積}) \qquad H_\infty = \prod_{v \in \mathfrak{P}_\infty} H_v$$
$$H_{\mathbf{A}} = H_\infty H_f$$

とおく. また

$$K_v = \text{the standard maximal comapct subgroup of } G_v \quad (v \in \mathfrak{P})$$
$$K_{\mathbf{A}} = \prod_{v \in \mathfrak{P}} K_v$$
$$\mathcal{H}_v = \text{the local Hecke algebra of } G \quad (v \in \mathfrak{P})$$
$$\mathcal{H}_{\mathbf{A}} = \bigotimes_{v \in \mathfrak{P}} \mathcal{H}_v \quad (\text{制限テンソル積}) = \text{the global Hecke algebra of } G$$

とする.

1. $G_{\mathbf{A}}$ の cuspidal 表現

$Z\backslash Z_{\mathbf{A}}$ の character ω: $Z\backslash Z_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ を1つ固定する. $G_{\mathbf{A}}$ 上の関数 f: $G_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ で次の4つの条件 (i) ~ (iv) をみたすものからなる空間を $L_0^2(G\backslash G_{\mathbf{A}}, \omega)$ とかく.

(i) $f(\gamma g) = f(g) \quad (\gamma \in G,\ g \in G_{\mathbf{A}})$
(ii) $f(zg) = \omega(z) f(g) \quad (z \in Z_{\mathbf{A}},\ g \in G_{\mathbf{A}})$
(iii) $\int_{Z_{\mathbf{A}} G \backslash G_{\mathbf{A}}} |f(g)|^2 dg < \infty$
(iv) 任意の parabolic subgroup $R \subsetneqq G$ に対して, その unipotent radical を N とするとき

$$\int_{N\backslash N_{\mathbf{A}}} f(ng)dn = 0 \quad (\text{for almost everywhere } g \in G_{\mathbf{A}})$$

$G_{\mathbf{A}}$ は右移動により $L_0^2(G\backslash G_{\mathbf{A}}, \omega)$ の上に作用する. この表現は既約分解でき

$$L_0^2(G\backslash G_{\mathbf{A}}, \omega) = \oplus \pi$$

とかける. ここで各既約表現 π は重複度1をもつ (multiplicity one theorem [Shalika]). この直和に現われる $G_{\mathbf{A}}$ の既約ユニタリ表現を (central character ω をもつ) cuspidal 表現とよぶ. さらに π に含まれる関数 f: $G_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ で次の2つの条件 (v), (vi) をみたすものからなる集合を π^∞ とかくことにする.

(v) $f(g) = f(g_\infty \cdot g_f)$ は $g_\infty \in G_\infty$ について C^∞ かつ $g_f \in G_f$ について locally constant である.

(vi) f は right $K_{\mathbf{A}}$-finite, i.e. $K_{\mathbf{A}}$ の元による f の右移動で得られた関数のはるベクトル空間は有限次元である.

空間 π^∞ は既約 admissible $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$-module になる.

さて cuspidal 表現 π を固定したとき, π^∞ は $\mathcal{H}_v$ $(v \in \mathfrak{P})$ の既約 admissible 表現 π_v $(v \in \mathfrak{P})$ の制限テンソル積に分解される [Flath]:

$$\pi^\infty = \bigotimes_{v \in \mathfrak{P}} \pi_v \quad (\text{制限テンソル積}) \tag{1.1}$$

ここで, ほとんどすべての v について π_v は class 1 表現 (i.e. π_v は K_v-不変ベクトルをもつ) である. すなわち $\mathfrak{P}$ の有限部分集合 S_π $(\mathfrak{P}_\infty \subset S_\pi)$ で

$$v \notin S_\pi \Longrightarrow \pi_v \text{ は class 1 表現}$$

となるものが取れる. 任意の class 1 表現は不分岐主系列表現の商表現として得られるから, 各 π_v $(v \notin S_\pi)$ に対して, 不分岐指標 $\mu_{i,v}: F_v^* \to \mathbf{C}^*$ $(1 \le i \le n)$ を適当にとれば, π_v は誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{B_v}^{G_v} \mu = \{\phi: G_v \to \mathbf{C} \mid \phi(tng) = \delta^{1/2}(t)\mu(t)\phi(g), \quad t \in T_v,\ u \in U_v,\ g \in G_v\}$$

ただし

$$\mu(t)=\mu_{1,v}(t_1)\cdots\mu_{n,v}(t_n),\quad \delta(t)=\prod_{j=1}^{n}|t_j|_v^{n-2j+1}\qquad (t=\begin{pmatrix} t_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & t_n\end{pmatrix})$$

の既約商表現と同型になる. そこで

$$A(\pi_v)=\begin{pmatrix} \mu_{1,v}(\varpi_v) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{n,v}(\varpi_v)\end{pmatrix}\in GL_n(\mathbf{C})$$

と対角行列を定義すれば, これは共役を除いて π_v により一意的に定まる.

次に π の Whittaker model について述べる. Non-trivial character

$$\psi=\prod_{v\in\mathfrak{P}}\psi_v\colon F\backslash\mathbf{A}\to\mathbf{C}^1,\qquad \psi_v|_{\mathcal{O}_v}=1 \text{ for any } v\in\mathfrak{P}_f$$

をとり, これにより $U_{\mathbf{A}}$ の character を

$$\theta\colon U_{\mathbf{A}}\to\mathbf{C}^1,\quad \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & * & * & *\\ 0 & 1 & u_{2,3} & * & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{n,n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\mapsto\psi(u_{1,2}+u_{2,3}+\cdots+u_{n,n-1})$$

で定義する. このとき $\varphi\in\pi^\infty$ に対して

$$W_\varphi(g)=\int_{U\backslash U_{\mathbf{A}}}\overline{\theta(u)}\varphi(ug)du$$

とおく. 更に

$$W(\pi;\psi)=\{W_\varphi\mid\varphi\in\pi^\infty\}$$

とおき, これを π の global Whittaker model とよぶ. 対応 $\varphi\mapsto W_\varphi$ は $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$ の作用と可換であり, π^∞ と $W(\pi;\psi)$ は admissible $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$-module として同型である. また逆対応は次で与えられる [Shalika] :

$$\varphi(g)=\sum_{\gamma\in U\backslash P}W_\varphi(\gamma g)\qquad(\varphi\in\pi^\infty)\tag{1.2}$$

分解 (1.1) に対応して $W(\pi;\psi)$ は π_v の local Whittaker model $W(\pi_v;\psi_v)$ の制限テンソル積に分解される:

$$W(\pi;\psi)=\bigotimes_{v\in\mathfrak{P}}W(\pi_v;\psi_v)\qquad(\text{制限テンソル積})$$

これにより, 各 $W \in W(\pi;\psi)$ は

$$W(g) = \prod_{v \in \mathfrak{P}} W_v \qquad (W_v \in W(\pi_v;\psi_v)) \tag{1.3}$$

とかける. いま

$$K_\pi = \prod_{v \in S_\pi} K_v$$

$$W(\pi;\psi)^{K_\pi} = \{W \in W(\pi:\psi) \mid W(gk) = W(g), \quad g \in G_{\mathbf{A}}, \ \ k \in K_\pi\}$$

とおけば, $W \in W(\pi;\psi)^{K_\pi}$ に対して, (1.3) の積に現われる W_v $(v \notin S_\pi)$ は class 1 Whittaker function である. ここで Shintani の explicit formula を記述しておく. $v \notin S_\pi$ を固定し, 次のように記号を定める.

$$p_\ell = \begin{pmatrix} \varpi_v^{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varpi_v^{\ell_n} \end{pmatrix} \qquad (\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n) \in \mathbf{Z}^n)$$

$\rho_\ell = GL_n(\mathbf{C})$ の有限次元表現 : dominant weight $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \mapsto a_1^{\ell_1} a_2^{\ell_2} \cdots a_n^{\ell_n}$

ただし ρ_ℓ は $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_n$ のときに定義される. このとき $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n) \in \mathbf{Z}$ に対し

$$W_v(p_\ell) = \begin{cases} \delta^{1/2}(p_\ell)\mathrm{tr}\,(\rho_\ell(A(\pi_v))) & (\ell_1 \geq \cdots \geq \ell_n) \\ 0 & (\text{otherwize}) \end{cases} \tag{1.4}$$

である.

2 Zeta integral

以下では次のデータを固定する.

$\pi = \otimes_v \pi_v =$ central character ω をもつ既約 cuspidal 表現, $A_v = A(\pi_v)$ $(v \notin S_\pi)$
$\pi' = \otimes_v \pi'_v =$ central character ω' をもつ既約 cuspidal 表現, $A'_v = A(\pi'_v)$ $(v \notin S_{\pi'})$
$S = S_\pi \cup S_{\pi'}$

さらに

$$\alpha\colon G_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}^*,\ \alpha(g) = |\det g| \qquad \delta_Q : Q_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}^*,\ \delta_Q(zq) = \alpha(q)\ (q \in P_{\mathbf{A}},\ z \in Z_{\mathbf{A}})$$
$$\eta\colon Z_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}^1,\ \eta(z) = \overline{\omega(z)}\omega'(z) \qquad \widetilde{\eta}\colon Q_{\mathbf{A}} \xrightarrow{\text{proj.}} P_{\mathbf{A}}\backslash Q_{\mathbf{A}} \cong Z_{\mathbf{A}} \xrightarrow{\eta} \mathbf{C}^1$$

とおく. G はベクトル空間 F^n に右から作用するものとし, $\epsilon = (0,\cdots,0,1) \in F^n$ とする. このとき ϵ の G での stabilizer は P になる.

さて $\mathbf{A}^n$ 上の Schwarz - Bruhat 関数 Φ で次をみたすものを 1 つとる.

(2.1)
$$\Phi = \prod_{v \in \mathfrak{P}} \Phi_v, \quad v \notin S \Longrightarrow \Phi_v \text{ は } \mathcal{O}_v^n \text{ の特性関数}$$

これに対して

(2.2)
$$f(g, s, \eta) = \int_{Z_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon \cdot zg)\alpha(zg)^s \eta(z) dz \qquad (g \in G_{\mathbf{A}},\ s \in \mathbf{C})$$

とすれば, 積分は $\Re(s) > 1/n$ で絶対収束し $\mathrm{Ind}_{Q_{\mathbf{A}}}^{G_{\mathbf{A}}} \widetilde{\eta}^{-1} \delta_Q^{s-1/2}$ の元をあたえる. これから Eisenstein 級数を

(2.3)
$$E(g, \Phi, s, \eta) = \sum_{\gamma \in Q\backslash G} f(\gamma g, s, \eta)$$

で定義すれば, 右辺の級数は $\Re(s) > 1$ で絶対収束し, さらに一般論から $E(g, \Phi, s, \eta)$ は全 s-平面上有理型関数に解析接続される. いま $\varphi \in \pi^\infty$, $\varphi' \in \pi'^\infty$ に対して

$$I(s, \Phi, \varphi', \varphi) = \int_{Z_{\mathbf{A}} G\backslash G_{\mathbf{A}}} E(g, \Phi, s, \eta)\varphi'(g)\overline{\varphi(g)} dg$$

とおく. 被積分関数 $E(g, \Phi, s, \eta)\varphi'(g)\overline{\varphi(g)}$ は g について急減少になるから, 積分は絶対収束する. 従って $I(s, \Phi, \varphi', \varphi)$ は s について有理型関数をあたえる.

3 Basic identity

$I(s,\Phi,\varphi',\varphi)$ について形式的な変形をおこなう.

$$\begin{aligned}
I(s,\Phi,\varphi',\varphi) &= \int_{Z_{\mathbf{A}}G\backslash G_{\mathbf{A}}} \sum_{\gamma\in Q\backslash G} f(\gamma g,s,\eta)\varphi'(\gamma g)\overline{\varphi(\gamma g)}dg \qquad ((2.3))\\
&= \int_{Z_{\mathbf{A}}Q\backslash G_{\mathbf{A}}} f(g,s,\eta)\varphi'(g)\overline{\varphi(g)}dg\\
&= \int_{Z_{\mathbf{A}}P\backslash G_{\mathbf{A}}} \left\{\int_{Z_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon\cdot ag)\alpha(ag)^s\eta(a)da\right\}\varphi'(g)\overline{\varphi(g)}dg \qquad ((2.2))\\
&= \int_{Z_{\mathbf{A}}P\backslash G_{\mathbf{A}}} \int_{Z_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon\cdot ag)\alpha(ag)^s\varphi'(ag)\overline{\varphi(ag)}dadg\\
&= \int_{P\backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon\cdot g)\alpha(g)^s\varphi'(g)\overline{\varphi(g)}dg\\
&= \int_{P\backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon\cdot g)\alpha(g)^s\varphi'(g)\left\{\sum_{\xi\in U\backslash P}\overline{W_\varphi(\xi g)}\right\}dg \qquad ((1.2))\\
&= \int_{P\backslash G_{\mathbf{A}}} \sum_{\xi\in U\backslash P} \Phi(\epsilon\cdot\xi g)\alpha(\xi g)^s\varphi'(\xi g)\overline{W_\varphi(\xi g)}dg\\
&= \int_{U\backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon\cdot g)\alpha(g)^s\varphi'(g)\overline{W_\varphi(g)}dg\\
&= \int_{U_{\mathbf{A}}\backslash G_{\mathbf{A}}} \int_{U\backslash U_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon\cdot ug)\alpha(ug)^s\varphi'(ug)\overline{W_\varphi(ug)}dudg\\
&= \int_{U_{\mathbf{A}}\backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon\cdot g)\alpha(g)^s\left\{\int_{U\backslash U_{\mathbf{A}}}\overline{\theta(u)}\varphi'(ug)du\right\}\overline{W_\varphi(g)}dg\\
&= \int_{U_{\mathbf{A}}\backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon\cdot g)\alpha(g)^s W_{\varphi'}(g)\overline{W(g)}dg
\end{aligned}$$

ここで積分

$$\Psi(s,\Phi,W_{\varphi'},W_\varphi) = \int_{U_{\mathbf{A}}\backslash G_{\mathbf{A}}} \Phi(\epsilon\cdot g)\alpha(g)^s W_{\varphi'}(g)\overline{W_\varphi(g)}dg$$

は $\Re(s) >> 0$ で絶対収束する. 結果として等式

(3.1) $$I(s,\Phi,\varphi',\varphi) = \Psi(s,\Phi,W_{\varphi'},W_\varphi) \qquad (\Re(s) >> 0)$$

をもつ. (1.3), (2.1) より右辺は Euler 積をもつ:

(3.2) $$\Psi(s,\Phi,W_{\varphi'},W_\varphi) = \prod_{v\in\mathfrak{P}}\Psi(s,\Phi_v,W'_v,W_v)$$

(3.3) $$\Psi(s,\Phi_v,W'_v,W_v) = \int_{U_v\backslash G_v} \Phi_v(\epsilon\cdot g)\alpha_v(g)^s W'_v(g)\overline{W_v(g)}dg$$

各 local integral は $\Re(s) >> 0$ で絶対収束する. より詳しく次が証明される ([Jacquet - Shalika: Proposition (1.5) and (3.17)]).

(3.4) 各 $v \in \mathfrak{P}$ に対して, 積分 (3.3) は $\Re(s) \geq 1$ で絶対収束する.

4 Euler factor の計算 (不分岐有限素点の場合)

$\varphi \in \pi^{\infty}$, $\varphi' \in \pi'^{\infty}$ を

$$W_{\varphi} = \prod_{v \in \mathfrak{P}} W_v \in W(\pi;\psi)^{K_\pi}, \qquad W_{\varphi'} = \prod_{v \in \mathfrak{P}} W'_v \in W(\pi';\psi)^{K_{\pi'}}$$

をみたすようにとる. このとき (2.1) より

$$v \notin S \Longrightarrow W_v,\ W'_v,\ \Phi_v \text{ はすべて } K_v\text{-不変}$$

である. いま $v \in \mathfrak{P}$, $v \notin S$ を1つ固定し, これについて積分 (3.3) を計算する. $\Re(s) >> 0$ とする. Iwasawa 分解 $G_v = N_v T_v K_v$ より

$$\begin{aligned}
&\Psi(s,\Phi_v,W'_v,W_v) \\
&= \int_{T_v/T_v\cap K_v} \Phi_v(\epsilon\cdot t)\alpha_v(t)^s W'_v(t)\overline{W_v(t)}\delta^{-1}(t)dt \\
&= \sum_{\ell=(\ell_1,\cdots,\ell_n)\in \mathbf{Z}^n} \Phi_v(\epsilon\cdot p_\ell)\alpha_v(p_\ell)^s W'_v(p_\ell)\overline{W_v(p_\ell)}\delta^{-1}(p_\ell), \quad p_\ell = \begin{pmatrix} \varpi_v^{\ell_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varpi_v^{\ell_n}\end{pmatrix} \\
&= \sum_{\substack{\ell=(\ell_1,\cdots,\ell_n)\in \mathbf{Z}^n \\ \ell_n \ge 0}} \alpha_v(p_\ell)^s W'_v(p_\ell)\overline{W_v(p_\ell)}\delta^{-1}(p_\ell)
\end{aligned}$$

ここで explicit formula (1.4) を使う.

$$L^+ = \{\ell = (\ell_1,\cdots,\ell_n) \in \mathbf{Z}^n : \ell_1 \ge \ell_2 \ge \cdots \ge \ell_n \ge 0\}$$

とすると

$$\begin{aligned}
&\Psi(s,\Phi_v,W'_v,W_v) \\
&= \sum_{\ell\in L^+} \alpha_v(p_\ell)^s W'_v(p_\ell)\overline{W_v(p_\ell)}\delta^{-1}(p_\ell) \\
&= \sum_{\ell\in L^+} q_v^{-s(\ell_1+\cdots+\ell_n)}\mathrm{tr}\,(\rho_\ell(A'_v))\mathrm{tr}\,(\rho_\ell(\overline{A_v})) \\
&= \sum_{\ell\in L^+} \mathrm{tr}\,(\rho_\ell(A'_v)\otimes\rho_\ell(\overline{A_v}))q_v^{-sd(\ell)}, \quad d(\ell) = \ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left\{ \sum_{\substack{\ell\in L^+ \\ d(\ell)=j}} \mathrm{tr}\,(\rho_\ell(A'_v)\otimes\rho_\ell(\overline{A_v}))\right\} q_v^{-sj}
\end{aligned}$$

ここで, (ρ, V) を $GL_n(\mathbf{C})$ の standard 表現とするとき

(4.1) $$\mathrm{Sym}^j(\rho\otimes\rho) \cong \bigoplus_{\substack{\ell\in L\\ d(\ell)=j}} \rho_\ell\otimes\rho_\ell$$

これから

(4.2) $$\Psi(s,\Phi_v,W_v',W_v) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{tr}\,(\mathrm{Sym}^j(A_v'\otimes\overline{A_v}))q_v^{-sj} = \det(1-A_v'\otimes\overline{A_v}q_v^{-s})^{-1}$$

をえる. (3.4) よりこれは $\Re(s)\geq 1$ でなりたつ.

(4.2) で特に $\pi=\pi'$, $W=W'$ とすれば

$$\det(1-A_v\otimes\overline{A_v}q_v^{-s})\Psi(s,\Phi_v,W_v,W_v) = 1 \qquad (\Re(s)\geq 1)$$

従って

$$\det(1-A_v\otimes\overline{A_v}q_v^{-s}) \neq 0 \qquad (\Re(s)\geq 1)$$

ゆえに λ を A_v の固有値とすれば

$$1-q_v^{-\sigma}|\lambda|^2 \neq 0 \qquad (\sigma\geq 1)$$

これから

(4.3) $$\lambda \text{ が } A_v \text{ の固有値} \Longrightarrow |\lambda| < q_v^{1/2} \qquad (v\notin S)$$

である ([Jacquet - Shalika: Corollary (2.5)]). この評価から Euler product

(4.4) $$L_S(s,\pi\times\pi') = \prod_{v\notin S}\det(1-\overline{A_v}\otimes A_v'q_v^{-s})^{-1}$$

は $\Re(s) >> 0$ で絶対収束する. (3.1), (3.2), (4.2) より

(4.5) $$I(s,\Phi,\varphi',\varphi) = \Psi_S(s,\Phi,W',W)L_S(s,\pi\times\pi') \qquad (\Re(s)>>0)$$

ただし

$$\Psi_S(s,\Phi,W',W) = \prod_{v\in S}\Psi(s,\Phi_v.W_v',W_v)$$

となる. (3.4) より $\Psi_S(s,\Phi,W',W)$ は $\Re(s)>1$ で正則で, Φ, φ, φ' をうまくとることにより 0 にならないようにできる ([Jacquet - Shalika: Proposition (1.5) and (3.17)]). したがって (4.5) から

(4.6) $$L_S(s,\pi\times\pi') \text{ は } \Re(s)>1 \text{ 上正則に解析接続できる}$$

ことがわかる ([Jacquet - Shalika: Lemma (5.2)]). (4.3), (4.6) を用いて,

(4.7) $$\text{無限積 } \prod_{v\notin S}\det(1-\overline{A_v}\otimes A_v'q_v^{-s})^{-1} \text{ は } \Re(s)>1 \text{ で絶対収束する}$$

が証明できる ([Jacquet - Shalika: Theorem (5.3)]). とくに $L_S(s,\pi\times\pi')\neq 0$ $(\Re(s)>1)$ である. また (4.5) は $\Psi_S(s,\Phi,W',W)$ が全 s-平面に解析接続できれば, $L_S(s,\pi\times\pi')$ も全 s-平面に解析接続できることを示す. これは [Jacquet - Piatetski-Shapiro - Shalika : Theorem (2.7)] (non-archimedeán case) と [Jacquet - Shalika 2 : Theorem 5.1] (archimedean case) で成し遂げられた.

References

[C] "Automorphic Forms, Representations, and L-functions," Proc. Symp. in Pure Math. Vol. XXXIII - Part 1, A.M.S., 1979.

[Bump] D. Bump, *The Rankin-Selberg method: A survey*, in "Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups," Academic Press, 1989.

[Flath] D. Flath, *Decomposition of representations into tensor products*, in "[C]," pp. 179 - 183.

[Jacquet - Shalika] H. Jacquet and J. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations I*, Amer. J. Math. **103** (1981), 499 - 588.

[Jacquet - Shalika 2] H. Jacquet and J. Shalika, *Rankin-Selberg convolutions: Archimedean theory*, Israel Math. Conf. Proc. **2** (1990), 125 - 207.

[Jacquet - Piatetski-Shapiro - Shalika] H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro and J. Shalika, *Rankin-Selberg convolution*, Amer. J. Math. **105** (1983), 367 - 464.

[Shalika] J. Shalika, *The multiplicity one theorem on $GL(n)$*, Ann. Math. **100** (1974), 171 - 193.