数理解析研究所講究録
第 793 巻 1992 年 238-245

球面上の involution の isovariancy 障害について

北田　泰彦 (Yasuhiko Kitada)
(横浜国大・工・応用数学)

1 Introduction

以下に現れる n はすべて正の偶数とする。$(2n+2)$-次元の滑らかな framed 閉多様体で Kervaire 不変量が 0 とならないものを単に Kervaire 多様体と呼ぶことにする。Kervaire 多様体が存在するためには $n+2$ が 2 のべきであることが必要であり ([3])、実際 $n=2,6,14,30$ のときには $(2n+2)$ 次元 Kervaire 多様体が存在する ([6])。ただし、Kervaire 多様体は存在したとしても、framed コボルディズム類は一意的に定まらない。ホモトピー球面を境界とする $(2n+2)$-次元の滑らかな framed 多様体でその Kervaire 不変量が 0 とならないとき、その境界のホモトピー球面を Kervaire 球面と呼ぶ。Kervaire 球面は次元が定まれば微分同相の範囲で一意的に定まる。また $(2n+2)$ 次元の Kervaire 多様体が存在するときに限り、$(2n+1)$-次元の Kervaire 球面は標準的な球面 S^{2n+1} と微分同相になる。ここでは標準的な球面と Kervaire 球面の上の involution について考える。

複素 Euclid 空間 $\mathbf{C}^{n+2}$ の点を $(z_0, z_1, \cdots, z_{n+1})$ で表すとき、

$$z_0^d + z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0, \quad \sum_{k=0}^{n+1} |z_k|^2 = 1$$

を満たす点の集合を W_d^{2n+1} とし、この上にすべての座標の複素共役をとる involution を考える。以下 d は奇数、したがって W_d^{2n+1} はホモトピー球面となる場合のみを考える。また、$\mathbf{R}^{n+1}$ 上の標準的な内積を $\langle\ ,\ \rangle$ で表し、この内積に関する $\mathbf{R}^{n+1}$ の単位円盤を D^{n+1}、単位球面を S^n とし、$x \in S^n$ に対して $\theta_x \in O(n+1)$ を

$$\theta_x(y) = 2\langle x, y\rangle x - y, \quad y \in \mathbf{R}^{n+1}$$

で定義し、微分同相

$$\psi : S^n \times S^n \to S^n \times S^n$$

を$\psi(x,y) = (\theta_x\theta_y(x), \theta_x\theta_y(y))$ で定める。$\psi^q(x,y) = ((\theta_x\theta_y)^q x, (\theta_x\theta_y)^q y)$ となることを注意しておく。一般に、$A \cup_\varphi B$ は Bの部分空間（多くは Bの境界）上で定義された A への写像 φ によって Bを A に接着した空間を表すものとする。

$$\Sigma_q^{2n+1} = S^n \times D^{n+1} \cup_{\psi^q} D^{n+1} \times S^n$$

を考え、これに involution を $(x,y) \mapsto (x,-y)$ で入れる。以上の 2 つの例について知られていることをまず述べることにする ([4], [5])。

- W_{2q+1}^{2n+1} とΣ_q^{2n+1}は同変微分同相である。
- Σ_q^{2n+1}の中で、$q \equiv 0, 3 \ mod\, 4$ のものはすべて標準的な球面上の線形な involution と同変微分同相であり、$q \equiv 1, 2 \bmod 4$ のものについても、それらはすべて互いに同変微分同相である。したがって、上の例はΣ_0^{2n+1}とΣ_1^{2n+1}で代表できる。特に、$n+2$ が 2 のべきではない場合にはこの 2 つの代表例は微分同相でない。
- G-手術理論の立場からみるとこれらの例は標準的な球面上の線形な作用と $\mathbf{Z}/2$ normally cobordant である。
- $n+2$ が 2 のべきでない場合には、Σ_0 と Σ_1 は transversely isovariant （以後 t-isovariant と略記）に同変ホモトピー同値でない。すなわち、Σ_1 から Σ_0 への同変ホモトピー同値写像で、isotropy 群を保ち、かつ固定点集合の周りでは法 bundle の bundle 写像をあたえるようなものは存在しない。
- $n+2$ が 2 のべきでないときには、Σ_1 は（作用を忘れて）標準的な球面でない球面（ Kerviare 球面）であるが、$n+2$ が 2 のべきでないときには、Kervaire 球面は S^nを固定点集合とするような involution で線形なものと t-isovariant ホモトピー同値となるものをもたない。

$n+2$ が 2 のべきでない時には、上の例については同変微分の範囲で完全な分類ができている。$n+2$ が 2 のべきとなるときには、何が問題となるのかをここでは考えることにする。これらを問題の形にまとめる。以下 P^k は k次元の実射影空間を表す。

問題 1　$n+2$ が 2 のべきのとき、Σ_0^{2n+1} とΣ_1^{2n+1} は同変微分同相または t-isovariantly ホモトピー同値か？

問題 2　$n+2$ が 2 のべきのときに、Kervaire 障害写像

$$c : [D^{n+1} \times P^{n+1}, G/O] \to \mathbf{Z}/2$$

は非自明か？

問題 3　一般の n に対して、Σ_1^{2n+1} が線形な involution と t-isovariantly homotopic になるための obstruction を決定せよ。

これらの問題はいずれも Kervaire 予想 ($n+2$ が 2 のべきのときに $(2n+2)$ 次元の Kervaire 多様体が存在する) と密接な関連がある。Kervaire 多様体が存在するならば、問題 2 の障害写像は非自明である（したがって、この非自明性の方が、Kervaire 多様体の存在を示すよりは易しいはずである)。問題 2 の幾何学的意味を述べると、$(2n+1)$-次元の Kervaire 球面が Σ_0^{2n+1} と t-isovariant 同変ホモトピー同値な involution を持つことと、c の非自明性が同値になる。

以下、t-isovariancy について得られた結果を述べる。

定理 1. Σ_0^{2n+1} と Σ_1^{2n+1} が t-isovariantly ホモトピー同値になるための必要十分条件は写像

$$h : S^n \times P^n \to P^n, \quad h(x, [y]) = [(\theta_x\theta_y)^2 y]$$

が第 2 成分への射影 $p_2 : S^n \times P^n \to P^n$ と homotopic になることである。

$n+2$ が 2 のべきとはならないときには、Kervaire 球面は Σ_0 と t-isovariantly homotopic となる involution を持たないことが知れているが、その障害は Whitehead 積を用いて次のように与えられる。

定理 2. $n+2$ が 2 のべきでないときにはΣ_0^{2n+1} と Σ_1^{2n+1} が t-isovariant となるための障害は $[\iota_{n+1}, \iota_{n+1}]$ である。$n+2$ が 2 のべきのとき、$[\iota_{n+1}, \iota_{n+1}] = 2\alpha$ となる $\alpha \in \pi_{2n+1}(S^{n+1})$ が存在するならばΣ_0^{2n+1} と Σ_1^{2n+1} は t-isovariant に同変ホモトピー同値である。

$[\iota_3, \iota_3], [\iota_7, \iota_7]$ はともに 0 となる、さらに $k \leq 5$ のとき、$(2^{k+1}-2)$ 次元 Kervaire 多様体で framed コボルディズム群 $\pi^S_{2^{k+1}-2}$ の元とみて位数が 2 のものが存在する ([6],Chapter 8)。このことは、$[\iota_{2^{k+1}-1}, \iota_{2^{k+1}-1}] = 2\alpha$ と書けることと同値である ([2],Corollary 3.2) から、

系 3. $k \leq 6$ のとき、$\Sigma_1^{2^{k+1}-3}$ は線形な involution $\Sigma_0^{2^{k+1}-3}$ と t-isovariant に同変ホモトピー同値である。

そのほか Kervaire 球面上の involution について、わかっていない問題を 2 つほど挙げておく。

問題 4　$n+2$ が 2 のべきでないとき、標準的な球面 S^{2n+1} の上の involution で、固定点集合を S^n とし、線形な involution と t-isovariantly homotopic でないものが存在するか？

問題 5　$n+2$ が 2 のべきでないとき、Kervaire 球面上の向きを保たない involution の固定点集合の次元について結果を出せ。

2　Involutions の比較

n を偶数とし、2 つのホモトピー球面

$$\Sigma_0 = S^n \times D^{n+1} \cup_{id} D^{n+1} \times S^n$$

$$\Sigma = S^n \times D^{n+1} \cup_{\chi} D^{n+1} \times S^n$$

を考え、これらに involutions を $(x, y) \mapsto (x, -y)$ で入れる。　ただし、χ はこの作用に関して同変な貼り合わせである。t-isovariant 写像 $f : \Sigma \to \Sigma_0$ を構成したい。固定点集合 $S^n \times \{0\}$ 上では f は "identity" 写像として一般性を失わない。固定点集合の近傍 $S^n \times D^{n+1}$ では t-isovariancy の仮定から、

$$f|S^n \times D^{n+1} : S^n \times D^{n+1} \to S^n \times D^{n+1}$$

は線形な bundle 写像、

$$f(x, y) = (x, \rho(x)y), \quad \rho : S^n \to O(n+1)$$

としてよい。この右辺の式を f_ρ で表し、f_ρ の制限が引き起こす $S^n \times S^n$ の微分同相写像を ϕ_ρ で表す。また商空間 $S^n \times P^n$ における微分同相を $\bar{\phi}_\rho$ で表す。

補題 2.1. $f|S^n \times D^{n+1} = f_\rho$ となるような t-isovariant なホモトピー同値写像 $f : \Sigma \to \Sigma_0$ が存在するための必要十分条件は $p_2\bar{\phi}_\rho\bar{\chi}$ が p_2 と homotopic となるこ

とである。ただし、p_2 は第 2 成分への射影 $S^n \times P^n \to P^n$、$\bar{\chi}$ は χ の引き起こす $S^n \times P^n$ の写像とする。

[証明]　$\bar{\phi}_\rho \bar{\chi} : S^n \times P^n \to S^n \times P^n$ が、$D^{n+1} \times P^n \to D^{n+1} \times P^n$ に拡張できればよいことからわかる。□

定義　写像 $g : X \times Y \to W$ の Hopf 構成を

$$\Gamma_g : X * Y \to \Sigma W$$

または $\Gamma(g)$ で表し、そのホモトピー類を $[\Gamma_g]$ で表す。

補題 2.2. $\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ のなかで

$$[\Gamma(p_2\phi_\rho\chi)] = [\Gamma(p_2\chi)] + J(\rho)$$

が成り立つ。ここに J は J準同型写像

$$J : \pi_n(O(n+1)) \to \pi_{2n+1}(S^{n+1})$$

を表す。

[証明] $S^n \times S^n = (D^n_+ \cup D^n_-) \times S^n$ と分解し、$\rho(D^n_-) = 1 \in O(n+1)$, $p_2\chi(D^n_+, y) = y$ としてよい。Hopf 構成において、$S^{2n+1} = D^{2n+1}_+ \cup D^{2n+1}_- = (D^n_+) * S^n \cup (D^n_-) * S^n$ とみて、$\Gamma(p_2\phi_\rho\chi)$ は D^{2n+1}_+ 上では $J(\rho)$ で、D^{2n+1}_- 上では$\Gamma(p_2\chi)$ で与えられる。□

$\pi_n(O(n+1))$ については、Kervaire-Wall による次の結果が参考になる。

命題 **2.3.** $\pi_n(O(n+1))$ は $n \equiv 0 \bmod 8$ のとき $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2$（生成元は θ ともうひとつは安定なホモトピー類）、$n \equiv 4 \bmod 8$ のとき $\mathbf{Z}/2$（生成元は θ）、$n \equiv 2, 6 \bmod 8$ のとき 0 である。

[定理 1 の証明]　$[\Gamma(\psi)] = J(\theta) = [\iota_{n+1}, \iota_{n+1}]$ が成り立つことはよく知られており、このホモトピー類は $n = 0, 2, 6$ 以外ではゼロでなく、（n が偶数なら）位数は 2 である。さて、$\chi = \psi$ のときを考えると、$\Sigma = \Sigma_1$ である。作用を忘れるとき、ある $\rho \in \pi_n(O(n+1))$ に対して、

$$p_2\phi_\rho\psi : S^n \times S^n \to S^n$$

の $D^{n+1} \times S^n$ への拡張が存在すれば、$\Gamma(p_2\phi_\rho\psi) = 0$ でなくてはならないから、補題 2.2 より、$[\Gamma(p_2\psi)] + J(\rho) = 0$ である必要がある。すなわち、$\rho = \theta$ としなけれ

ばならない。このとき、$p_2\phi_\theta\psi : S^n \times S^n \to S^n$ は $(x, y) \mapsto (\theta_x\theta_y)^2 y$ で与えられるから、作用を考慮にいれて、商空間で考えると、第 1 節の定理 1 が示せたことになる。□

このようにして得られた写像

$$h : S^n \times P^n \to P^n, \quad h(x, [y]) = [(\theta_x\theta_y)^2 y]$$

を $D^{n+1} \times P^n$ に定義域を拡張することを試みる。

補題 2.4. 上の写像 $h : S^n \times P^n \to P^n$ は $D^{n+1} \times P^n$ の $2n$-skeleton までは拡張できる。その一つの拡張を選んだとき、$(2n+1)$-cell へ（最後の）拡張をするための障害

$$\mathcal{O} \in H^{2n+1}(D^{n+1} \times P^n; \pi_{2n}(P^n)) \cong \pi_{2n}(P^n) \cong \pi_{2n}(S^n)$$

を $\pi_{2n}(S^n)$ の元とみなすとき、その懸垂 $\Sigma\mathcal{O}$ が $[\iota_{n+1}, \iota_{n+1}]$ となるようにできる。

[証明] 次の記号を導入する。

$$X = D^{n+1} \times P^n, \quad \tilde{X} = D^{n+1} \times S^n,$$

$$X^\perp = \{(x, [y]) \in X | \langle x, y \rangle = 0\},$$

$$\tilde{X}_+ = \{(x, y) \in \tilde{X} | \langle x, y \rangle \geq 0\},$$

$$\tilde{X}_- = \{(x, y) \in \tilde{X} | \langle x, y \rangle \leq 0\},$$

$$Y = S^n \times P^n, \ \tilde{Y} = S^n \times S^n,$$

$$\tilde{Y}_+ = \{(x, y) \in \tilde{Y} | \langle x, y \rangle \geq 0\},$$

$$\tilde{Y}_- = \{(x, y) \in \tilde{Y} | \langle x, y \rangle \leq 0\},$$

$$Y^\perp = X \cap X^\perp, \quad \tilde{Y}^\perp = \tilde{Y}_+ \cap \tilde{Y}_-.$$

$Y^\perp$ 上で $h(x, [y]) = [y]$ だから、$X^\perp$ 上でも $h(x, [y]) = [y]$ とすることにより、h は $X^\perp$ 上に拡張できる。$S^n \times S^n = \tilde{Y}_+ \cup \tilde{Y}_-$ 上では involution は $\tilde{Y}_+$ と $\tilde{Y}_-$ を入れ換え、$\tilde{X} = \tilde{X}_+ \cup \tilde{X}_-$ では $\tilde{X}^\perp$ で区切られた $\tilde{X}_+$ と$\tilde{X}_-$ を入れ換える。拡張された h は$\partial\tilde{X}_+ = \tilde{Y}_+ \cup \tilde{X}^\perp$ 上の点 (x, y) で代表される点を、$(x, y) \in \tilde{Y}_+$ のとき $[(\theta_x\theta_y)^2 y]$ へ写し、$(x, y) \in \tilde{X}^\perp$ を $[y]$ へ写す。これを $\tilde{X}_+$ の内部に拡張できれば、h が X 全体に拡張できることになる。この拡張の問題は、作用を忘れて、

$$h_1 : S^n \times S^n \to S^n$$

が、

$$h_1(x,y)=\begin{cases}(\theta_x\theta_y)^2y, & \langle x,y\rangle\ge 0\\ y, & \langle x,y\rangle\le 0\end{cases}$$

で与えられているときに、定義域を $D^{n+1}\times S^n$ に拡張する問題と同値であることに着目する。$\langle x,y\rangle\le 1/2$ のときには、$\langle x,h_1(x,y)\rangle\le 0$ となるから、h_1 は

$$h_2(x,y)=\begin{cases}(\theta_x\theta_y)^2y, & \langle x,y\rangle\ge 1/2\\ -x, & \langle x,y\rangle\le 1/2\end{cases}$$

で定義される h_2 と homotopic である。さらに、x と y が一次独立の時に、x と直交する単位ベクトル e を用いて、

$$y=\cos u\,x+\sin u\,e$$

とすると、

$$(\theta_x\theta_y)^2y=\cos(-3u)x+\sin(-3u)e$$

と書け、ホモトピー

$$H(x,y,t)=\cos(2t-3)u\,x+\sin(2t-3)u\,e,\quad (0\le t\le 1)$$

により、h_2 は $h_3(x,y)=-\theta_x y$ なる h_3 に homotopic となる。h_3 の $D^{n+1}\times\{pt\}$ への拡張を一つ定めれば、$\mathcal{O}\in\pi_{2n}(S^n)$ が決まるが、$D^{n+1}\times\{pt\}$ への拡張を $\pi_{n+1}(S^n)\cong\mathbf{Z}/2$ だけ変えると、$\mathcal{O}$ は Whitehead 積 $[\eta,\iota_n]$ の分だけ変わる。このことは EHP 系列

$$\pi_{2n+2}(S^{2n+1})\xrightarrow{P}\pi_{2n}(S^n)\xrightarrow{E}\pi_{2n+1}(S^{n+1})\xrightarrow{H}\pi_{2n+1}(S^{2n+1})\cong\mathbf{Z}$$

に示される。最終的に、h_1 を $D^{n+1}\times S^n$ に拡張する障害は $E\mathcal{O}\in\pi_{2n+1}(S^{2n})$ にあり、これは $J(-\theta)=[\iota_{n+1},\iota_{n+1}]$ に等しい。□

[定理 2 の証明] 補題 2.4 で得られた障害$\omega=[\iota_{n+1},\iota_{n+1}]\in\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ は $D^{n+1}\times P^n$ の部分集合 $X^\perp$ での拡張を固定して計算されたものであった。$X^\perp$ 上での拡張の仕方を変えても、この障害が消えることはない（[5], Corollary C）。したがって、定理 2 の $n+2$ が 2 のべきでない場合が示されたことになる。

$n+2=2^{k+1}$ $(k\le 5)$ の場合には、第 1 節で述べたように、$\omega=2\alpha$ となる$\alpha\in\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ が存在する。ω,α はともに torsion element だから、EHP 系列の H

で消え、したがってある $\beta \in \pi_{2n}(S^n)$ の懸垂である。補題 2.4 の証明で使用した記号を用いると、

$$h : S^n \times P^n \to P^n$$

の $X^\perp$ への拡張を少し変える。すなわち $X^\perp$ の 1 個の $2n$-cell 上で、β だけ変更しておく。2 重被覆$\tilde{X}^\perp \to X^\perp$ は向きを保つから、以前の障害 $\mathcal{O}$ は 2β だけ変わる。この変更は $E\mathcal{O}$ を 2α だけ変えるので、障害は消える。□

参考文献

[1] Adams,J.F, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. of Math. 72(1960),20-104.

[2] Barratt,M.G, Jones,J.D.S. and Mahowald,M.E., The Kervaire invariant problem, Contemporary Mathematics, 19(1983), 9-22.

[3] Browder,W., The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalizations, Ann. of Math. 90 (1969), 157-186.

[4] Kitada,Y., Orientation reversing involutions on Brieskorn spheres, Kodai Math. J., 9(1986),361-367.

[5] Kitada,Y., Relations among smooth Kervaire classes and smooth involutions on homotopy spheres, Kodai Math. J., 11(1988), 387-402.

[6] Kochman, S.O., Stable homotopy groups of spheres, Lecture Notes in Math, vol. 1423, Springer.

[7] Steenrod,N.E., Cohomology invariants of mappings, Ann. of Math. 50(1949).

[8] N.E.Steenrod,N.E. and Epstein,D.B.A., Cohomology operations, Ann. of Math. Studies, vol. 50, Princeton Univ. Press, 1962.